概率论与数理统计

刘韶跃　李以泉　丁碧文　杨湘桃　编

湘潭大学出版社

概率论与数理统计

刘韶跃 李以泉 丁碧文 杨湘桃 编

湘潭大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘韶跃等编. —湘潭：湘潭大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-81128-463-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第001897号

责任编辑：王亚兰
封面设计：刘　扬
出版发行：湘潭大学出版社
社　　址：湖南省湘潭市　湘潭大学出版大楼
电话(传真)：0731-58298966　邮编：411105
网　　址：http://xtup.xtu.edu.cn
印　　刷：湘潭风帆印务有限公司
经　　销：湖南省新华书店
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：12.25
字　　数：290千字
版　　次：2012年12月第1版　2013年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81128-463-8
定　　价：24.00元

目　录

第一章 随机事件及其概率

概率论是研究随机现象的规律的科学.

在我们的身边常常会遇到随机现象. 例如，打篮球投篮时，可能投中，也可能投不中，每一次投篮的结果是随机的. 从一批产品中任取一个，取出的产品可能是正品，也可能是次品. 进行实验时，把得到的实验数据在坐标图纸上用点表示出来，我们发现，这些点（假设它们足够多）通常不是位于同一条曲线上. 而是散布在某一带形区域内，这就是所谓实验点的随机散布.

虽然随机现象在一定的条件下可能出现这样或那样的结果，而且在每一次试验之前都不能预知这一次试验的确切结果，但经过长期的、反复的观察和实践，人们逐渐发现在相同条件下进行大量重复试验和观察时，试验的结果会呈现出某种规律性——统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一个数学分支，它在自然科学和社会科学诸多领域有着广泛的应用.

第一节 随机事件及其频率·概率的统计定义

在生产实践和科学研究中经常会遇到，在不变的条件下重复地进行多次实验或观测. 抽去这些实验或观测的具体性质，就得到概率论中试验的概念. 所谓试验就是一定综合条件的实现，我们假定这种综合条件可以任意多次地重复实现. 大量现象就是很多次试验的结果.

当一定综合条件实现时，也就是在试验的结果中，所发生的现象叫做事件. 如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做必然事件；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做不可能事件.

在试验的结果中，可能发生、也可能不发生的事件，叫做随机事件（偶然事件）. 例如，任意抛掷硬币时，正面向上是随机事件；远距离射击时，击中目标是随机事件；自动车床加工机械零件时，加工出来的零件为合格品是随机事件；等等.

通常我们用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示随机事件，而用字母 U 表示必然事件，V 表示不可能事件.

例 1.1 袋中装有 10 个球，其中 8 个红球，2 个白球，从中不放回地任取三个球，则在取出的三个球中，“至少有一个红球”是必然事件；“白球数多于 2 个”是不可能事件；而

“没有白球”,“至少有 1 个白球”,“恰有 1 个白球” 等等都是随机事件 .

用数字表示大量现象中的规律性时,联系到下面的概念:

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次,则比值$\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的相对频率(简称频率),记作 $f_n(A)$;用公式表示如下:

$$f_n(A) = \frac{m}{n}.$$

显然,任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数:

$$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1.$$

对于必然事件,在任何试验序列中,我们有 $m = n$,所以必然事件的频率恒等于 1:

$$f_n(U) = 1.$$

对于不可能事件,我们有 $m = 0$,所以不可能事件的频率恒等于 0:

$$f_n(V) = 0.$$

经验表明,当试验重复多次时,随机事件 A 的频率具有一定的稳定性;就是说,在不同的试验序列中,当试验次数 n 充分大时,随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 常在一个固定的数字附近摆动 .

历史上,曾经有一些著名的统计学家进行过抛掷硬币的试验,得到如下的结果:

试验者	抛掷次数 n	出现正面 H 的次数 n_H	比值$\frac{n_H}{n}$
德摩根	2 048	1 061	0.518 0
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

可以看出,随着试验次数的增加,正面出现的频率越来越稳定于 0.5 附近.

类似的例子可以举出很多 . 这说明随机事件在大量重复试验中存在着某种客观规律性 —— 频率的稳定性 . 因为它是通过大量统计显示出来的,所以称为统计规律性 .

由随机事件的频率的稳定性可以看出,随机事件发生的可能性大小可以用一个数来表示 . 这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的、介于 0 与 1 之间的数叫做随机事件 A 的概率,记作 $P(A)$. 概率的这个定义通常称为概率的统计定义 .

当试验次数 n 充分大时,随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 正是在它的概率 $P(A)$ 的附近摆动 . 在上面的例子中,我们可以认为硬币正面向上的概率等于 0.5.

直接估计某一随机事件的概率是非常困难的,甚至是不可能的,仅在比较特殊的情况下才可以计算随机事件的概率 . 概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法:我们把多次重复试验中随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 作为随机事件的概率 $P(A)$ 的近似值,即当试验次数 n 充分大时,

$$P(A) \approx f(A) = \frac{m}{n}.$$

因为必然事件的频率恒等于1,所以必然事件的概率等于1:

$$P(U) = 1.$$

又因为不可能事件的频率恒等于0,所以不可能事件的概率等于0:

$$P(V) = 1.$$

应该指出,随机事件的频率是与我们已进行的试验有关的,而随机事件的概率却是完全客观地存在着的. 在实际进行的试验中,随机事件的频率可以看做是它的概率的随机表现. 随机事件的概率表明,试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系,它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证的统一.

还应指出,随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性,这种客观属性是与我们认识主体无关的. 不应该把概率看作认识主体对于个别现象的信念程度. 有时一个人说某事件"可能发生"或"不太可能发生",这仅表示说话的人对该事件发生的可能性的一个判断而已. 因为个别现象不是发生,就是不发生,所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的.

第二节　样本空间

在不变的条件下重复地进行试验,虽然每次试验的结果中所有可能发生的事件是可以明确知道的,并且其中必有且仅有一个事件发生,但是在试验之前却无法预知究竟哪一个事件将在试验的结果中发生.

随机试验的每一个可能出现的,而且是试验中最简单的不能再分的结果叫做样本点,通常用字母 ω 表示.

试验的所有样本点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots$ 构成的集合叫做样本空间,通常用字母 Ω 表示,于是,我们有

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}.$$

例 2.1　掷一枚骰子,观察向上一面的点数,所有可能的结果为 $\Omega'_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$;如果将六个面分别涂上红、黄、蓝、绿、白、黑六种颜色,则 $\Omega''_1 = \{$红,黄,蓝,绿,白,黑$\}$. 这两个样本空间表面上不同,但本质上是一致的,它们可以统一抽象地记为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

一般地,像上面这样只有有限个样本点的样本空间可以表示为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. 样本空间的这种抽象表示,实质上是抓住了随机现象的本质,使得那些表面上不同而本质上一致的各种随机现象能用统一的模型来表示. 例如,只包含两个样本点的样本空间,既能作为掷硬币出现正面、反面的模型,又能用于人寿保险中"生存"与"死亡"的模型,以及

描述天气时“下雨”与“不下雨”的模型，或者某公汽站“有人排队”与“无人排队”的模型等等．

例 2.2 观察某电话交换台在$[0,t]$内来到的电话呼叫次数，其结果显然为一非负整数，但很难确定呼叫数的上限，因此样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，这一样本空间中包含有无穷多个样本点，但它们可以按某种次序排列出来，这时我们称它有可列个样本点，其一般形式为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$.

例 2.3 测量某一零件的长度考察其测量结果与真正长度的误差，样本空间 Ω_3 可取作$[-M,M]$，其中M为最大正误差，如果无法确定这一最大值，将Ω取作$(-\infty,+\infty)$也可以．这里的样本空间也含有无穷多个样本点，但它无法像例 2 中的样本空间那样将样本点一一排列，我们称这样的样本空间所包含的样本点有不可列个．

例 2.4 为了解某小学学生的生长发育状况，需要同时测量小学生的身高、体重和胸围．在这一随机试验中，任一可能结果即样本点是一个有序数组(x,y,z)，其中 x,y,z 分别表示被测量小学生的身高、体重和胸围，因此样本空间可以表示为 $\Omega_4=\{(x,y,z)\,|\,0<x\leqslant a,0<y\leqslant b,0<z\leqslant c\}$，这里的$a,b,c$分别表示该校学生身高、体重和胸围的最大值．

从上面这些例子可以看出，随着所讨论的随机试验的不同，样本空间可能很简单，也可能很复杂．在今后的讨论中，我们一般都假定样本空间是预先给定的，这种必要的抽象可以使我们更好地抓住随机现象的本质，得到的结果也能得到广泛的应用．

现在我们说明随机事件与样本空间的关系．

在例 2.1 中，用集合 $A=\{2,4,6\}$ 表示“偶数点”，则A是样本空间Ω'_1 的子集，同样 $B=\{1,2,3,4\}$ 表示“得到的点数不超过 4”，它也是 Ω'_1 的子集．又如在考察测量误差的例 2.3 中，$C=[-0.5,0.5]$ 表示“测量结果与真实值的误差绝对值不超过 0.5 个单位”，同样地，它也是样本空间 Ω_3 的子集．

由此可见，任一随机事件A都是样本空间Ω的一个子集，它是满足某些条件的样本点所组成的集合．该子集中任一样本点 ω 发生时事件 A 发生．

因为样本空间Ω中任一样本点ω发生时，必然事件U都发生，所以U是所有样本点构成的集合；这就是说，必然事件 U 就是样本空间Ω. 今后我们就把必然事件记为 Ω.

因为样本空间Ω中任一样本点ω发生时，不可能事件V都不发生，所以V不包含任何样本点；这就是说，不可能事件 V 是空集 $\varnothing$. 今后我们就把不可能事件记为 $\varnothing$.

应该指出，试验的任一样本点 ω 也是随机事件，今后我们把试验的样本点称为试验的基本事件．显然，基本事件就是样本空间 Ω 的仅由单个样本点构成的子集．

第三节　事件的关系及运算

为了研究随机事件及其概率,我们需要说明事件之间的各种关系及运算.

正如本章第二节中已经指出的,任一随机事件都是样本空间的一个子集,所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是类似的.在下面的讨论中,我们叙述事件之间的关系及运算时所用的符号也是与集合之间的关系及运算的符号基本一致的.

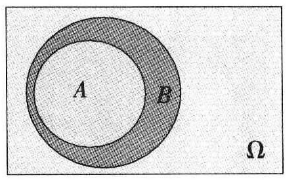

图 1-1

1. 如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记作

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B$$

此时,A 的样本点都是 B 的样本点,如图 1－1 所示.

例 3.1　若以 A 表示事件"灯泡的使用寿命 $T \geqslant 1500$ 小时",而 B 表示"灯泡的使用寿命 $T \geqslant 1000$ 小时",显然,$A \subset B$,此时,A 的发生必然导致 B 的发生.易知,$\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 如果事件 A 包含事件 B,且事件 B 包含事件 A,即

$$B \supset A \text{ 且 } A \supset B.$$

也就是说,二事件 A 与 B 中任一事件的发生必然导致另一事件的发生,则称事件 A 与事件 B 相等,记作

$$A = B.$$

3."两个事件 A 与 B 中至少有一个事件发生"这一事件叫做事件 A 与事件 B 的和(或称并),记作

$$A \cup B.$$

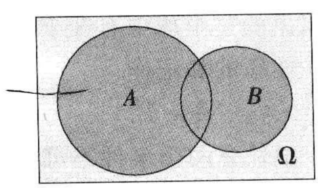

图 1-2

$A \cup B$ 是由至少属于 A 与 B 中一个的样本点组成的集合,如图 1－2 所示.

例 3.2 在“甲乙二人射击同一目标”的试验中，A 表示“甲击中目标”，B 表示“乙击中目标”，则“目标被击中”应表示成 $A \cup B$.

“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生”这一事件叫做 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{（简记为 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i\text{）}.$$

4.“两个事件 A 与 B 都发生”这一事件叫做事件 A 与 B 的积（或称交），记作

$$A \cap B \text{ 或 } AB.$$

AB 由同时属于 A 与 B 的样本点所组成，如图 1－3 所示．

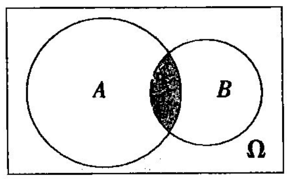

图 1–3

例 3.3 还是“甲乙二人独立射击同一目标”这一试验，AB 表示甲乙二人都击中了目标．

“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生”这一事件叫做事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \text{或 } A_1A_2\cdots A_n \text{（简记为 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i\text{）}$$

5. 如果两事件 A 与 B 不可能同时发生，即

$$AB = \varnothing,$$

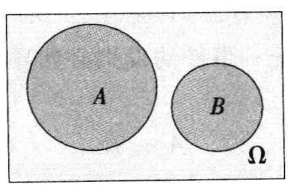

图 1–4

即 A 与 B 没有共同的样本点，称两事件 A 与 B 是互不相容的（或互斥的），如图 1－4 所示．

例 3.4 从一个装有 8 只红球 2 只白球的袋子中不放回地取三个球，A 表示“取出的三个球中有 1 个白球”，B 表示“取出的三个球中有 2 个白球”，则显然 A, B 是互斥的．

通常把两个互不相容事件 A 与 B 的和记作

$$A + B.$$

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生，即

$$A_iA_j = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的（或互斥的）.

通常把 n 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n(\text{简记为}\sum_{i=1}^{n}A_i).$$

6. 如果两事件 A 与 B 是互不相容的，并且每次试验它们中必有一事件发生，即两事件 A 与 B 中有且仅有一事件发生，即

$$AB=\varnothing,\ \text{且}\ A+B=\Omega,$$

则称事件 A 与 B 是对立的(或互逆的)，如图 1－5 所示．

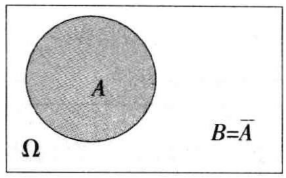

图 1-5

称事件 B 是事件 A 的对立事件(或逆事件)，同样事件 A 也是事件 B 的对立事件(或逆事件)，记作

$$B=\overline{A}\ \text{或}\ A=\overline{B}.$$

例 3.5　在掷骰子的试验中，A 表示"得到偶数点"，B 表示"得到奇数点"，二者是对立的，$B=\overline{A}$.

对于任意的事件 A，我们有

$$\overline{\overline{A}}=A,$$
$$A\overline{A}=\varnothing,$$
$$A+\overline{A}=\Omega.$$

7. 如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件一定发生，即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega,$$

则称这 n 个事件构成完备事件组．

以后对我们特别重要的是互不相容的完备事件组．设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足下面的关系式：

$$\begin{cases}A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n);\\ \sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega.\end{cases}$$

则称这 n 个事件构成互不相容的完备事件组，如图 1－6 所示．

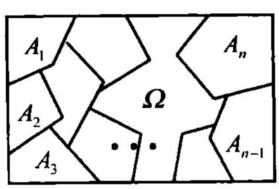

图 1-6

显然，样本空间 Ω 所有的基本事件构成互不相容的完备事件组．

如果把事件 A(或 B) 所包含的基本事件构成的集合简称为集合 A(或 B),则事件的关系及运算可以用集合的关系及运算表述如下:

$A \subset B$	事件 A 包含于事件 B	集合 A 是集合 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 的和	集合 A 与集合 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 的交	集合 A 与集合 B 的交集
$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 不相交
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的余集

与集合运算的性质类似,事件的运算具有下面的性质. 对于任意的事件 A,B,C,有

(1) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$AB = BA.$$

(2) 结合律:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(AB)C = A(BC).$$

(3) 分配律:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC,$$
$$A \cup (BC) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(4) 德摩根(*De Morgen*) 定律:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B},$$
$$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

这里,我们对德摩根定律说明如下:

事件 $A \cup B$ 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个事件发生,它的对立事件显然就是 A 与 B 都不发生,即 $\overline{A}\overline{B}$;

而 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个事件不发生,它的对立事件显然就是 A 与 B 都发生,即 AB.

这一性质可以推广到 n 个事件的情形. 对于任意的 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$
$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

由此可见,德摩根定律表明:n 个事件的和的对立事件就是各个事件的对立事件的交,而 n 个事件的交的对立事件就是各个事件的对立事件的和,所以德摩根定律又称为反演律.

在讨论实际问题时,往往需要考虑试验结果中各个可能的事件,而这些事件是相互关联的,研究事件之间的关系及运算,进而研究这些事件的概率之间的关系及运算,就能够

利用简单事件的概率去推算较复杂的事件的概率．为此，我们应当善于把某些复杂的事件表示为若干个简单事件的和或交．要实现这一点除了正确理解事件的关系及运算外，还必须对具体问题进行具体分析．

例3.6　向指定的目标连射三枪，以 A_1,A_2,A_3 分别表示第一枪，第二枪，第三枪射中目标的事件，用 A_1,A_2,A_3 表示下列各事件：

(1) 仅第一枪射中；

(2) 仅一枪射中；

(3) 三枪都未中；

(4) 至少中一枪．

解 (1) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

(2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

(3) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

(4) $A_1\cup A_2\cup A_3$，或 $\Omega-\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，或 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$.

第四节　概率的古典定义

这里先简单地介绍一些与概率的古典定义相关的知识．

一、乘法原理与加法原理

(1) 乘法原理．若一件事情可以通过连续的 r 个步骤完成，而完成第一个步骤有 m_1 种方法，完成第二个步骤有 m_2 种方法，…，完成第 r 个步骤有 m_r 种方法，则完成这件事的总方法数为

$$m_1m_2\cdots m_r.$$

这种方法称为乘法原理．

(2) 加法原理．若完成一件事有 r 类方式，且任一类方式中的任一种方法都能完成此事，已知完成这件事的第一类方式中有 m_1 种方法，完成这件事的第二类方式中有 m_2 种方法，…，完成这件事的第 r 类方式中有 m_r 种方法，则完成这件事的总方法数为

$$m_1+m_2+\cdots+m_r.$$

这种方法称为加法原理．

二、排列与组合

(1) 不允许重复的排列．从 n 个不同的元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素（被取的元素各

不相同）按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个排列．而所有排列的个数称为从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列数，用 A_n^m 表示，且

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

特别地，当 $m = n$ 时，称为这 n 个不同的元素的全排列，全排列的总个数为

$$A_n^m = P_n = n!,$$

一般规定 $0! = 1$，还可得公式

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

（2）允许重复的排列．若排列中的元素可以重复，从 n 个不同的元素中，任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素（允许重复选取）按照一定的顺序排成一列，则所得排列的总个数为

$$n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^m.$$

此式可理解为从 n 个不同的元素中有放回地逐个取出 m 个元素排成一列的排列总数．

（3）组合．从 n 个不同的元素中，任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个组合．而所有组合的个数称为从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数，用 C_n^m 表示，且

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

三、古典概型

在叙述概率的古典定义之前，我们先介绍“事件的等可能性”的概念．

如果试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是完全相同的，则称这些事件是等可能的．

例如，任意抛掷一枚均匀的硬币，“正面向上”和“正面向下”这两个事件发生的可能性在客观上是相同的，即是等可能的；又如，在一个袋子中取球的时候，袋中每个球被取到的可能性在客观上也是相同的，因而抽到任何一个球都是等可能的．

定义 4.1 设试验的样本空间总共有 n_Ω 个等可能的基本事件，其中随机事件 A 包含了 $n_A(n_A \leqslant n_\Omega)$ 个基本事件，则

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega},$$

这称为概率的古典定义．

例 4.1 某批产品共 N 件，其中 M 件（$M < N$）为次品，从中每次任意抽取 1 件产品进行检验，共取 n 次，求恰有 k 件次品的概率，如果：（1）每次检验后的产品不放回；（2）每次检验后的产品放回．

解 （1）样本空间“从 N 件产品中任抽 n 件进行检验”包含的基本事件总数 $n_\Omega = C_N^n$．A 表示“抽取的 n 件产品中恰有 k 件次品”．在抽取出来的 n 件产品中，k 件次品来自

总共的 M 件次品，可能的取法有 C_M^k 种；而其余的 $n-k$ 件正品来自总共的 $N-M$ 件正品，可能的取法有 C_{N-M}^{n-k} 种．故随机事件 A 包含的基本事件数 $n_A = C_M^k C_{N-M}^{n-k}$，从而

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},(k = 0,1,\cdots,\min(M,n)).$$

(2) 样本空间"从 N 件产品中任抽 n 件进行检验"包含的基本事件总数 $n_\Omega = N^n$.

仍以 A 表示"抽取的 n 件产品中恰有 k 件次品"则 $n_A = C_n^k M^k (N-M)^{n-k}$. 这是因为每次从 M 件次品中任取 1 件，取 k 次，共有 M^k 种取法，每次从 $N-M$ 件正品中任取 1 件，取 $n-k$ 次，共有 $(N-M)^{n-k}$ 种取法，又 k 件次品出现在 n 件产品中的方式共有 C_n^k 种，从而

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{C_n^k M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}$$
$$= C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k},(k = 0,1,\cdots,n).$$

例 4.2　设有 n 个不同的球，每个球等可能地落到 $N(N \geqslant n)$ 个格子的每一格中，求：

(1) 某指定的 n 个格子中各有一球的概率；

(2) 恰有 n 个格子中各有一球的概率；

(3) 某指定的格子中恰有 $k(k \leqslant n)$ 个球的概率．

解　由于每个球可以落入 N 个格子中的任一格中，所以 n 个球在 N 个格子中的分配法共有 N^n 种，即 $n_\Omega = N^n$.

(1) 以 A 表示"某指定的 n 个格子中各有一球"，指定的 n 个格子放 n 个球的方法有 $n!$ 种．即有

$$n_A = n!,$$
$$P(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

(2) 以 B 表示"恰有 n 个格子中各有一球". 由于 n 个格子可以任选，共有 C_N^n 种选法，对每一种选定的 n 个格子，n 个球的放法有 $n!$ 种，故

$$n_B = C_N^n \cdot n!,$$
$$P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}.$$

(3) 以 C 表示"某指定的格子中恰有 k 个球". 先从 n 个球中任选 k 个放入指定的格子中，共有 C_n^k 种取法，然后将余下的 $n-k$ 个球任意放入其余的 $N-1$ 个格子中，共有 $(N-1)^{n-k}$ 种放法，因此

$$n_C = C_n^k \cdot (N-1)^{n-k},$$
$$P(C) = \frac{C_n^k \cdot (N-1)^{n-k}}{N^n}.$$

四、几何概型

在古典概型中，除了要求等可能性，还要求样本点的总数有限，这对于试验的可能结

果有无穷多种的情形并不适用．然而，实际问题中经常出现试验的可能结果有无穷多种，但仍有某种等可能性的情形．请看下面的例子.

例 4.3 一个质地均匀的陀螺的圆周上均匀地刻有[0,4)中的各数字，旋转陀螺，待它停下时，试问圆周与桌面的接触点落在区间[2.5,3.5)上的概率是多少？

解 由于样本空间 $\Omega=[0,4)$，显然样本空间包含有无穷多个样本点．另一方面，由于陀螺构造的对称性和均匀性，当它停下时，圆周上各点与桌面接触的可能性相等，自然会认为所求的概率为

$$\frac{L[2.5,3.5)}{L[0,4)}=\frac{1}{4},\text{（}L\text{ 表示区间的长度）}$$

一般地，具有下列特点的概率问题称为几何概型：

(1) 该概率问题可转化为一个可度量的几何图形 S，试验 E 看成在 S 中随机地投掷一点，即 S 为样本空间．而事件 A 就是所投掷的点落在 S 中的可度量图形 s 中；

(2) 事件 A 的概率与 s 的度量成正比，而与 s 的形状、位置无关，即

$$P(A)=\frac{\mu(s)}{\mu(S)},$$

式中：μ 表示几何度量，指长度、面积、体积等．

例 4.4 甲乙两人相约在某段时间 T 内在某地会面．先到者等 $t(t\leqslant T)$ 时后离去，假定两人在时间 T 内任一时刻到达的可能性相等，求两人能见面的概率．

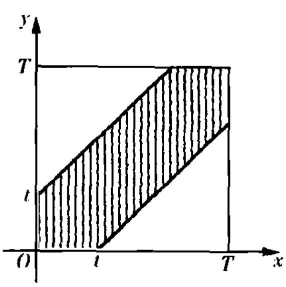

图 1-7

解 设甲乙两人在时间 T 内到达的时刻分别为 x 和 y，则

$$0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T.$$

而两人见面的充要条件是

$$|x-y|\leqslant t.$$

我们把 x 和 y 表示为平面上一点的直角坐标，则所有的样本点可以用边长为 T 的正方形内的点来表示，而两人见面所包含的样本点可以用这个正方形内介于两条直线 $x-y=t$ 和 $y-x=t$ 之间的区域内的点表示出来，如图 1－7 所示．因此，所求概率为：

$$P=\frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{正方形}}}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$