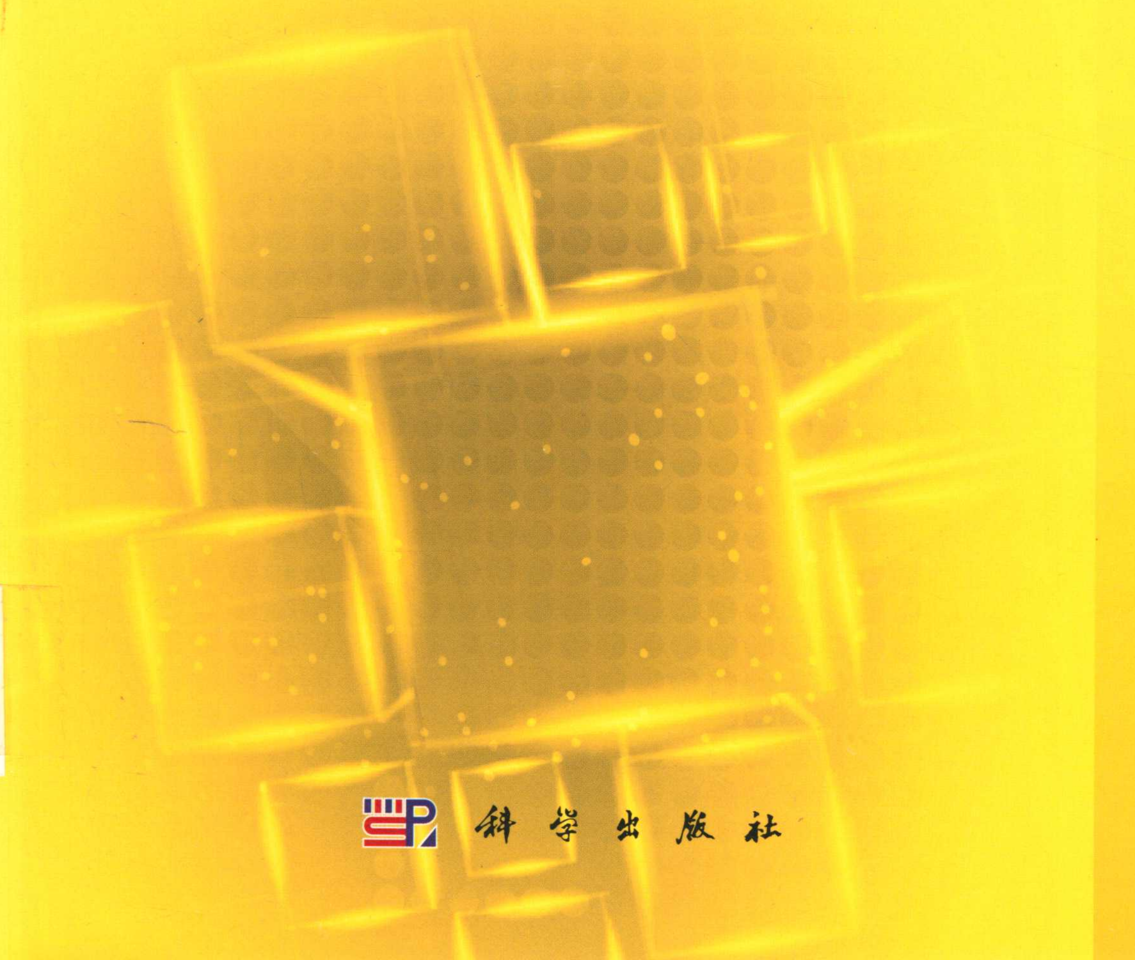
从数学观点看物理世界

——几何分析、引力场与相对论

马天 著



科学出版社

从数学观点看物理世界

——几何分析、引力场与相对论

马　天　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是一本关于微分几何与广义相对论的专著，其特点是强调用数学结构和物理现象作为不可分割的统一体去发现和揭示数学与自然奥秘. 在这部著作中，提出一种关于暗物质与暗能量的统一理论，它是非表象的理论，可很好地解释暗物质与暗能量现象. 本书不仅提出和总结了作者的许多新理论和新结果，而且采用直指本质的方式陈述和介绍有关方面成熟的理论与概念.

本书适合于数学、理论物理、天体物理等专业的高年级本科生、研究生、教学及科研人员，既可作为相关领域的研究生教材，又可作为研究参考书.

图书在版编目(CIP)数据

从数学观点看物理世界：几何分析、引力场与相对论/马天著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-035660-4

Ⅰ. ①从… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①物理学–数学方法 Ⅳ. ①O411

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 229116 号

责任编辑：徐园园 赵彦超／责任校对：刘小梅

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 10 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2012 年 10 月第一次印刷 印张：27 1/4

字数：532 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

物理与数学这两大学科各自具有其自身特点，但目前它们之前的关联已变得非常紧密. 如果将物理学家与数学家的思维方式糅合在一起，用数学的观点看物理，再反过来用物理的观点看数学，必定会产生丰富而又新颖的结果，事实上数学洞察与物理洞察对理解自然有着很强的互补作用. 将数学与物理关联的最大难点在于思维习性的相互转换以及物理现象与数学之间相互转换存在的障碍. 正是因为如此，将数学与物理的真正深入融合为一体还有很长的路要走. 这部专著正是朝着这个方向的努力，它是"从数学观点看物理世界"专著系列中的第一部.

本书正是以这种将数学与物理作为不可分割统一体的独特视角发现了 Riemann 流形上张量场的正交分解定理以及它的孪生兄弟 —— 带标量势的引力场方程. 该方程是 Einstein 场方程的一种修正，以保证能正确描述宇宙加速膨胀这一新发现的天文现象. 应用带标量势的引力场方程可以导出修正的 Newton 引力相互作用公式，它能成功地将宇宙暗能量与暗物质解释成物质不均匀分布产生的正、负势能，并且与天文学星系旋转曲线的 Rubin 定律以及宇宙加速膨胀能够很好地相吻合. 张量场正交分解定理与带标量势引力场方程这两个分属数学与物理两大不同学科的理论，作为一个共同体而被一起发现，充分说明了数学与物理有机融汇是一条正确而有效的科学研究道路.

作者与汪守宏教授合作近二十年，并已在流体动力学、大气与海洋物理学、化学与生物动力学、统计物理及平衡相变等重要领域做出许多将数学与物理真正融合的工作. 其主要代表作是一部关于相变动力学的专著：*Phase Transition Dynamics* (由 Springer 出版社出版). 在本书中，我们仍然有许多重要的合作.

本书主要涉及的是关于微分几何与相对论方面的内容. 它的特点正如书的标题那样，强调从数学的角度去考察和理解物理学，并反过来用自然现象来诠释数学概念. 书中全部内容都是按作者的理解方式写成，所有计算和推证都被重新演算了一遍，这种风格也体现在作者的其他专著之中. 本书始终试图让读者能体会到数学与物理的本质都是简单的这一事实，希望读者能学会从复杂的数学形式化表面看到本质. 只有做到这一点才具备独立发现和建立新理论的基本条件，也只有做到这一点才能真正欣赏数学与大自然之美.

本书除了许多用直观方式介绍的经典知识外，还有许多作者建立的新理论以及提出的新思想和新观念. 下面将简要地介绍这些有特点的内容和结果.

第 1 章主要内容是用物理观点介绍张量概念. 特别地，在 1.3 节中用直观的

方式介绍许多抽象数学概念的物理意义, 并用非常易懂的方式给出 Gauss 公式与 Stokes 公式的证明. 最后给出旋量 BEC 方程的转动不变性证明.

第 2 章给出 Riemann 几何的本质及其与物理的联系. 用直接揭示本质的方式给出 Frobenius 定理的证明, 使其很容易理解. 在这一章中, 作者引入球丛截面特征指标理论, 即令 M 是一个 n 维紧流形,

$$X:\ M \to S^n M \text{ 是一个截面},$$

$S^n M$ 是由 $TM \oplus R^1$ 生成的 n 维球丛, 则对 X 可建立特征指标

$$K = K(X, M), \quad K \text{ 是整数}, \tag{1}$$

使得指标 K 具有同伦不变性、流形次可加性等许多重要性质. 它的本质就是 X 将 M 映到 S^n 上覆盖数. 从而对带边流形上向量场 $v: M \to TM$ 有如下指标公式 (该公式在马天 (2011) 中被建立)

$$\sum_{p\in M} \mathrm{Ind}(v,p) = \chi(M) - \frac{1}{2}\chi(\partial M) + K(v, \partial M), \tag{2}$$

其中左端为奇点指标和, $\chi(M)$ 为 Euler 示性数, K 为 $v|_{\partial M}$ 的特征指标.

第 3 章简要地介绍了在马天 (2010) 中建立的流形共轭对称性理论, 并给出 Riemann 流形 (M, g_{ij}) 的度量 $\{g_{ij}\}$ 可对角化的充要条件是下面偏微分方程

$$\begin{cases} g_{ij}X_k^i \dfrac{\partial}{\partial x^s}(X_r^s X_l^j - X_l^s X_r^j) = 0, \\ g_{ij}X_k^i X_l^j = 0 \end{cases}$$

存在非零解 $(X_1, \cdots, X_n), X_k = (X_k^1, \cdots, X_k^n)$ 是向量场.

此外, 利用前面 (1) 的特征指标, 关于 $2n$ 维带边紧定向流形 M, 建立了 Gauss-Bonnet 公式如下

$$\int_M K_n \sqrt{g} dx = \chi(M) + K(X, \partial M) + \int_{\partial M} \Phi_X, \tag{3}$$

其中 K_n 为 Lipschitz-Killing 曲率, Φ_X 是由向量场 X 确定的陈省身微分形式, $K(X, \partial M)$ 为 X 特征指标. 公式 (2) 和 (3) 是姊妹式.

第 4 章介绍了弱导数本质, 并由此直接看出 Sobolev 嵌入定理及其临界嵌入指数的实质. 特别地, 发现并证明了 Riemann 流形上一般张量场的正交分解定理. 即对 M 上任意阶的张量场 T, 可正交分解为

$$T = \nabla\Psi + V + H, \tag{4}$$

其中 $\nabla\Psi$ 为梯度张量, V 是散度为零的张量, H 为调和张量, 即

$$\mathrm{div} V = 0, \quad \nabla H = 0, \quad \mathrm{div} H = 0.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

该定理非常重要, 从它可得到 Einstein 场方程的修正, 从而可统一地解释暗物质与暗能量现象.

第 5 章主要介绍狭义相对论及相对论电动力学和相对论量子力学.

第 6 章介绍广义相对论, 特别地, 由于暗物质与暗能量的发现, 传统的物质能量不再守恒, 在这个假设下应用正交分解 (4), 在不破坏广义相对论三条基本原理条件下, 可唯一地推导出引力场方程取如下形式

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} - D_iD_j\varphi, \tag{5}$$

其中 φ 为引入的标量势 (原方程没有这一项), 它被证明代表了物质不均匀分布产生的势. 由 (5) 可算出修正的 Newton 引力公式为

$$F = mMG\left[-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\delta}\left(2+\frac{\delta}{r}\right)\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\Phi r}{\delta}\right], \tag{6}$$

其中 $\delta = 2MG/c^2, \Phi = g^{ij}D_iD_j\varphi$ 是由 φ 产生的标量势能密度, 它是由物质不均匀分布生成的一种新能量形式, 它满足平均为零的守恒律:

$$\int_M \Phi\sqrt{g}dx = 0.$$

公式 (6) 中第一项是经典 Newton 引力, 第二项是标量势 φ 与物质耦合产生的作用力, 第三项是由标量势能密度 Φ 生成的作用力. 在公式 (6) 中 $F > 0$ 为斥力, $F < 0$ 为引力. 因此公式 (6) 中第二项与第三项组合效应代表了暗物质和暗能量产生的作用力. 此外公式 (6) 可进一步简化为

$$\begin{aligned} &F = mMG\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{k_0}{r} + k_1 r\right), \\ &k_0 = 4\times 10^{-18}\text{km}^{-1}, \quad k_1 = 10^{-57}\text{km}^{-3}. \end{aligned} \tag{7}$$

公式 (7) 表明质量为 M 的点源物质在近处 ($r < 10^{20}$km) 是吸引, 而在远处 ($r > 10^{20}$km) 是相斥. $-k_0r^{-1}$ 表现出暗物质特征, k_1r 是斥力, 表现出暗能量特性.

第 7 章主要介绍了现代天体物理的重要结果. 在这一章最后一节讨论了由修正方程 (5) 给出的暗物质与暗能量的统一理论. 推出暗物质与暗能量实质上是由物质不均匀分布产生的势能效应的结论, 并且算出与 Rubin 定律及宇宙加速膨胀相吻合的结果.

最后, 作者的学生对本书的校对做了大量工作, 在此表示感谢. 此外, 本书得到四川大学人才引进基金和国家自然科学基金 (1097148) 的资助, 对此表示感谢. 作者对科学出版社的支持也表示感谢.

马　天

2012 年 9 月 6 日

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　张量分析及其物理意义

1.1　概念与背景

1.1.1　动机与背景介绍

当我们接触到一个新的概念时, 总是需要知道为什么要引入这个概念以及它在科学中起到什么作用. 这里用一个简单的例子来阐明这样的问题.

Newton 第二定律告诉我们, 一个物体所受的力 $\vec{F}$ 等于该物体的质量 m 与加速度 $\vec{a}$ 的乘积, 数学表达为

$$m\vec{a}=\vec{F}. \tag{1.1.1}$$

当选定一个正交坐标系 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 时, Newton 第二定律可表述为

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_i}{dt^2}=F_i, \quad i=1,2,3, \\ \vec{F}=(F_1, F_2, F_3), \end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中 F_i 为 $\vec{F}$ 在 x 坐标系中 x_i 轴方向的分量.

理性告诉我们, 一个普适性的定律应该与观察它的实验地点及方向无关. 也即当选定另一个正交坐标系 $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$ 时, (1.1.1) 的数学表达式不应发生变化, 而仍写成下面形式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\tilde{x}_i}{dt^2}=\tilde{F}_i, \quad i=1,2,3, \\ \vec{F}=(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3), \end{cases} \tag{1.1.3}$$

其中 $\tilde{F}_i$ 是 $\vec{F}$ 在 $\tilde{x}$ 坐标系中 $\tilde{x}_i$ 轴方向的分量.

这就是说, 描述自然现象的普遍定律, 其数学表达形式在某种坐标变换下应该是不变的. 换句话讲, Newton 第二定律如果是普遍成立的, 则在如下坐标变换下

$$\begin{cases} \tilde{x}_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{3} e_{ij}x_j+b_i, \\ A=(e_{ij}) \text{ 为正交矩阵}, \quad \vec{b}=(b_1, b_2, b_3) \text{ 为常值向量}, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

方程 (1.1.2) 只能变成 (1.1.3) 的形式, 而不会变成下面形式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\tilde{x}_i}{dt^2} = \tilde{F}_i + f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ \vec{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3), \quad f = (f_1, f_2, f_3) \neq 0. \end{cases}$$

在物理学中, 像方程 (1.1.2) 的不变性这类问题称为定律的协变性.

要遵守定律协变性, (1.1.1) 中物理量 $\vec{a}$ 和 $\vec{F}$ 在 (1.1.4) 变换下必须满足一定的变换规则. 下面来看它们需要遵守什么样的规则才能保证 (1.1.2) 的不变性. 对 (1.1.4) 两边关于 t 求二阶导数得

$$\tilde{x}_i'' = \sum_{j=1}^{3} e_{ij} x_j'', \tag{1.1.5}$$

由于加速度 $\vec{a} = x''$, $\vec{\tilde{a}} = \tilde{x}''$. 因此 (1.1.5) 给出加速度变换规则

$$\tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{3} e_{ij} a_j. \tag{1.1.6}$$

关于 $\vec{F}$ 的变换规则可从加速度的变换规则及 Newton 定律的协变性导出. 从 (1.1.6) 可得

$$\begin{aligned} m\tilde{a}_i &= m\sum_{j=1}^{3} e_{ij} a_j \\ &= \sum_{j=1}^{3} e_{ij}\left(m\frac{d^2 x_j}{dt^2}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{3} e_{ij} F_j \quad (\text{由 } (1.1.2)). \end{aligned}$$

再由协变性, 即 (1.1.3) 式:

$$m\tilde{a}_i = \tilde{F}_i,$$

这两个式子立刻推出 $\vec{F}$ 的变换规则为

$$\tilde{F}_i = \sum_{j=1}^{3} e_{ij} F_j. \tag{1.1.7}$$

因此在 (1.1.4) 的坐标变换下, 若加速度和外力分别按 (1.1.6) 及 (1.1.7) 进行变换时, 则 Newton 第二定律的协变性可以得到保证. 满足上述 (1.1.6) 和 (1.1.7) 变换规则的量称为一阶张量.

上述例子表明, 物理学中具有普遍意义的定律, 其数学形式必须用张量来表达. 更确切地, 张量的主要作用在于下面物理学的一个基本原理.

物理基本原理 1.1 宇宙中普遍成立的物理定律具有下面基本的特性:

(1) 在自然界中, 物理系统的相互作用与运动都要遵守某些规则和定律, 这些规则和定律都可用微分方程来表达, 即

$$\text{物理定律} = \text{微分方程}. \tag{1.1.8}$$

(2) 普遍性定律的数学表达 (即微分方程) 必须采用张量的形式, 只有这样才能保证定律的协变性.

在物理学中, 这个基本原理 1.1 具有非常重要的意义. 它能帮助我们在数学与物理之间建立有机的联系, 并且使我们可以很好地理解许多现象的物理本质. 此外, 现代物理的许多重要理论, 包括狭义和广义相对论以及量子场论的相互作用场方程, 都是以这个原理为基础建立的.

注 1.2 在量子场论中, 所有描述 Fermi 子 (自旋为分数的粒子) 的波函数都是旋量. 但是当微分算子作用在这些波函数上时, 作为场方程, 它们仍以张量的形式出现.

1.1.2 Descartes 张量

这一小节将给出一类特殊的称为 Descartes 张量的严格定义. 实际上, 张量有许多类型, 它们分别对应于不同的坐标变换群, 即每一种变换群决定了一种张量类型. 所谓 Descartes 张量就是由单位正交变换确定的张量.

令 $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 R^n 的一个正交坐标系, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 x 坐标系的规范正交基. 考虑下面正交变换

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \quad \left(\text{等价于 } \tilde{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

传统习惯上人们总是用相同下标的乘积表示关于该下标求和, 即将上述变换简写成下面形式

$$\tilde{e}_i = a_{ij} e_j \quad (\text{或等价地 } \tilde{x} = a_{ij} x), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.1.9}$$

其中系数矩阵

$$A = (a_{ij}) \text{ 是 } n \times n \text{ 正交矩阵, 并且 } \det A = 1. \tag{1.1.10}$$

我们知道 (1.1.9) 逆变换为

$$e_i = a_{ji} \tilde{e}_j \quad (\text{或 } x_i = a_{ji} \tilde{x}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.1.11}$$

定义 1.3 设对应于 R^n 中每个正交坐标系 x 存在一组具有 n^k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 个实数分量的量, 记为

$$T = (T_{j_1\cdots j_k}), \quad 1 \leqslant j_1, \cdots, j_k \leqslant n.$$

这个量 T 称为 n 维 k 阶张量, 若在 (1.1.9) 正交变换下 T 的分量按如下规则进行变换

$$\tilde{T}_{j_1\cdots j_k} = a_{j_1 i_1} \cdots a_{j_k i_k} T_{i_1\cdots i_k}, \tag{1.1.12}$$

其中 $\tilde{T}_{j_1\cdots j_k}$ 是 T 在 $\tilde{x}$ 坐标系中的分量表达.

这里再次强调, 在 (1.1.12) 中相同下标表示关于该下标进行求和运算, 即完整的表达应该是

$$\tilde{T}_{j_1\cdots j_k} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} a_{j_1 i_1} \cdots a_{j_k i_k} T_{i_1\cdots i_k}.$$

以后不再说明.

容易看出, $k=0$ 阶张量就是一个标量, $k=1$ 阶张量就是 R^n 中一个向量. 事实上, R^n 中一个向量 $\vec{r} = r_i e_i$ 在 (1.1.9) 变换下可以得到下面关系式

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r_i e_i = r_i a_{ji} \tilde{e}_j \quad (\text{由 } (1.1.11)) \\ &= (a_{ji} r_i)\tilde{e}_j = \tilde{r}_j \tilde{e}_j.\end{aligned}$$

从这得到新旧坐标系 $\tilde{x}$ 与 x 中 $\vec{r}$ 系数的关系式

$$\tilde{r}_j = a_{ji} r_i,$$

这便是 $k=1$ 的变换关系 (1.1.12).

如果将二阶张量排成矩阵形式

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix},$$

则不难看出, (1.1.12) 的变换可写成

$$(\tilde{T}_{ij}) = A(T_{ij})A^{\mathrm{T}}, \tag{1.1.13}$$

其中 A^{T} 为 A 的转置. 此外, 从一阶张量可构造出任意 k 阶张量, 其构造如下. 令 $A = (A_1, \cdots, A_n)$ 是一个 $k=1$ 阶张量, 则容易验证下面的量

$$T = \{A_{i_1} \cdots A_{i_k}\}, \quad 1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant n$$

构成一个 k 阶张量, 这里 $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ 是 k 个实数分量的乘积. 此时 T 称为 A 的 k 次张量积, 记为

$$T = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{k个}.$$

在后面 1.2.1 小节中将再介绍这种运算.

注 1.4 在物理学中, 保持定律协变性的张量并不是由定义 1.3 给出的 Descartes 张量. 实际上, 对经典 Newton 力学保持协变性的是 Galileo 张量, 该张量是由下面变换群定义的:

$$\tilde{x} = Ax + \vec{v}\, t + \vec{r}_0, \quad \tilde{t} = t + t_0, \tag{1.1.14}$$

其中 A 如 (1.1.10) 的三阶正交矩阵, $\vec{v}$ 是常值速度, t 是时间参数. 而在相对论中保持协变性的是 Lorentz 张量, 其对应的变换群是 Lorentz 群, 后面将对此做详细介绍.

注 1.5 狭义相对论与 Newton 力学之间的根本差异是, 传统观念认为所有力学定律是在 (1.1.14) 的 Galileo 变换下不变的, 而相对论则认为宇宙中所有定律是在 Lorentz 变换下是不变的. 这关键性的观念转换是 Einstein 在 1905 年做出的. 一旦观念转换后, 剩下来狭义相对论关于力学系统的所有结论都可从 Lorentz 变换中推出, 其推导与计算都是简单而初等的. 当时的情况是, 1899 年 H. A. Lorentz 发现了以他名字命名的变换, 并且 Maxwell 方程是在该变换下不变的. 人们认为不同的物理系统遵守不同的协变性. 然而 Einstein 却认为宇宙只选择一种协变性: 或者力学系统服从 Lorentz 不变性, 或者电磁系统遵从 Galileo 不变性. 但实验事实证明电磁系统遵守 Lorentz 不变性. 于是便产生了 Einstein 的狭义相对论.

上面的科学发展史告诉我们: 科学上每一步的重要发展都是从最基本的现象和问题出发, 在简单和平凡的事例中发现不平凡和普适性规律. 特别是, 每一个科学上大的变革都是由于在最基本问题上发生观念性变化所造成的.

1.1.3 k 重线性函数方式的张量等价定义

在数学中, 张量可以用另一种等价方式来定义, 这就是从线性泛函的角度去理解张量. 这种方式在微分几何与理论物理的发展中被证明是有价值的. 下面我们给出这种定义.

令 $F: R^n \to R^1$ 是 n 维欧氏空间上的一个线性映射, 通常也称作线性函数, 即对任意 $\alpha, \beta \in R^1$ 及 $x, y \in R^n$ 有

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y).$$

由泛函分析的 Riesz 表示定理, 唯一地存在一个向量 $f = (f_1, \cdots, f_n) \in R^n$, 使得 F 可表示为

$$F(x) = f \cdot x = f_1 x_1 + \cdots + f_n x_n.$$

实际上 f 的分量 $f_i = F(e_i)$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 x 坐标系的基底. 于是 R^n 上的线性函数 F 与 R^n 中的向量一一对应. 由于向量是一阶张量, 因此可以将 F 视为一阶张量.

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com