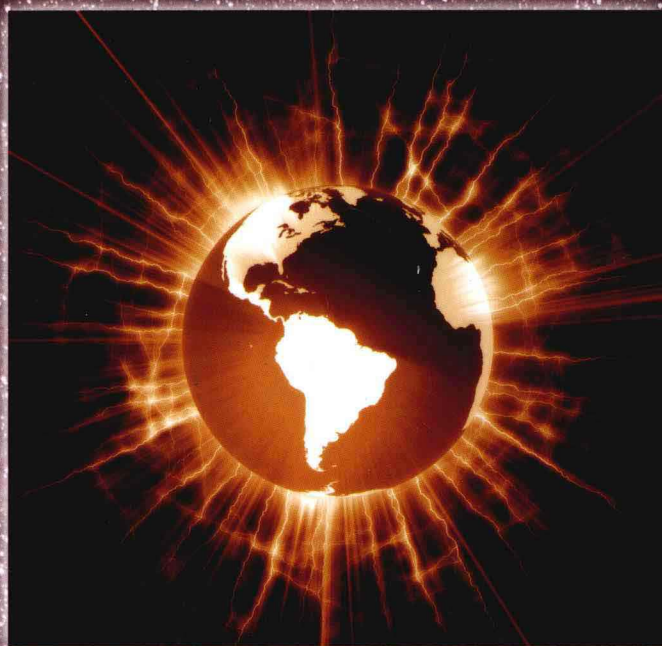




余守宪

**物理教学研究与科学研究
论文选**



北京交通大学出版社
<http://press.bjtu.edu.cn>

余守宪物理教学研究与 科学研究论文选

余守宪 著



北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书收录了余守宪教授关于物理教学的教学研究论文和关于光波导理论的科学研究论文共 54 篇,其中教学研究论文 28 篇,科学研究论文 26 篇。所收录的教学研究论文是从余教授从教 60 年来所发表的 100 余篇物理教学研究论文中精选出来的,这些论文具有工科物理的显著特色,涵盖了力、热、电、光、原子各个领域,视角广阔,采用的方法简洁而实用,物理图像鲜明。所收录的科学研究论文是从余教授 1984 年以来从事光波导理论研究所发表的 100 余篇论文中精选出来的,这些论文集中体现了他在光波导研究领域所取得的成果,也体现了北京交通大学理学院光波导研究自 1984 年始至今的发展过程。

本书可供普通高校具有工科物理背景的本科生、研究生及物理教师阅读,对普通高校物理系的物理教学研究和教学改革亦希望能起到借鉴作用。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

余守宪物理教学研究与科学研究论文选 / 余守宪著. — 北京: 北京交通大学出版社, 2012. 11

ISBN 978 - 7 - 5121 - 1249 - 0

I. ① 余… II. ① 余… III. ① 物理教学 - 教学研究 - 文集 IV. ① O4 - 53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 263934 号

策划编辑: 王晓春

责任编辑: 王晓春 特邀编辑: 王 莹

出版发行: 北京交通大学出版社 电话: 010 - 51686414

地 址: 北京市海淀区高粱桥斜街 44 号 邮编: 100044

印 刷 者: 北京艺堂印刷有限公司印刷

经 销: 全国新华书店

开 本: 185 × 260 印张: 30 字数: 754 千字

版 次: 2012 年 11 月第 1 版 2012 年 11 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978 - 7 - 5121 - 1249 - 0/O · 114

印 数: 1 ~ 400 册 定价: 198.00 元

本书如有质量问题, 请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评, 我们表示欢迎和感谢。

投诉电话: 010 - 51686043, 51686008; 传真: 010 - 62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn。

谨以此书纪念著名物理学家
余守宪先生

序

余守宪先生 1946 年毕业于西南联大，我 1946 年考入北京大学，可以说，余先生是高我四班的老学长。倘若他毕业后即留北大任教，那就是我的老师了。然而，他毕业后便赴美留学，过去我们一直无缘谋面。我结识余守宪先生是在 20 多年前，当时我主编《大学物理》杂志，余先生所投的几篇精彩的华章吸引了我。后来我们有机会多次坐在一起，讨论和研究一些与物理教学有关的问题。在我的印象里，余先生是一位学术水平高而又热心物理教学的长者，在我国科研与教学长期被分割的情况下是难能可贵的。

本人过去这些年在谈到普通物理课程现代化问题时，多次提到我们要在用普物的风格介绍物理前沿课题上下工夫。个中人都晓得，这是一个非常艰巨的任务，往往吃力不讨好。在国际上，物理大师费曼（Richard Feynman）和外斯科夫（Victor Weisskopf）是这方面的楷模。费曼曾说过，如果你不能把一个物理思想解释给外行听，你自己对此就没有真明白。他在他那部给大学一二年级学生讲的著名《物理讲义》中，在许多地方用比较浅显的讲法去阐明深奥的道理。在一段时间里，外斯科夫撰写了一系列文章，试图用简单的道理解释一些新的物理思想和物理概念。可惜的是做这种事情的大科学家并不太多。在国内有水平并愿意做这方面努力的人也不算多，余守宪先生是其中的一个。从这本文集的目录中可以看到，“平面电磁波基本性质的初等推导”，“氢原子定态薛定谔方程的简单解法”，“平面静电场拉普拉斯方程的简捷解及其应用”，“氢原子问题的试探解法”，“孤立子及其相互作用的初等分析”，“Helmholtz 线圈，直螺线管及圆电流磁场均匀性分析的简单公式”等，都反映了余先生在这方面努力的成果。物理学惯用理想化模型，简单而又抓住要害，在普通物理课程中多半只讲理想化模型。然而，工科学生将来是要面对实际问题的，而实际问题要复杂得多。余先生长期在工科院校任教，认为对于工科学生，应在讲理想化模型之外，多少介绍一点处理实际问题的脉络。本文集中的“范德瓦耳斯气体与焦耳-汤姆孙效应”，“考虑热阻影响后的卡诺循环”，都属于这方面文章。文集中还有许多与教学有关的好文章，我就不在此一一评论了。最后，余守宪先生是波导光学专家，文集中收录了余先生这方面的科学研究论文 26 篇。本人在这方面不大在行，不可置喙。

北京大学 赵凯华
2010 年 9 月

目 录

教学研究论文部分

范德瓦耳斯气体与焦耳 - 汤姆孙效应	余守宪 (1)
平面电磁波基本性质的初等推导	余守宪 (9)
氢原子定态薛定谔方程的简单解法	余守宪 苏惠惠 (15)
大学物理中的近似计算	余守宪 王云英 (21)
考虑热阻影响后的卡诺循环	余守宪 廖耀发 (28)
孤立子及其相互作用的初等分析	余守宪 (34)
普通物理课程中将电磁势作为电磁场基本物理量的改革方案	余守宪 廖耀发 (50)
弹簧耦合摆小振动的简正模与简正频率	余守宪 (58)
平面静电场拉普拉斯方程的简捷解及其应用	余守宪 廖耀发 (62)
氢原子问题的试探解法	余守宪 (67)
Helmholtz 线圈、直螺线管及圆电流磁场均匀性分析的简单公式	余守宪 张思炯 (75)
x^3 振荡器的周期运动	余守宪 (80)
构造阶梯算符的定理及其应用	余守宪 王肇庆 苏惠惠 (83)
行星的视运动与圆外旋轮线	余守宪 (89)
一种获得均匀磁场的新方法 ——改进型的 Helmholtz 线圈	余守宪 王 健 (97)
浅释同步辐射的特点及其应用	余守宪 王照明 (103)
势阱中粒子能级与波函数微扰计算的代数递推公式	余守宪 吴 柳 王 健 张思炯 (111)
物理系统的稳定性与双稳现象 (I)	余守宪 (123)
物理系统的稳定性与双稳现象 (II)	余守宪 (130)
从立方抛物线谈起 (1) ——余弦型振动, 椭圆余弦型振动与双曲线型非周期运动	余守宪 (142)
从立方抛物线谈起 (2) ——余弦型行波, 椭圆余弦型行波与孤立波	余守宪 (160)
非线性振动、非线性波与 Jacobi 椭圆函数	余守宪 (176)
立体角概念在电磁学中的应用	余守宪 (196)
立体角概念在电磁学中的应用 (续完)	余守宪 (207)
一种简捷求解定态薛定谔方程的方法: 科尔 - 霍普夫变换法	余守宪 唐 莹 (218)
秋千——力学模型, 初等分析与参数共振微扰解析解	余守宪 (236)

黄金数与 Fibonacci 数列 余守宪 胡 颀 (249)

斐波那契序列与准晶态 余守宪 胡 颀 (262)

科学研究论文部分

条形介质波导导模的近似分析 乔 力 余守宪 (268)

Propagation Characteristics of Elliptical Dielectric Waveguides:
Ray-Optic Approach Jingyi WANG Shouxian SHE (275)

Analysis of Rectangular-core Waveguide Structures and
Directional Couplers by an Iterated Moment Method Shouxian SHE (282)

Variational Analysis of Dual-Channel Directional
Couplers Shouxian SHE, Li QIAO and Jingyi WANG (294)

Analysis of Propagation Characteristics of Diffused Channel
Waveguides: Weighted Residual Method Li QIAO and Shouxian SHE (300)

Analysis of Three Channel Waveguide Directional Couplers by a
Variational Method and Weighted Residual Method Shouxian SHE and Li QIAO (304)

Iterated-moment Method for the Analysis of Optical
Waveguides of Arbitrary Cross Section Shouxian SHE (311)

A Perturbation Analysis for Modes in Graded Waveguides by
Hypervirial and Hellmann-Feynman Theorems Liu WU and Shouxian SHE (323)

梯形截面脊形介质波导导模的分析 余守宪 张金维 (332)

阶跃型椭圆光纤的色散特性与几何双折射 余守宪 (336)

Metal-clad Multilayer Dielectric Waveguide: Accurate Perturbation Analysis
..... Shouxian SHE (341)

Propagation Loss in Metal-clad Waveguides and Weakly
Absorptive Waveguides by a Perturbation Method Shouxian SHE (355)

Metal-clad Optical Polarizers: Perturbation Analysis Shouxian SHE (359)

任意折射率分布平板波导与圆光纤的差分法分析 余守宪 (363)

克尔型非线性薄膜波导的 TE 模 余守宪 (369)

Accurate Perturbation Analysis of Metal-clad and Absorptive Multilayer Dielectric
Waveguides in Near Cutoff Shouxian SHE (376)

非线性包层多量子阱波导的 TE 波 余守宪 (384)

平板波导的非线性耦合 余守宪 (391)

改进 WKB 方法与相移值的修正 余守宪 (397)

非线性薄膜波导 TE 模色散特性的多层分割法计算 余守宪 (405)

Analysis of Nonlinear TE Waves in a Periodic Refractive Index Waveguide with
Nonlinear Cladding Shouxian SHE, Sijiong ZHANG (413)

Amplitude-identical Core Field of TE₀ Modes in Three-layer Slab Waveguides with
Nonlinear Claddings Liu WU, Shouxian SHE, Jian WANG, Ling FAN (426)

改进的非线性薄膜波导导模的无量纲表示	余守宪, 王照明, 吴 柳, 林铁生 (434)
Simple Algebraic Recursion Formulas for Calculation of Propagation Characteristics of Graded-index Waveguides	Shouxian SHE, Liu WU, Jian WANG (442)
用 Riccati 变换求解同调谐振子	余守宪 (455)
用科尔 - 霍普夫变换法求非均匀光波导导模本征方程的严格解	余守宪 (460)

教学研究论文部分

范德瓦耳斯气体与焦耳 - 汤姆孙效应*

余守宪

(北京铁道学院物理教研组)

大体说来, 仅当密度很小时, 气体才近似地遵守理想气体定律 (主要有两个, 即理想气体状态方程和焦耳定律, 它们是彼此独立的)。从微观上看, 当气体密度不很小时, 理想气体定律发生偏差的原因可归结为分子间有相互作用力 (质心间距离较近时相吸, 距离甚近时相斥)。因此, 真实气体性质的研究, 不仅有重大实际意义, 而且可以从理论上揭示分子力对气体性质的影响, 加深对分子力的认识。

在提出著名的范德瓦耳斯方程 (以下简称范氏方程) 时, 范德瓦耳斯实质上提出了一个比较简单的真实气体的分子模型 (把气体分子看作相互吸引的弹性球, 以下简称范氏气体的分子模型), 从而把理想气体定律的偏差归结为分子间引力和分子占有体积 (它反映了分子质心间距离很小时斥力急剧增大) 这两个因素所发生的影响。这样, 概括了分子间相互作用力的最一般的特性, 人们就能够在一定程度上定性地、半定量地解释真实气体的许多重要实验事实 (甚至气液相变和液体的一些实验事实), 使我们对气体性质的理解前进了一大步。

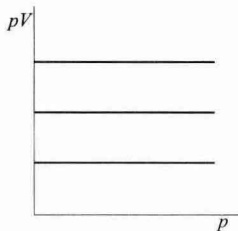
本文的目的是, 采取初等方法, 利用范氏气体的分子模型, 结合普通物理教学中遇到的一些问题, 力求浅显地、定性地说明: 气体状态参量变化的规律如何偏离理想气体状态方程; 焦耳 - 汤姆孙效应 (以下简称焦 - 汤效应) 如何说明理想气体定律的偏差以及发生正 (降温) 负 (升温) 焦 - 汤效应的原因和条件, 以供物理教学者参考。

范氏方程与理想气体状态方程的偏差

一克分子理想气体的状态方程为 $pV = RT$ 。以 pV 为纵轴, p 为横轴, 作出理想气体的 $pV - p$ 等温线, 则得与 p 轴平行的直线族, 如图 1 所示。实验表明, 气体的 $pV - p$ 等温线族 (图 3, 4, 5) 并非平行直线族。下面用范氏方程来分析理想气体状态方程的偏差情形, 并与实验事实比较。

一克分子气体的范氏方程为

* <http://www.cnki.net>

图1 理想气体的 $pV-p$ 等温线

亦即

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT \quad (1)$$

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \quad (2)$$

如所周知,对理想气体状态方程所引进的两个修正项 a/V^2 及 b 分别反映分子间引力和分子占有体积(相互靠近时分子间呈现强烈的斥力)这两个因素。 a 值反映气体分子间引力的强度; b 值可理解为最紧密压缩下($p \rightarrow \infty$)的克分子体积,按理论计算,它近似地等于一克分子气体中分子体积总和的4倍。 $V-b$ 可理解为气体的可压缩体积或称自由体积(本文中 V 代表克分子体积)。

方程(2)清楚地表明,斥力(分子占有体积)因素与引力因素起彼此对立的作用。 $p' = \frac{RT}{V-b}$ 这一项可称动压强,当温度与体积相同时,它比理想气体的压强 $\frac{RT}{V}$ 增大到 $\frac{V}{V-b}$ 倍。它说明,由于分子相遇时相互排斥,分子的活动范围(自由体积)缩小,因而对器壁的碰撞更加频繁,使压强值增大。 $p_i = a/V^2$ 可称内压强,它表明分子间引力削弱了分子碰撞器壁时给予器壁的冲力,从而促使压强值降低。显然,当斥力影响占优势时 $pV > RT$, 反之则 $pV < RT$ 。

为便于分析理想气体状态方程的偏差情况(这也为后面讨论焦-汤效应作准备),可把方程(2)改写为

$$pV - RT = \frac{bRT}{V-b} - \frac{a}{V} \quad (3)$$

可见斥力影响与温度及克分子体积(或压强)有关,而引力影响仅与克分子体积有关。

立刻看出,当气体密度不太大时(此时上式右边两个分母可看作近似相等),如果温度等于 $T_B = a/(bR)$ (T_B 称为气体的玻意耳温度),则(3)式化为 $pV - RT \approx 0$, 即气体可在较大压强范围内近似地遵守玻意耳定律。显然,这相应于两种影响(斥力和引力)势均力敌,相互抵消(就理想气体状态方程的修正而言)的情形。各种气体的 T_B 值取决于 a 与 b 之比。各种气体的 b 值一般相差不多(分子体积差别不大),易液化的气体(二氧化碳等),分子引力较强, a 值较大,故 T_B 值较高,很难液化的气体(氢和氦) a 值很小, T_B 值比室温低。

表1 一些气体的 a 值和 b 值

气 体	氢	氢	氮	氧	二氧化碳	水蒸汽
$a \frac{[\text{大气压}][\text{升}]^2}{[\text{克分子}]^2}$	0.034	0.245	1.35	1.36	3.96	5.47
$b \frac{[\text{升}]}{[\text{克分子}]}$	0.024	0.027	0.039	0.033	0.043	0.030

由(3)式可推知,当 $T > T_B$ 时[此时 $bRT > a$, (3)式右边取正值,且随压强的增大即克分子体积 V 的减小而不断增大],必有 $pV > RT$, 且 $pV-p$ 等温线(如图2)是单调上升

的曲线。因此，当温度高于玻意耳温度时，斥力影响占优势。在此情况下，有 $\frac{\partial(pV)}{\partial p} > 0$ ^①。反之，当 $T < T_B$ 时，只要气体密度不太大 [此时 (3) 式右边取负值，且随压强的增大而减小]，必有 $pV < RT$ ，且 $\frac{\partial(pV)}{\partial p} < 0$ 。故在玻意耳温度以下，压强不太大时，引力影响占优势。但当压强继续增大 (V 减小) 时，(3) 式右边第一项 (反映斥力影响) 终将赶上以至超过第二项 (反映引力影响) 的绝对值，这是说，即使温度低于玻意耳温度，只要压强够高，那么斥力影响也终将跃居优势地位。因此，当 $T < T_B$ 时， $pV - p$ 等温线是先下降 ($\frac{\partial(pV)}{\partial p} < 0$) 后上升 ($\frac{\partial(pV)}{\partial p} > 0$)，中间经过一个最低点，而 $(pV - RT)$ 值则先负后正 (图 2)。相应于 $T = T_B$ 的 $pV - p$ 等温线在 $p = 0$ 处的切线是水平的，它是上面两种曲线形状的转变情形 (图 2)。

气体的 $pV - p$ 等温线形状与上述的简单分析大体相符 (图 3, 4, 5)^②。多数气体 (包括氮、氧等较难液化者在内) 的 T_B 值高于室温，故室温附近呈现上述的 $T < T_B$ 情形 (图 3)。较易液化的气体 (如二氧化碳，氨气等) T_B 值更高，在室温附近， $pV - p$ 等温线显著低凹 (图 5)，在常压下玻意耳定律的偏差已较显著。值得指出，很难液化的氢气和氦气 (分子引力弱) 玻意耳温度很低 (分别为 -170°C 及 -258°C)，故在室温下 $pV - p$ 等温线是单调上升的，其他气体则只有在较高温度下才显示出这种分子斥力影响占优势的情况 (图 4, 5)。

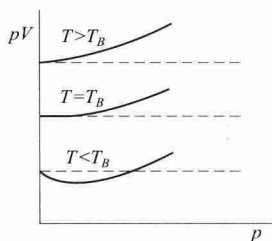
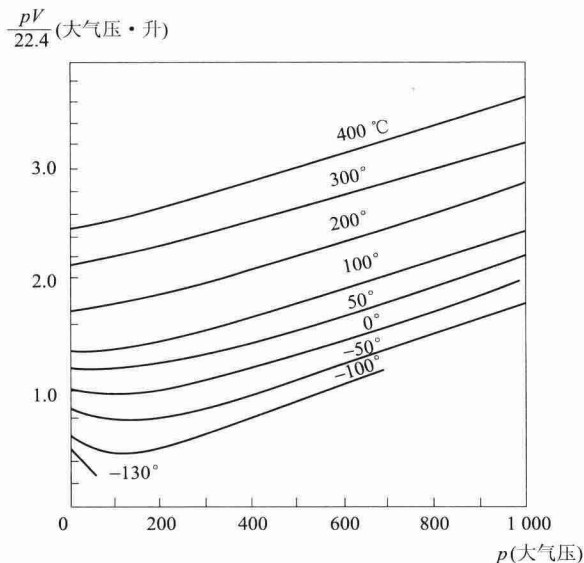
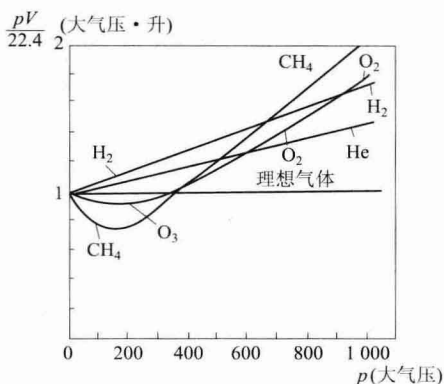
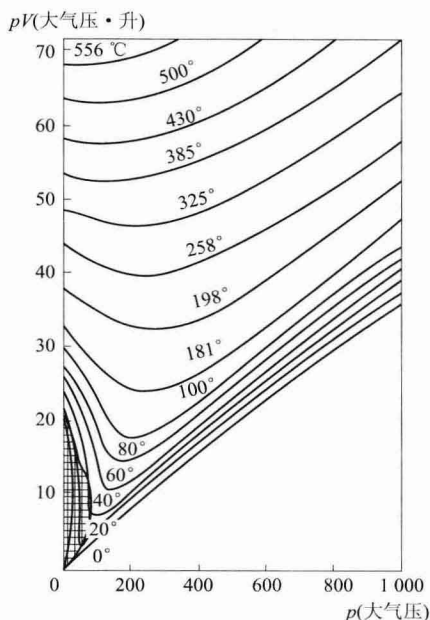


图2 气体的玻意耳温度

图3 二氧化碳的 $pV - p$ 等温线族

① 我们把 $\left[\frac{\partial(pV)}{\partial p}\right]_T$ 简写作 $\frac{\partial(pV)}{\partial p}$ ，把 $\left[\frac{\partial(pV)}{\partial T}\right]_p$ 简写作 $\frac{\partial(pV)}{\partial T}$ ，以下同。

② 各图引自华·阿·基列耶夫·物理化学教程：上册，中译本。

图4 在高压下几种气体的 $pV-p$ 等温线 ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$)图5 在高压下 $pV-p$ 等温线族

范氏气体的内能与焦耳定律的偏差

按照范氏气体的分子模型，可对气体的内能近似处理如下。把内能 E 看作由两部分组成：一部分（写作 E_K ）只与温度有关，且即等于理想气体的内能，它相应于气体分子热运动（包括分子内部的热运动）能量的总和；另一部分是由分子间相互作用力确定的势能（写作 E_p ），它只与体积有关（因分子间平均距离只与体积有关）。即设： $E = E_K(T) + E_p(V)$ ，这里 $E_p(V)$ 是作为对焦耳定律 $[E = E_K(T)]$ 的修正而增添的项。

按照范氏气体分子模型，我们把分子看作是相互吸引的弹性球，当气体体积增大时，分子间的平均距离增大，因而分子间引力的位能增大。因此， $E_p(V)$ 应随体积 V 的增大而增大，即 $dE_p/dV > 0$ 。取无限稀薄时 $E_p = 0$ ，即推知气体的内能应小于同温度下理想气体的内能。

这里有一个问题：是否会出现气体膨胀时因分子间斥力做功而使 $E_p(V)$ 减小的情形？（有些教材在讨论焦-汤效应时有此说法。）笔者认为，范氏气体分子模型与实验符合尚好，鉴于分子斥力的力程比引力的力程小得多，即使在一般高压下，似乎也很难出现斥力的正功胜过引力的负功的情形。在气体膨胀时， $E_p(V)$ 应该总是增大的。 $E_p(V)$ 是分子间的相互作用势能，应包括引力势能与斥力势能两项，上面仅谈到引力，初看似乎不够圆满。可以指出，我们这里说的是当两分子质心间距离很近时呈现净斥力，而在距离较远时呈现净吸引力，而不是形式地把分子力看作是“分子引力”与“分子斥力”两者之和。既然气体中分子的平均距离比起分子斥力的力程大得多（斥力作用仅当分子碰撞时才呈现出来），那么气体在膨胀时应该是反抗分子间的净吸引力做功，并且这里说的“净吸引力”其实与一般把分子力看作分子引力与分子斥力之和时所指的“分子引力”相差甚微。这样，我们就可以

把 $E_p(V)$ 看作是分子引力的势能。还可指出, 这里的情形和前面分析理想气体状态方程偏差的情形是有区别的。在讨论气体的压强时, 分子斥力的存在表现为分子相遇时相互推开, 使分子活动范围缩小, 因而对器壁碰撞变得更频繁, 故斥力起着使压强增大的作用。而在这里, 当讨论势能 E_p 随体积的变化时, 仅当分子相互碰撞时才起作用的斥力因素是可以忽略的。

采用范氏气体的分子模型, 可以用粗浅的考虑来求得 $E_p(V)$ 的具体形式。当气体膨胀时, 我们可以认为其分子引力势能的增量即等于反抗 (由分子引力作用而产生的) 内压强 p_i 所作之功, 即 $dE_p = p_i dV = \frac{a}{V^2} dV$ 。这种粗浅的考虑虽然不够严格, 但所得结果和用严格的热力学方法所导出的结果是一致的, 它的好处是比较直观^①。将 $dE_p = \frac{a}{V^2} dV$ 两边积分, 取当 $V = \infty$ 时 $E_p = 0$, 即得 $E_p = -\frac{a}{V}$ 。

为数学简便计, 我们设理想气体的克分子定容热容量 C_v 与温度无关, 写作 $E_K = C_v \cdot T$ (这一简化实质上并不影响后面的讨论)。于是, 一克分子范氏气体的内能公式为

$$E = C_v \cdot T - \frac{a}{V} \quad (4)$$

右边第二项给出焦耳定律的偏差。正如前述, 上式指明, 范氏气体的内能小于同温度理想气体的内能, 气体分子相互作用的势能 $E_p = -\frac{a}{V}$ 的代数值随体积的增大而增大。

焦-汤效应与理想气体定律的偏差正、负焦-汤效应发生的条件

正确理解焦-汤效应的两个主要关键是:

(1) 能量转换关系

如所熟知, 在焦-汤实验中, 当一克分子气体通过多孔塞膨胀由状态 $(p_1 V_1)$ 变到 $(p_2 V_2)$ 时, 外界对这部分气体所作的净功 $(p_1 V_1 - p_2 V_2)$ 应等于它的内能的增量 $E_2 - E_1$:

$$E_2 - E_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

或

$$E_1 + p_1 V_1 = E_2 + p_2 V_2 \quad (5)$$

即膨胀前后气体的焓 $H = E + pV$ 相等。

(2) 焦-汤效应表明气体不遵守焦耳定律和理想气体状态方程

事实上, 如果气体是理想气体, 则由焦耳定律及状态方程 $pV = RT$ 可见, 焓 H 只决定于温度 T 而与压强无关, 于是由 (5) 式立刻得知, 膨胀前后温度应相等, 即它不显示焦-汤效应。可见焦-汤效应是两个理想气体定律的偏差的综合表现。

^① 由热力学公式: $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, 利用一克分子范氏气体状态方程: $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$, 即可证出 $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}$ 。按前面所采取的简化处理, $E(T, V) = E_K(T) + E_p(V)$, 可见这结果亦即 $dE_p = \frac{a}{V^2} dV = p_i dV$, 与粗浅考虑所得结果相同。

下面从能量转换关系分析发生正、负效应的条件。

将气体内能公式 $E = C_v T + E_p$ 代入 (5) 式, 得

$$C_v (T_1 - T_2) = (E_{p_2} - E_{p_1}) - (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

即气体分子热运动能量的减小 $C_v (T_1 - T_2)$ 等于气体分子引力势能的增加 $(E_{p_2} - E_{p_1})$ 减去外界对气体所作净功 $(p_1 V_1 - p_2 V_2)$, 引力势能的增加起降温作用, 外净功起升温作用。

发生正效应的条件:

$$(E_{p_2} - E_{p_1}) > (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

发生负效应的条件:

$$(p_1 V_1 - p_2 V_2) > (E_{p_2} - E_{p_1})$$

显然, 单纯从分子力做功来解释正、负焦-汤效应 (例如说: “分子引力作负功使气体变冷”, “分子斥力作正功使气体变热”) 是不正确的, 不能忽略外净功的作用。

下面从理想气体定律的偏差来进一步分析。

为分析方便, 考虑微分焦-汤效应, 即设压强差 $p_1 - p_2$ 是微小的 (实验中的效应可看作微分效应的累积), 把能量转换关系式写成微分式:

$$-C_v dT = dE_p + d(pV)$$

或

$$-\left[C_v + \frac{\partial(pV)}{\partial T}\right]dT = dE_p + \frac{\partial(pV)}{\partial p}dp. \quad (6)$$

左边括弧内 $\frac{\partial(pV)}{\partial T} > 0$, 故降温 ($dT < 0$) 或升温 ($dT > 0$) 取决于右边两项之和是正或是负。膨胀时 $dE_p > 0$, 引力势能的增加起降温作用。此外, 还要考虑反映气体偏离玻意耳定律程度的量 $\frac{\partial(pV)}{\partial p}$ 的符号和大小 (实验中 $dp < 0$)。因此, 判断正、负效应必须同时考虑两个与理想气体定律的偏差。

用上式很容易解释为什么当压强不太大时, 多数气体在室温附近或室温以下都发生正效应。这是因为, 按前面的讨论, 在这些情况下, $T < T_B$, 引力影响对玻意耳定律的偏差起优势作用, 故 $\frac{\partial(pV)}{\partial p} < 0$, 从而 $\frac{\partial(pV)}{\partial p}dp > 0$, 但 $dE_p > 0$, 故 (6) 式右边为正。

反之, 当 $T > T_B$ 或压强相当大时, 按前面的讨论, 斥力影响对玻意耳定律的偏差起优势作用, 故 (6) 式右边第二项与第一项符号相反。显然, 如果温度或压强升高到右边第二项绝对值超过第一项, 就要发生升温效应。在室温附近, 氢气和氦气显示升温效应正是这种情况。请注意, 根据以上分析, 发生升温效应是由于斥力因素对玻意耳定律的偏差影响较大, 它胜过了引力势能增加所起的降温作用, 而并非 “由于分子斥力作功”。

正、负效应的转换温度后面再谈。由上述可见, 压强不大时, 转换温度应该高于玻意耳温度。(当温度 $T = T_B$ 时发生的是降温效应。) 此外, 只要压强足够大, 就要显出升温效应。

范氏气体的焦-汤效应、转换温度与转换曲线

上节的讨论在一定程度上有其普遍性, 即并不依赖于范氏方程及公式 $E_p = -\frac{a}{V}$ 的正确

性。现在再具体用范氏方程及范氏气体内能公式来分析焦 - 汤效应。

由范氏方程 (1) 得到

$$pV = RT + bp - \frac{a}{V} + \frac{ab}{V^2}$$

将上式及内能公式 (4) 代入 (5) 中, 即得膨胀后温度的增量 $\Delta T = T_2 - T_1$ 为

$$\Delta T = \frac{1}{C_v + R} \left\{ b(p_1 - p_2) - 2a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) + ab \left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2} \right) \right\} \quad (7)$$

上式表示焦 - 汤效应是斥力因素 (由 b 反映) 与引力因素 (由 a 反映) 的综合表现 (理想气体 $a = b = 0$, $\Delta T = 0$)。取 $a = 0$ (只考虑斥力影响), 则 $\Delta T > 0$, 取 $b = 0$ (只考虑引力影响), 则 $\Delta T < 0$, 说明斥力影响导致升温, 引力影响导致降温。两种对立影响势均力敌时, $\Delta T = 0$ 。

上述讨论的缺点是没有分别给出两个理想气体定律的偏差对降温或升温所起的作用, 而只是综合两个定律的偏差, 给出了斥力因素与引力因素的影响。为了更清楚地说明问题, 下面再分别揭示两个定律的偏差的影响。

如果我们在推导温度增量 ΔT 的公式时, 只考虑到焦耳定律的偏差, 即用理想气体状态方程 $pV = RT$ 及范氏气体内能公式 (4) 代入 (5) 中, 就会得到

$$\Delta T = -\frac{a}{C_v + R} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) < 0$$

因此, 焦耳定律的偏差 (引力势能的存在) 起降温的作用。

另一方面, 如果在推导温度增量 ΔT 的公式时, 只考虑到理想气体状态方程的偏差, 即用范氏方程 $pV = RT + bp - \frac{a}{V} + \frac{ab}{V^2}$ 及理想气体内能公式 $E = C_v \cdot T$ 代入 (5) 中, 就会得到

$$\Delta T = \frac{1}{C_v + R} \left\{ b(p_1 - p_2) - a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) + ab \left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2} \right) \right\}。$$

上式可为正 ($a = 0$ 时必为正) 或负 ($b = 0$ 时必为负), 说明理想气体状态方程的偏差可以起降温 (当引力影响占优势时) 或升温 (当斥力影响占优势时) 的作用。

(7) 式给出的是两个理想气体定律的总作用。上面已说明, 引力影响与斥力影响如何通过这两个定律的偏差而起降温与升温作用。这里的分析与前面的分析结果是一致的。

下面讨论转换温度问题。为此应考虑微分焦 - 汤效应。

先考虑压强不大的情况。此时 $\frac{a}{V^2}$ 及 b 两个修正量均可看作小量, (7) 式中 $\frac{ab}{V^2}$ 即可略去, 而对曲括弧内的另两个小项则可近似地取 $pV \approx RT$, 式中 T 取为 T_1 与 T_2 的平均值, 于是得到近似的焦 - 汤效应公式:

$$(C_v + R) \Delta T = \left(b - \frac{2a}{RT} \right) (p_1 - p_2) \quad (8)$$

立刻看出, 当压强不大时, 转换温度 (相应于 $\Delta T = 0$) 为 $T_i = \frac{2a}{bR}$, 它的数值等于玻意耳温度 $T_B = \frac{a}{bR}$ 的 2 倍。当 $T > T_i$ 时, 因子 $\left(b - \frac{2a}{RT} \right) > 0$, 斥力影响占优势, 发生升温效应; 当 $T < T_i$ 时, 因子 $\left(b - \frac{2a}{RT} \right) < 0$, 引力影响占优势, 发生降温效应。可以指出, 当压强不大而

$T_i > T > T_B$ 时发生的降温效应相应于 (6) 式右边第二项与第一项符号相反但第一项绝对值较大的情形。

按上式算得的 T_i 值大致与实验值相符。多数气体 T_i 值高于室温, 故当压强不大时, 在室温以下出现降温效应。氢气和氦气的转换温度低 (实验值约为 $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$ 与 $-235\text{ }^{\circ}\text{C}$), 这是因为它们的 a 值小 (分子引力弱) 的缘故, 所以在室温下出现升温效应。这一事实在低温技术中的重要性是熟知的, 必须先把温度降低到 T_i 以下, 才能利用正焦-汤效应致冷以获得液氢或液氦。

实验指出, 转换温度与气体的压强有关。如果取 T 为纵坐标, p 为横坐标, 则表示转换温度 T_i 与压强 p 的函数关系 $f(T_i, p) = 0$ 在温度-压强图中将给出一条曲线, 称为焦-汤效应的转换曲线。转换曲线的一方称为降温区, 当气体温度与压强值落在这区中某一点时, 微分焦-汤效应为降温的; 另一方称为升温区, 当气体温度与压强值落在这区中某一点时, 微分焦-汤效应为升温的。如果在焦-汤实验中气体的始态 (T_1, p_1) 和终态 (T_2, p_2) 都落在降温区, 则出现降温效应, 反之, 如果都落在升温区, 则出现升温效应 (这是因为实验中的焦-汤效应是微分焦-汤效应的累加)。下面, 我们用初等的方法导出范氏气体的转换曲线方程。

我们注意到, 在焦-汤过程中焓 H 不变, 故在微分焦-汤过程中 $dH = 0$ 。由此可见, 如果 $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = 0$ 或 $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = 0$, 则有 $dH = \frac{\partial H}{\partial T}dT = 0$, 于是即推知 $dT = 0$, 不发生焦-汤效应。由 (3) 及 (4) 式可得范氏气体的焓 H 为

$$H = E + pV = (C_v + R)T + \frac{bRT}{V-b} - \frac{2a}{V}$$

故令 $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = 0$, 即得转换温度为

$$T_i = \frac{2a}{bR} \left(1 - \frac{b}{V}\right)^2$$

当压强不太高时, $V \gg b$, 上式与前面导出的近似公式 $T_i = \frac{2a}{bR}$ 是一致的。由上式解出 V 代入范氏方程 (在范氏方程中取 $T = T_i$), 就得到转换温度与压强的关系是

$$p = \frac{a}{b^2} \left(1 - \sqrt{\frac{bRT_i}{2a}}\right) \left(3\sqrt{\frac{bRT_i}{2a}} - 1\right)$$

上式取消根号后可化简成抛物线方程:

$$\left(\frac{b^2}{a}p + \frac{3Rb}{2a}T_i + 1\right)^2 - \frac{8Rb}{a}T_i = 0$$

这一转换曲线方程与实验结果大体相符, 但定量上符合得不好。

总之, 利用范氏气体的分子模型, 我们对分子力如何影响气体性质作了些定性说明, 初步分析了理想气体定律的偏差情况和发生正、负焦-汤效应的条件, 与实验结果作了一些比较。限于本文内容与篇幅, 许多有关范氏气体的问题不能在此讨论。最后应该指出, 用范氏气体的分子模型来研究真实气体的性质是有其局限性的, 这个模型是个简单的模型, 定量结果不够精确。本文的目的仅在于对一些问题的物理实质作些定性的、粗浅的讨论, 并不苛求对问题处理的严格性。

平面电磁波基本性质的初等推导*

余守宪

(北京铁道学院)

平面电磁波的基本性质,在经典电磁场理论中占有重要地位。严格的理论推导必须应用电动力学的知识。在普通物理教学中,如何进行初等的讲授是教师颇感棘手的问题。姚启钧先生曾在“电偶极子辐射的图示问题”^[1]一文中进行过讨论。关于振荡电偶极子电磁场的初等推导方法,作者已在本刊中作过介绍^[2]。这里,我们再介绍一种关于平面电磁波基本性质的初等推导方法,以供教学参考。这种初等推导方法的特点是:计算简单,物理概念鲜明,可导出定量关系,具有普通物理学基本知识的读者易于接受。但初等方法往往不免有漏洞,限于水平,不妥或错误之处恐在所难免,希望得到批评和指正。

后面要说明,我们介绍的初等推导,其实是按麦克斯韦方程组求平面电磁波解的一个“初等的翻版”,因此是严格的。这一讲法是卡尔(H. Y. Carr)和塞尔斯(R. L. Sells)提出的^[3],我们对讲法作了补充和改进,并且按电磁场理论给出了相应的理论分析。

为阐述便利起见,我们按照证明的顺序,把平面电磁波的基本性质分成以下五点(其中(一)、(二)两点可合并到(三),而(四)和(五)两点则是我们推导的重点)。

(一) 电场强度 $\mathbf{E}$ 及磁场强度 $\mathbf{H}$ 的方向,均处处与波的传播方向垂直。

(二) 电场强度 $\mathbf{E}$ 与磁场强度 $\mathbf{H}$ 两者的方向处处相互垂直。

(三) 电场强度 $\mathbf{E}$ 、磁场强度 $\mathbf{H}$ 及沿波传播方向的单位矢量 $\mathbf{n}$,三者处处组成右旋正交系。

(四) 波速 $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, 式中 c 是电磁系单位制电量单位与静电系单位制电量单位之比值;
 ϵ 与 μ 分别为介质的介电系数与磁导率。

(五) 在任一时刻,电场强度值与磁场强度值处处成正比: $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ 。

为具体起见,设平面电磁波沿 z 轴正方向传播。

证明性质(一):

按平面波的定义,波中的 $\mathbf{E}$ 矢量,应处处相互平行并与固定的平面(可取为 xz 平面)平行,而 E 值则仅依赖于坐标 z 及时刻 t 。如图1所示,我们在波场中任取一个平行六面体形状的封闭曲面,使上下、左右、前后三对平面分别与 x 轴、 y 轴及 z 轴垂直。容易看出,通过左右两个面的电通量均为

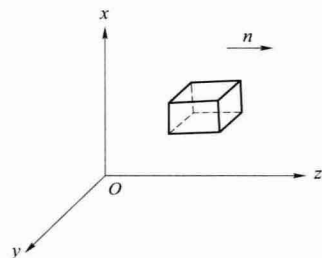


图1

* <http://www.cnki.net>