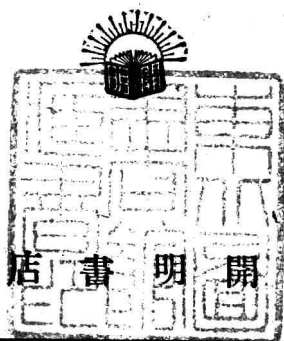


數學趣味

劉薰宇著

數學趣味

劉薰宇著



開明書店

發行

恒志

數學趣味

序

我中學時代最不歡喜數學，最歡喜圖畫，常常爲了圖畫而拋荒數學課。看見某畫理書上說：「學數學與學圖畫，頭腦的用法相反，故長於數學者往往不善圖畫，長於圖畫者往往不善數學。」我得了這話的辯護，便放心地拋荒數學課，彷彿數學越壞圖畫會越好起來似的。現在回想覺得可笑，又可惜，放棄了青年時代應修的一種功課。我一直沒有嘗過數學的興味，一直沒有遊覽過數學的世界，到底是損失！

最近給我稍稍補償這損失的，便是這冊書裏的幾篇文章。我與薰宇相識後，他便做這些文章。他每次發表，我都讀，誘我讀的，是牠們的富有趣味的題材。我常不知不覺地被誘進數學的世界裏去。每次想：假如從前有這樣的數學書，也許我不會拋荒數學，因而不

會相信那畫理書上的話。我曾鼓勵薰宇續作，將來結集成書。現在書就將出版了，薰宇要我作序。數學的書，教我這從小拋荒數學的人作序，也是奇事；而我居然作了，更屬異聞！序似乎應該是對於全書的內容有所品評或闡發的；然而我的序沒有，祇表示我是每篇的愛讀者而已。——唯其中韓信點兵一篇給我的回想很不好：這篇發表時，我正患眼疾，醫生叮囑我燈下不可看書，而我接到雜誌，竟在燈下一口氣讀完了。次日眼睛很痛，又去看醫生。

一九三三年耶誕節子愷。

致讀者

我有一個怪癖——胡思亂想。閑來無事，獨自一個人坐着，不用說，只是胡思亂想；就是喫着飯，走着路的當兒，仍然胡思亂想；甚至於許多人在一淘，談得興會淋漓的時候，我也會突然脈脈地不顧一切地想得發獃。

我的胡思亂想，也有一點奇怪；並非天南地北海闊天空地毫無邊際，只是由什麼一個誘因一直線地連續下去，有時竟連續到兩三天，全在這條線上來回。

我的胡思亂想的路不過兩條：一條非數學的，一條數學的。我會想到一個不生鼻子的人，怎樣生活下去；也會想到一個長着翅膀的人怎樣在天空中飛翔，怎樣快活或怎樣倒運。這些屬於非數學的一類。自然說牠們是文學的似乎更恰當些，但我的筆太笨了，不

能將牠們寫成童話，所以不敢「掠美」用「文學的」這一個辭。

數學的胡思亂想，佔據我的時間差不多有三分之一以上。我是不耐孤獨的，然而我的命運常常使我困在孤獨裏面。我有過許許多多的朋友，卻是很奇怪，這些被我很熱心誠敬認為朋友的人們，沒有一個把我登記在他的朋友錄上。我不出去找人，永遠不會有人光臨到寒舍。我去找朋友時，總使他們心裏不高興；因為我怕孤寂，找到了朋友，就捨不得走開。我常常感到這損人利己的勾當不是辦法，鼓起勇氣孤另另地坐在屋裏，這時陪伴我的，大半是數學的胡思亂想。在生活上，遇到轉軻，走頭無路，我總是讀數學，或將數學的胡思亂想來使自己鎮靜下去。數學是我的朋友，是唯一肯給我的慰藉的朋友，然而我卻沒有想成數學家的野心。

我的數學的胡思亂想，就數學的立場說，全是上天下地地跑野馬。有時我想到極艱深的問題，有時我想的卻只是小學生的問題。我走上電車，公共汽車，或火車，總要看那張車票的號頭，將牠來分因數，再將各因數兩兩三三地乘乘除除。比方車票的號頭是 65

52，憑我的力量一眼就知是牠含有一因數8和一個因數9，再看又知道還含有一個因數7。八九七十二，7乘72得504，我便用504去除6552得到13，牠是個質數，分解因數的想頭纔就此停止。以後便用12，24，14，28，56，2639，……一切24839713，中兩個數以上的乘積，去除6552。這樣的胡思亂想，使我忘掉沒有朋友同車的寂寞。假如車票的號頭是一個一眼看去就可知道的質數，這一次乘車我就很苦。

我頂怕一個人步行，走路得當心，不便胡思亂想，然而我在一個人走着的時候，一樣地怕寂寞，我唯一的驅遣寂寞的方法便是數脚步。

無論分因數，數脚步或胡思亂想到別的淺淺深深的問題，都只是把牠來排遣孤寂，並不追求什麼結果。我的住室在樓上，每次上下的梯子，總數過好幾百次，但是若要問這梯子有幾級，我還須去數了才回答得上來。

這本小冊子裏所結集的十來篇東西，有兩個來源：一是被逼得無可如何時的文債，

一是胡思亂想的結果。本來，這些不成什麼器皿的東西，將牠們發表已屬多事，發表過了，還要結集起來，成單行本，更是多事中的多事。然而何苦來，明知其如此！這也有點小小的原因：自從發表過四五篇後，書店和我便常常接到一些愛讀青年的信，一是要我多寫；一是要我將牠們結集起來出單行本；其中有兩封最使我感動牠們，都是一二八以後的，那信上說，他們在中學生上很喜歡讀數學講話，一直是保存起來的，因為他們住在閘北，一二八逃難竟失去了，補也補不齊，望我出單行本給他們有再讀的機會。不過那時全數還只五六篇，在量上未免單薄一些，所以延到現在纔來奉報這些歡喜牠們的朋友的雅意。

至於寫，我很抱歉，久已不動筆了，更說不到多。其原因是個人生活的忙迫。在忙迫中雖然一樣地胡思亂想，但這胡思亂想的直線都很短，寫不成什麼東西。此後我希望能有更多的胡思亂想的時間，產生一點東西。孤寂呢，原來不但不因生活的忙迫而減少，有時反而增加深度。無可如何只得希望胡思亂想的直線，能有拉得較長的機會。

因了這十來篇東西只是胡思亂想的結果，所以牠們彼此中間沒有什麼很多的關

聯，不過也似乎有兩點是共同的：

許多人以為數學是枯燥，煩難，令人頭痛，不切實用的學科，因此望而卻步；打破這種觀念，這是第一個共同的企圖。

許多人以為學習數學，只要呆記書本上的法則，公式，定理等等，再將練習題做完，這就算得到家了。其實書本上的不但有限而且也太固定了，我們所能遇見的更鮮活的材料不知有多少。將死板的方法用到這些活潑的材料上去，使牠兩相得益彰，這是一條學習的正軌。學習不但要收得些材料，還要得到一些方法。學得方法比學得材料更有效果。比如說，鷄兔同籠這一類的題，什麼算術課本裏都有的，學得牠的算法固然重要，而學習怎樣思索出那算法來更其重要。不是麼？牠的算法是從假定全體是鷄或兔起步的，知道第一步以後便容易了。對於這類題怎樣會想出這第一步的假定法來，便是思索的方法的問題。暗示處理材料和思索問題的方法，這是第二個共同的企圖。

自然，這小冊子，並不曾充分地達到這兩個企圖，這是我的力量的問題，很覺抱歉！

目次

數學是什麼·····	一
數學所給與人們的·····	二六
數的啓示·····	二六
從數學問題說到我們的思想·····	四〇
恨點不到頭·····	五五
堆羅漢·····	六六
八仙過海·····	一二
棕欖謎·····	一四九

韓信點兵·····	一五
王老頭子的湯糰·····	三七
假使我們有十二個手指·····	二八

數學是什麼

這裏所要說明的數學這一個辭，包含着算術，代數，幾何，三角，等等在內；用英文名辭來說，那就是 Mathematics。牠的定義，照平常的想法，非常簡單而且非常明瞭，幾乎已用不到再加說明。但真要說明，那卻問題很多。且先舉羅素（Russell）在他所著的數理哲學提出的定義，真是叫人莫明其妙，好像在開玩笑的一般。他說：

“Mathematics is the subject in which we never know what we are talking about nor whether what we are saying is true.”

將這句話很粗疏地譯出來，就是：

「數學是這樣的一回事，弄牠這種玩意兒的人也不知道自己究竟在幹些什麼。」

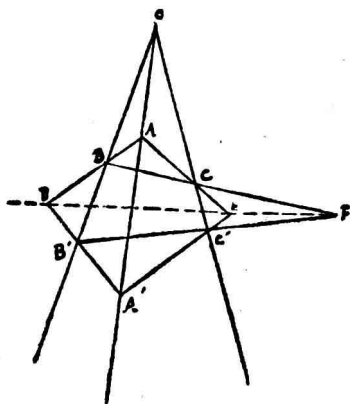
這樣的定義，牠的愉快迷離，牠的其妙莫測，真是「不說還明白，一說反糊塗。」然而，要將已經發展到現時的數學的領域統括得完全，要將牠的繁複燦爛的內容表示得活躍，好像除了這樣也沒有別的更好的話可說了；所以伯比里茲（Pappertis）伊特耳生（Itelson）和柯丟勒特（Couturat）幾位先生對於數學所下的定義也是和這個氣味相同的。

對於數學的一般的讀者，這定義，恐怕反使得大家墮入五里霧中，因此撥雲霧見青天的工作似乎少不來了。羅素所下的定義，牠的價值在什麼地方呢？牠所指示的是些什麼呢？要回答這些問題，還是用數學的其他的定義來相比較更容易明白。

在希臘，亞里斯多德（Aristotle）那些時代，不用說，數學的發達還很幼稚，領域也極狹小，所以數學的定義只須說牠是一種「計量的科學」，已很可使人心滿意足了。可不是麼？這個定義，初學數學的人是極容易明白而且能夠滿足的。他們解四則問題，學複名數的計算，再進到比例，利息，無一件不是在計算量。就是學到代數，幾何，三角，也還不容易

發現這個定義的破綻。然而仔細一想，牠實在有些不妥貼。第一，什麼叫做量，雖則我們可以常識來解釋，但真要將牠的內涵弄個明白，也不容易；因此用牠來解釋別的名辭，依然不能將那名辭的概念明瞭地表出。第二，就是照常識來解釋量，所謂計量的科學這個謂語也不能夠就明確地劃定數學的領域。像測量，統計這些科學，雖則牠們各有特殊的目的，牠們也只是一種計量。由此可以知道，單用「計量的科學」這一個謂語聯系到數學而成一個數學的定義，未免廣泛了一點。

若進一步去探究，這個定義的欠缺還不止這兩點，所以孔德（Comte）就加以修改而說：「數學是間接測量的科學。」照前面的定義，數學是計量的科學，那末必定要有量纔有可計算的，但牠所計的量是用什麼手段得來的呢？用了一枝尺就可以量一幅布有幾尺幾寸寬，有幾丈幾尺長，用了一桿秤就可以量一袋米有幾斤幾兩重，這自然是可以直接辦到的；但若行星軌道的廣狹，行星自己的體積，或是很小的分子的體積，這些就不是人力所能直接測定的；然而由數學的方法可以間接將牠們計算出來。因此，孔德所



下的這個定義，雖則不能將前一個定義的缺點全然補正，但總是較進一步了。

孔德究竟是十九世紀前半期的人物，雖則他是一個不可多得的哲學家 and 數學家，但在他的時代，數學的領域遠不及現時的廣闊；如羣論，位置解析，投影幾何，數論，以及邏輯的代數等，這些數學的支流的發展，都是他以後的事。而這些支流，和量或測量實在沒甚關係。即如德薩格（Desargues）所證明的一個極有興味的定理：

「兩三角形的頂點若在集交於一點的三直線上，則牠們的相應邊的交點就在一條直線上。」

這個定理的證明，就只用到位置的關係而和量毫不相干。數學的這種進展，自然是輕巧巧地便將孔德所給的定義攻破了。

到了一九七〇年比兒士（Peirce）就另

外給數學下一個這樣的定義。

『數學是產生「必要的」結論的科學。』

不用說，這個定義，比以前的都廣泛得多，牠已離開了數，量，測量等等這些名辭。我們知道，數學的基礎是建築在幾個所謂公理上面的。從方法上說，不過由這幾個公理出發，逐漸演繹出去而組成一個秩序整然的系統；所謂公式，定理，只是這演繹所得的結論。

照這般說法，比兒士的定義可以算得完全無缺麼？

不依了幾個基本的公理，照邏輯的法則演繹出的結論，只是「必然的，」若說是「必要」那就很可懷疑。我們若要問怎樣的結論纔是必要的，這豈不是很難回答麼？

更進一步說，現在的數學領域裏面，固然大部分還是採用著老法門，但是像披阿羅 (Peano)，布爾 (Boole) 和羅素這些先生們，卻又走著一條相反的途徑，他們要掉一個方向對於數學的基礎去下尋根問底的工夫。

於是，這個新鮮的定義又免不了搖動。

關於這定義的改正，我們可以舉出康伯（Kempe）的來看，他說：

「數學是一種這樣的科學，我們用了牠來研究思想的題材的性質的；而這裏所說的思想，是歸依到含著相異和相同，個別和複合的一個數的概念上面。」

這個定義，實在太嚴肅太文氣了，而且意味也有點含混。在康伯以後布契（Böcher）把牠改變了一下，便這樣說：

「倘若我們有某一羣的事件同著某一羣的關係，而我們所要研究的問題，又單只是這些事件是否適合於這些關係；這種研究便稱為數學。」

在這個定義中，有一點最值得注意，布契提出了「關係」這一個辭來解釋數學，牠並不用什麼數咧量咧這些傢伙，因此很巧妙地將數學的範圍擴張到「計算」以外。假如我們只照慣用的意義來解釋「計算」，那麼，到了現在，數學中有些部分確實並不是和計算有什麼因緣。

也就因了這個緣故，我喜歡用「數學」這個辭來譯 *Mathematics*，而不喜歡用