HIGHER

MATHEMATICS

高等数学（下册）

苏 敏 何春燕 程美玉◇主编

黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

HIGHER MATHEMATICS

高等数学（下册）

苏 敏 何春燕 程美玉◇主编

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 苏敏, 何春燕, 程美玉主编. --
哈尔滨：黑龙江大学出版社, 2012.7
ISBN 978-7-81129-508-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①苏… ②何… ③程… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 153668 号

高等数学(下册)
GAODENG SHUXUE(XIACE)
苏 敏 何春燕 程美玉 主编

责任编辑 刘剑刚 于 丹 肖嘉慧
出版发行 黑龙江大学出版社
地　　址 哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印　　刷 黑龙江省委党校印刷厂
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 18.25
字　　数 345 千
版　　次 2012 年 7 月第 1 版
印　　次 2012 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-81129-508-5
定　　价 28.00 元

前　言

高等数学课是普通高等学校理工科类专业的一门重要公共基础课程．本课程的教学目的是：一方面要使学生获得数学的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后续课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础；另一方面通过各个教学环节，逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，并具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析和解决实际问题的能力．高等数学在培养学生的综合素质和创新意识方面起着十分重要的作用．

为了使高等数学课程能够充分发挥它的教育功能，使其更趋于符合培养社会所需要的具有综合素质和创新意识的复合型、创造型、应用型人才目标的要求，同时兼顾本课程的理论性、思想性与工具性的要求，我们在多年的教学实践、教学改革以及教学讲义的基础上，已于 2008 年由科学出版社正式出版了一套针对物理、计算机、电子工程等专业的《高等数学》教材．在此教材的基础上，我们编写组成员针对数学在化学、生命科学、农学等学科领域的应用，将数学知识与相关实际问题相结合、化抽象为形象，在编写思想、体系安排、内容取舍等方面做了大量的修改和补充工作，努力使科学性、系统性及应用性等方面实现完美的统一，编写了本套教材．本教材具有以下特点：一是秉承了传统微积分的基本内容和基本体系，适当降低了极限与连续的理论要求以及各类积分的计算技巧的要求，以适应本课程课时量少的要求；二是在满足化学、生命科学、农学等相关专业后续课程所需数学基础知识的基础上，同时增加许多与这些专业相关的典型实例与习题；三是为了适应不同的教学对象需要，将有些内容标以“*”号，以便在教学中进行取舍．

本书上册由刘艳滨、于葯、肖相武主编，下册由苏敏、何春燕、程美玉主编，各章的具体编写人员如下：上册第 1 ～ 3 章由刘艳滨编写，第 4 ～ 5 章由于葯编写，第 6 ～ 7 章及习题参考答案与提示由肖相武编写；下册第 8 章和第 10 章由苏敏编写，第 9 章及习题参考答案与提示由何春燕编写，第 11 章由程美玉编写．

本书的编写得到了黑龙江大学数学科学学院领导和同志们的大力支持．在本书编写过程中，我们参考了一些同类书籍，并借鉴了许多宝贵的经验，在此一并表示衷心的感谢．由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请有关专家、学者不吝赐教，同时也希望使用该教材的广大教师和学生反馈宝贵意见．

编　者

2012 年 3 月

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包括函数、一元函数的微分学及其应用 (极限与连续、导数与微分、导数的应用) 、一元函数的积分学及其应用 (定积分、不定积分，定积分的应用)、向量代数与空间解析几何简介；下册内容包括多元函数的微分学及其应用、多元函数的积分学及其应用、无穷级数、常微分方程简介

本书可作为高等院校的化学、生命科学、农学等相关专业的教材，也可作为教师、学生和工程技术人员的参考用书.

目　录

第 8 章　多元函数的微分学

在自然科学与工程技术中，经常遇到自变量的个数是两个或两个以上的函数，称其为多元函数. 本章将在一元函数微分学的基础上，以二元函数为例讨论多元函数的微分法及其应用.

§8.1　多元函数的基本概念

在讨论一元函数微分学时，所涉及到的概念与理论都建立在实数集 $\mathbb{R}$ 中的两点间的距离、邻域以及区间等概念的基础上. 为了讨论多元函数的需要，我们首先将这些概念推广到实数集的积集 $\mathbb{R}^n$ 中，并给出 n 维 Euclid ① 空间的概念.

8.1.1　n 维 Euclid 空间

在 §7.1 中我们知道，空间中的点 P 与有序三元实数组 (x_1,x_2,x_3) 之间可以建立一一对应关系，这样在数学上可以把有序三元实数组 (x_1,x_2,x_3) 与点 P 视为等同的. 空间中所有点构成的集合常用积集 $\mathbb{R}^3$ 表示，即

$$\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{R}\},$$

而 $\mathbb{R}^3$ 中的元素 (x_1,x_2,x_3) 也称为点或三维向量；称坐标原点 $(0,0,0)$ 为零点或三维零向量. 为了表述方便，常将 $\mathbb{R}^3$ 中的元素 (x_1,x_2,x_3) 简记为 x, 即

$$x=(x_1,x_2,x_3).$$

此时 (x_1,x_2,x_3) 称为 x 的坐标形式.

在集合 $\mathbb{R}^3$ 中，可以按空间解析几何中的两点间距离来定义两个元素之间的距离，即对 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两点 $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$, 称实数

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

为点 x 与 y 的距离，记为 $\|x-y\|_3$ 或 $\|x-y\|$.

集合 $\mathbb{R}^3$ 中的元素可以按三维向量的加法和数乘运算来定义元素的线性运算，即对 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两点 $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ 及任意的实数 λ, 规定加法和数乘运算为

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),$$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3).$$

① Euclid, 欧几里德，约公元前 330~ 公元前 275.

如果集合 $\mathbb{R}^3$ 按上述方式定义了两点间的距离及元素的线性运算，则称 $\mathbb{R}^3$ 为三维 Euclid 空间，简称为 $\mathbb{R}^3$ 空间.

类似地可定义 n 维 Euclid 空间.

设 n 是正整数，且 $n \geqslant 2$. 用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体构成的集合，即

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 规定两点之间的距离为

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 规定线性运算为

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

如果 $\mathbb{R}^n$ 按上述方式定义了两点间的距离以及元素的线性运算，则称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间，简称为 $\mathbb{R}^n$ 空间.

特别地，$\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^3$ 都有明显的几何意义，分别表示数轴、平面及空间，而 $\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^3$ 的点集分别称为实数集、平面点集、空间点集. 通常将 $\mathbb{R}^1$ 记为 $\mathbb{R}$.

本教材主要在平面 $\mathbb{R}^2$ 和空间 $\mathbb{R}^3$ 上讨论问题，除特别说明外均使用几何中的表示方法，将 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 分别表示为

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

用 $P(x, y)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中以 x 为第一个分量，以 y 为第二个分量的点，记为 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 或 $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 用 $|P_1P_2|$ 或 $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$ 表示点 $P_1(x_1, y_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离，即

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

或

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

用 $P(x, y, z)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中以 x 为第一个分量，以 y 为第二个分量，以 z 为第三个分量的点，记为 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 或 $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. 用 $|P_1P_2|$ 或 $|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)|$ 表示点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离，即

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

或

$$|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

8.1.2 $\mathbb{R}^2$ 空间中的点集

利用距离的定义，仿照实数集我们可以在 $\mathbb{R}^2$ 中定义邻域、内点、开集等概念.

定义 8.1.1 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $\delta>0$, 称集合

$$\{(x,y)\mid |(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta\}$$

为点 P_0 的 δ 邻域或点 P_0 的邻域，记为 $U(P_0,\delta)$ 或 $U(P_0)$; 称集合

$$\{(x,y)\mid 0<|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta\}$$

为点 P_0 的去心 δ 邻域或点 P_0 的去心邻域，记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 或 $\overset{\circ}{U}(P_0)$.

定义 8.1.2 设 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，且 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

1. 如果存在 $\delta>0$, 使得 $U(P_0,\delta)\subset E$, 则称点 P_0 为 E 的内点； E 的内点全体构成的集合称为 E 的内部，记为 E°; 如果 E 中的每一点均为 E 的内点，即 $E\subset E^\circ$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集.

2. 如果存在 $\delta>0$, 使得 $U(P_0,\delta)\cap E=\emptyset$, 则称点 P_0 为 E 的外点.

3. 如果点 P_0 既不是 E 的内点，也不是 E 的外点，则称 P_0 为 E 的边界点； E 的边界点全体构成的集合称为 E 的边界，记为 ∂E; 称 $E\cup\partial E$ 为 E 的闭包，记为 $\overline{E}$.

4. 如果对 $\forall\delta>0$, 有 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)\bigcap E\neq\emptyset$, 则称 P_0 为 E 的聚点； E 的聚点全体构成的集合称为 E 的导集，记为 E'; 如果 $P_0\in E$, 但 $P_0\notin E'$, 则称 P_0 为 E 的孤立点.

5. 如果 $F\subset\mathbb{R}^2$, 且 $\mathbb{R}^2-F$ 为开集，则称 F 为闭集.

6. 如果 E 内的任何两点都可以用折线连接起来，并且该折线上的点都属于 E, 则称 E 为连通集.

7. 如果 E 为非空的开集，并且是连通集，则称 E 为开区域，简称为区域；如果 E 是开区域，则称 $E\cup\partial E$ 为闭区域.

8. 如果存在 $\eta>0$, 使得 $E\subset U(0,\eta)$, 则称 E 为有界集，否则称 E 为无界集.

关于定义 8.1.2 作如下说明：

(1) $U(P_0,\delta)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开区域，且 $U(P_0,\delta)$ 表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上以 P_0 为圆心、以 δ 为半径的开圆 (不包含圆周的圆).

(2) 对于 $\mathbb{R}^2$ 的任意一个子集 E 来说， E 的边界点或聚点可以属于 E 也可以不属于 E, 但 E 的内点一定属于 E, E 的外点一定不属于 E.

(3) 对于 $\mathbb{R}^2$ 的任意一个子集 E 来说，显然有 $E^\circ\subset E\subset\overline{E}$. 例如， $\mathbb{R}^2$ 中开圆 $U(P_0,\delta)$ 的边界为

$$\partial U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |(x,y)-(x_0,y_0)|=\delta\};$$

$U(P_0,\delta)$ 的闭包为 $\overline{U(P_0,\delta)}$(通常称 $\overline{U(P_0,\delta)}$ 为闭圆), 即

$$\overline{U(P_0,\delta)} = \{(x,y) \mid |(x,y)-(x_0,y_0)| \leqslant \delta\}.$$

(4) $\mathbb{R}^2$ 中定义的邻域、内点、开集等概念可以类似地推广到 $\mathbb{R}^n$ 空间中. 例如, 设 $P_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\delta > 0$, 则称集合

$$\{(x,y,z) \mid |(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)| < \delta\}$$

为点 P_0 的 δ 邻域或点 P_0 的邻域, 记为 $U(P_0,\delta)$ 或 $U(P_0)$; 称集合

$$\{(x,y,z) \mid 0 < |(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)| < \delta\}$$

为点 P_0 的去心 δ 邻域或点 P_0 的去心邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 或 $\overset{\circ}{U}(P_0)$.

特别地, $U(P_0,\delta)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的开区域, 且 $U(P_0,\delta)$ 表示空间 $\mathbb{R}^3$ 中以 P_0 为球心、以 δ 为半径的开球 (不包含球面的球).

下面给出 $\mathbb{R}^2$ 空间中的点列及其极限的概念.

如果 $P_n(x_n,y_n) \in \mathbb{R}^2$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, 则称集 $\{(x_n,y_n) \mid (x_n,y_n) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点列, 记为 $\{(x_n,y_n)\}$ 或 $\{P_n\}$. 如果 $P_0(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, 且

$$\lim_{n\to\infty} |P_nP_0| = \lim_{n\to\infty} |(x_n,y_n)-(x_0,y_0)| = 0,$$

则称点列 $\{(x_n,y_n)\}$ 收敛于 (x_0,y_0), 记为 $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)\ \ (n\to\infty)$, 或称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$.

由点列收敛的定义可知, $\{(x_n,y_n)\}$ 收敛于 (x_0,y_0) 的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

类似地, 可以给出 $\mathbb{R}^n$ 空间中相应的概念和结论.

8.1.3 多元函数的概念

定义 8.1.3 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集, 称映射 $f: D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数, 记为

$$u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ \ ((x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D),$$

其中 u 为点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在映射 f 下的像, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均称为自变量, 称集合 D 为 n 元函数 f 的定义域, 称集合

$$f(D) = \{f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D\}$$

为 n 元函数 f 的值域; 称集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)) \mid (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D\}$$

为 n 元函数 f 的图像或图形, 记为 $G_D(f)$.

关于定义 8.1.3 我们作以下的补充说明:

(1) 在定义 8.1.3 中, 如果 D 中的点表示为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则 n 元函数 f 可写为

$$u=f(P)\ \ (P\in D).$$

(2) 定义 8.1.3 中, 当 $n=1$ 时, n 元函数就是一元函数; 当 $n\geqslant 2$ 时, n 元函数统称为多元函数. 特别地, 当 $n=2$ 时, 常用 x, y 表示自变量, z 表示对应的函数值, 而把二元函数写为

$$z=f(x,y)\ \ ((x,y)\in D);$$

当 $n=3$ 时, 常用 x, y, z 表示自变量, 而把三元函数写为

$$u=f(x,y,z)\ \ ((x,y,z)\in D).$$

(3) 求多元函数的定义域的方法与一元函数是一致的. 如果给定了函数解析式, 其定义域就是使该解析式有意义的点的全体构成的集合. 如果是实际问题, 除使解析式有意义外, 还要结合实际问题的意义来确定. 例如, 函数

$$V=xyz$$

的定义域为 $\mathbb{R}^3$; 而当 x、y、z 表示某一长方体的棱长, V 表示该长方体的体积时, 此时 $V=xyz$ 的定义域为

$$\{(x,y,z)\mid x>0,\ y>0,\ z>0\}.$$

(4) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像 (图 8.1.1) 是一个曲面, 该曲面在 xOy 面上的投影就是该函数的定义域 D. 例如, 二元函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\ \ \ ((x,y)\in D)$$

的图像 (图 8.1.2) 是上半球面, 其定义域为 xOy 面上的闭区域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

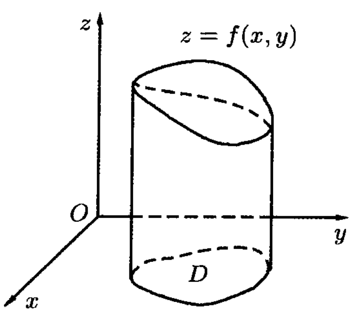

图 8.1.1

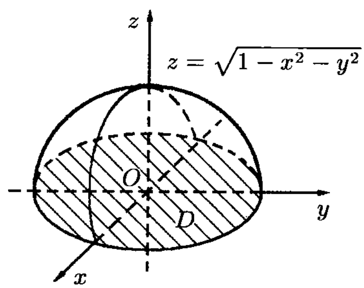

图 8.1.2

(5) n 元函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D)$$

的表达式中，不要求所有自变量 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都出现. 例如，三元函数

$$f(x,y,z)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\quad((x,y,z)\in\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\neq 0,\ z\in\mathbb{R}\}).$$

(6) 多元初等函数是指可用一个算式表示的多元函数，该算式是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的. 例如

$$x^2+y^2+z^2,\quad \frac{xy}{x^2+y^2},\quad (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\quad \ln\frac{1}{x+y},\quad \mathrm{e}^{x^2y\sqrt{z}}$$

等都是多元初等函数.

例 8.1.1 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, 求 f 的定义域，并计算 $f(-2,3)$.

解 要使表达式 $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 有意义，只需 $x^2+y^2\neq 0$, 于是 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$, 并且

$$f(-2,3)=\frac{2\times(-2)\times 3}{(-2)^2+3^2}=-\frac{12}{13}.$$

习　题　8.1

8.1.1 求下列函数的定义域 D, 指出 D 是否为开集、闭集、区域 (开区域或闭区域) 、有界集、无界集及 D 的边界，并画出 D 的图像：

(1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$;　　(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(y+1)}}$;　　(4) $z=\ln(y-x^2+1)$;

(5) $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$;　　(6) $f(x,y,z)=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$.

8.1.2 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$, 求 $f\left(\dfrac{x}{y},1\right)$.

8.1.3 设函数 $f(x,y)=Ax^\alpha y^{1-\alpha}$, 其中 A, α 是常数，且 $0<\alpha<1$, 证明：对 $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda f(x,y).$$

8.1.4 设函数 $f(x,y)$ 满足下列条件，求 $f(x,y)$ 的表达式：

(1) $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$;　　(2) $f(x+y,xy)=\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.

8.1.5 画出下列函数的图像：

(1) $z=x+y$;　　(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $z=x^2+y^2$;　　(4) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}$.

§8.2 多元函数的极限与连续

8.2.1 多元函数的极限

仿照一元函数极限的定义，我们可以给出二元函数极限的定义.

定义 8.2.1 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0) \in D'$，$A \in \mathbb{R}$ 为常数. 如果对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当点 $P(x,y) \in D \bigcap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 时，有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 时的极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ 或 } f(x,y) \to A \quad ((x,y) \to (x_0,y_0)). \tag{8.2.1}$$

此时，也称极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在；否则称极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

关于二元函数极限的定义我们作如下说明：

(1) 在定义 8.2.1 中，如果记 $P_0(x_0,y_0)$，$P(x,y)$，并用记号 $P \to P_0$ 来表示 $(x,y) \to (x_0,y_0)$, 则 (8.2.1) 式可记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A$ 或 $f(P) \to A\ (P \to P_0)$.

(2) 二元函数的极限有如下的等价定义，即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 的充分必要条件为：对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $(x,y) \in D, (x,y) \neq (x_0,y_0)$, 且 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

(3) 二元函数的极限与一元函数的极限不同的是：$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在是指当 P 在定义域内以任意方式趋于 P_0 时，$f(P)$ 都趋于 A. 由此可知，如果当 P 在定义域内以两种不同的方式趋于 P_0 时，$f(P)$ 趋于不同的值，或当 P 在定义域内以一种方式趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限不存在，则 $f(P)$ 当 $P \to P_0$ 时的极限不存在.

例如，函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\cos(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

当点 (x,y) 沿直线 $y = 0$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{(x\times 0)\cos(x\times 0)}{x^2+0^2} = 0,$$

当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

(4) 仿照二元函数极限的定义可将 n 元函数极限的定义叙述如下：

设函数 $f(P)$ 是定义在点集 D 上的 n 元函数，点 $P_0\in D'$, $A\in\mathbb{R}$ 为常数. 如果对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $P\in D$ 且 $0<|PP_0|<\delta$ 时，有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限，通常把 n 元函数的极限称为 n 重极限. 由于 n 重极限的定义与一元函数极限的定义形式上完全相同，故一元函数的性质 (如极限的唯一性、局部有界性、局部保号性等) 和运算法则都可以推广到 n 重极限.

下面给出几个例子.

例 8.2.1 用定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 为了使不等式

$$\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

成立，只需 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立.

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0<|(x,y)-(0,0)|<\delta$ 时，有

$$\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}=2|(x,y)-(0,0)|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$

例 8.2.2 设 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 的存在性.

解 因为当点 (x,y) 分别沿直线 $y=x$ 和抛物线 $y^2=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=0,$$