

材料力学

主 审 苏铁坚

主 编 邹建奇 崔亚萍 田 伟

副主编 蔡 斌 沙丽蓉 蒋 鑫

CAILIAO LIXUE



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

材料力学

主 审 苏铁坚
主 编 邹建奇 崔亚萍 田 伟
副主编 蔡 斌 沙丽蓉 蒋 鑫



北京邮电大学出版社
· 北京 ·



TB 301
196

内 容 提 要

本书根据 2011 年 9 月最新颁布的《高等学校土木工程学科指导性专业规范》基本要求编写,更加注重基本理论和基本方法的讲授,并在此基础上,注重理论联系实际及能力的培养。可供教学在 60~80 学时的材料力学课程选用。

本书共 14 章,内容包括材料力学的基本概念、截面的几何性质、轴向拉伸和压缩、扭转、剪切、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态和强度理论、组合变形、压杆稳定、简单超静定问题求解、能量法及动荷载。

本书适用于高等学校的土木、交通、工程管理、市政、测绘、勘查、安全、建筑学及规划等专业,也可供其他专业及有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学 / 邹建奇, 崔亚萍, 田伟主编. — 北京: 北京邮电大学出版社, 2013. 3

ISBN 978-7-5635-3422-7

I. ①材… II. ①邹… ②崔… ③田… III. ①材料力学—高等学校—教材 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 040255 号

书 名: 材料力学

主 编: 邹建奇 崔亚萍 田 伟

责任编辑: 付兆华 陈岚岚

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编: 100876)

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京联兴华印刷厂

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 17.75

字 数: 437 千字

版 次: 2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3422-7

定 价: 39.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

根据高等学校土木工程学科专业指导委员会 2011 年 9 月最新颁布的《高等学校土木工程学科指导性专业规范》和 2008 年教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导委员会颁布的《理工科非力学专业力学基础课程教学基本要求》,我们在第 1 版《材料力学》的基础上进行了修订。本书总结了第 1 版在 6 年的使用过程中的经验和问题,更加注重了理论联系实际,尤其在例题和习题中,突出了工程背景,侧重与后续课程的联系,使同学们更加明确学习的目的。

本书适用于普通高等学校理工科各专业的中、多学时材料力学课程,教学在 60~80 学时。全书共 14 章,其中第 1~8 章是基础,要求重点掌握,主要包括 4 种基本变形(轴向拉伸和压缩、扭转、剪切、弯曲)的内力、应力及强度、变形及刚度计算。第 9~11 章和第 13 章是扩展内容,包括组合变形、应力状态和强度理论、压杆稳定、能量法,要求掌握基本理论和基本方法。第 12、14 章供考研同学参考。

本书由邹建奇等主编,邹建奇负责全书统稿。其中,第 1~3 章由田伟编写,第 4、5、12 章由崔亚萍编写,第 6~10 章由邹建奇编写,第 11、13 章由蔡斌编写,第 14 章及习题答案由沙丽蓉编写,附录及书中图表由蒋鑫编写。

本书在编写过程中,得到了吉林建筑工程学院力学教研室全体教师的大力支持,并提出了许多宝贵的意见和建议,吉林建筑工程学院苏铁坚教授审阅了全书,在此一并表示衷心的感谢。

尽管这次再版已经在第 1 版基础上进行了完善和补充,但也难免会有许多疏漏,恳请读者见谅,并给我们提出宝贵意见,我们会虚心接受。

编者

2012 年 12 月 28 日

目 录

第 1 章 材料力学的基本概念	1
1.1 材料力学的任务	1
1.2 材料力学的内容	2
1.3 材料力学的基本假设	2
1.4 内力的概念	3
1.5 应力的概念	4
1.6 杆件的基本变形形式	5
第 2 章 截面的几何性质	6
2.1 截面的静矩和形心	6
2.2 极惯性矩·惯性矩·惯性积	8
2.3 惯性矩和惯性积的平行移轴公式及转轴公式	9
2.4 主惯性轴和主惯性矩	11
2.5 习题	13
第 3 章 轴向拉伸和压缩	15
3.1 轴向拉伸和压缩的概念	15
3.2 轴力及轴力图	15
3.2.1 轴力的计算	15
3.2.2 简便方法求轴力	17
3.2.3 轴力图的绘制	18
3.3 拉(压)杆内的应力	18
3.3.1 平面截面假设	18
3.3.2 横截面上的应力	19
3.4 拉(压)杆的变形	20
3.4.1 绝对变形及胡克定律	20
3.4.2 相对变形及泊松比	22
3.5 材料在拉(压)时的力学性能	24
3.5.1 拉伸(压缩)试验	24
3.5.2 低碳钢拉伸时的力学性能	25
3.5.3 铸铁在拉伸时的力学性能	27
3.5.4 其他金属材料在拉伸时的力学性能	28
3.5.5 低碳钢在压缩时的力学性能	28

3.5.6 铸铁在压缩时的力学性能	29
3.5.7 几种非金属材料的力学性能	29
3.5.8 塑性材料和脆性材料的主要区别	30
3.6 强度条件	31
3.6.1 许用应力	31
3.6.2 强度条件	31
3.6.3 强度条件的应用	31
3.7 应力集中的概念	35
3.8 习题	36
第4章 扭转变形	39
4.1 扭转的概念	39
4.2 扭矩及扭矩图	40
4.2.1 扭矩的计算	40
4.2.2 简便方法求扭矩	41
4.2.3 扭矩图的绘制	42
4.2.4 外力偶矩的计算	42
4.3 薄壁圆筒的扭转	44
4.4 圆轴扭转时的应力及强度条件	46
4.4.1 横截面上的切应力	46
4.4.2 强度条件及其应用	48
4.5 圆轴扭转时的变形及刚度条件	50
4.5.1 扭转变形的计算	50
4.5.2 刚度条件及其应用	50
4.6 习题	52
第5章 剪切变形	55
5.1 剪切的实用计算	55
5.2 挤压的实用计算	57
5.3 习题	59
第6章 弯曲内力	62
6.1 平面弯曲的概念及梁的计算简图	62
6.2 梁的内力——剪力和弯矩	65
6.3 梁的内力图——剪力图和弯矩图	69
6.4 平面刚架与曲杆的内力和内力图	77
6.5 习题	79

第 7 章 弯曲应力	83
7.1 梁横截面上的正应力及强度条件	83
7.1.1 实验分析及假设	83
7.1.2 正应力公式的推导	83
7.1.3 纯弯曲理论的推广	86
7.1.4 正应力公式的适用条件	86
7.1.5 梁的正应力强度计算	86
7.2 梁横截面上的切应力及强度条件	90
7.2.1 矩形截面梁横截面上的切应力	90
7.2.2 其他截面梁的切应力	92
7.2.3 梁的切应力强度条件	94
7.3 提高弯曲强度的措施	95
7.4 弯曲中心的概念	98
7.5 习题	100
第 8 章 弯曲变形	103
8.1 弯曲变形的基本概念	103
8.2 梁的挠曲线近似微分方程	103
8.3 积分法求梁的变形	104
8.4 叠加法求梁的变形	110
8.5 梁的刚度条件	113
8.6 提高梁刚度的措施	115
8.7 习题	116
第 9 章 应力状态和强度理论	119
9.1 平面应力状态下的应力分析	119
9.1.1 单轴应力状态下的应力分析	119
9.1.2 纯剪切应力状态下的应力分析	120
9.1.3 平面应力状态下的应力分析	122
9.2 空间应力状态下的应力分析	131
9.2.1 空间应力状态的概念	131
9.2.2 任意截面上的应力	132
9.2.3 最大切应力及其方位	133
9.3 广义胡克定律	133
9.3.1 广义胡克定律	133
9.3.2 体积应变	135
9.3.3 空间应力状态的比能	137
9.4 常用强度理论	138

9.4.1 四个强度理论	139
9.4.2 相当应力及强度条件	142
9.4.3 强度理论的应用	143
9.5 习题	145
第 10 章 组合变形	149
10.1 组合变形的概念	149
10.2 斜弯曲	150
10.3 拉(压)与弯曲	153
10.4 偏心拉(压)	155
10.4.1 偏心拉(压)的应力计算	156
10.4.2 截面核心	158
10.5 弯曲与扭转	160
10.6 习题	163
第 11 章 压杆稳定	167
11.1 压杆稳定的概念	167
11.2 理想压杆临界力的计算	168
11.2.1 两端铰支细长压杆的临界力	168
11.2.2 一端固定、一端自由细长压杆的临界力	169
11.2.3 两端固定的细长压杆的临界力	171
11.2.4 细长压杆的临界力公式	172
11.3 欧拉公式的适用范围	173
11.3.1 临界应力和柔度	173
11.3.2 欧拉公式的适用范围	173
11.3.3 临界应力总图	174
11.4 压杆的稳定计算	175
11.4.1 稳定安全系数法	175
11.4.2 稳定系数法	177
11.4.3 稳定条件的应用	180
11.5 压杆的合理截面设计	181
11.6 习题	182
第 12 章 简单超静定问题的求解	186
12.1 拉(压)杆的超静定问题	186
12.2 扭转超静定问题	192
12.3 简单超静定梁的求解	194
12.4 习题	196

第 13 章 能量法	200
13.1 概述	200
13.2 应变能和余能	200
13.2.1 应变能	200
13.2.2 余能	203
13.3 卡氏定理	205
13.3.1 卡氏第一定理	205
13.3.2 卡氏第二定理	207
13.4 能量法的应用	209
13.5 习题	210
第 14 章 动荷载与交变应力	213
14.1 概述	213
14.2 加速直线运动或等角速转动时的动应力计算	213
14.2.1 构件做等加速直线运动	213
14.2.2 构件做等角速转动	215
14.3 冲击荷载	217
14.4 交变应力	222
14.4.1 交变应力及应力-时间历程	222
14.4.2 金属疲劳破坏的概念	223
14.4.3 金属材料的 $S-N$ 曲线和疲劳极限	224
14.4.4 钢结构构件及其连接部位的 $S-N$ 曲线	225
14.4.5 钢结构构件及其连接部位的疲劳计算	226
14.5 习题	230
习题答案	233
附录 A 常见截面的几何性质	240
附录 B 常用材料的力学性能	242
附录 C 型钢表	245
附录 D 简单荷载作用下梁的挠度和转角	258
主要符号表	261
索引	263
主要参考文献	272

第1章 材料力学的基本概念

1.1 材料力学的任务

任何建筑物或机器设备都是由若干构件或零件组成的。建筑物和机器设备在正常工作的情况下,组成它们的各个构件通常都受到各种外力的作用。例如,房屋中的梁要承受楼板传给它的重量,轧钢机受到钢坯变形时的阻力等,这些力统称为作用在构件上的**荷载**。

要想使建筑物和机器设备正常地工作,就必须保证组成它们的每一个构件在荷载作用下都能正常地工作,这样才能保证整个建筑物或机械的正常工作。为了保证构件正常安全地工作,对所设计的构件在力学上有一定的要求,这里归纳为如下三点。

1. 强度要求

强度是指材料或构件抵抗破坏的能力。材料强度高,是指这种材料比较坚固,不易破坏;材料强度低,则是指这种材料不够坚固,较易破坏。在一定荷载作用下,如果构件的尺寸、材料的性能与所受的荷载不相适应,如机器中传动轴的直径太小,起吊货物的绳索过细,当传递的功率较大、货物过重时,就可能因强度不够而发生断裂,使机器无法正常工作,甚至造成灾难性的事故,显然这是工程上绝不允许的。

2. 刚度要求

刚度是指构件抵抗变形的能力。构件的刚度大,是指构件在荷载作用下不易变形,即抵抗变形的能力大;构件的刚度小,则是指构件在荷载作用下较易变形,即抵抗变形的能力小。任何物体在外力作用下,都要产生不同程度的变形。在工程中,即使构件强度足够,如果变形过大,也会影响其正常工作。例如,楼板梁在荷载作用下产生的变形过大,下面的抹灰层就会开裂、脱落;车床主轴变形过大,则影响加工精度,破坏齿轮的正常啮合,引起轴承的不均匀磨损,从而造成机器不能正常工作。因此,在工程中,根据不同的用途,要求构件在荷载作用下产生的变形不能超过一定的范围,即要求构件具有一定的刚度。

3. 稳定性要求

受压的细长杆和薄壁构件,当荷载增加时,还可能出现突然失去初始平衡形态的现象,称为**丧失稳定**,简称**失稳**。例如,房屋中受压柱如果是细长的,当压力超过一定限度后,就有可能显著地变弯,甚至弯曲折断,由此酿成严重事故。因此,细长的受压构件,必须保证其具有足够的稳定性。稳定性要求就是要求这类受压构件不能丧失稳定。

满足了上述要求,才能保证构件安全地正常工作。

材料力学就是研究构件强度、刚度和稳定性计算的科学。

构件的强度、刚度和稳定性均与所用材料的**力学性能**(材料受外力作用后在强度和变形方面所表现出来的性能)有关,这些材料的力学性能均需通过实验来测定。工程中还有些单靠理论分析解决不了的问题也需要借助于实验来解决。因此,在材料力学中,实验研究与理论分析同等重要,都是完成材料力学的任务所必需的。

当设计的构件具有足够的强度、刚度和稳定性时,便能在荷载的作用下安全、可靠地工作,说明设计满足了安全性要求。但是,合理的设计还应很好地发挥材料的潜能,以减少材料的消耗。因此,既安全适用又经济节约是合理设计的标志。

综上所述,材料力学的研究对象是构件,材料力学的任务是在保证构件既安全又经济的前提下,为构件选择合适材料,确定合理的截面形状和尺寸,提供必要的理论基础和计算方法。当然,在工程设计中解决安全适用和经济间的矛盾,仅仅从力学观点考虑是不够的,还需综合考虑其他方面的条件,如便于加工、拆装和使用等。

另外,随着生产的发展,新材料的使用,荷载情况以及工作条件的复杂化等,对构件的设计不断提出新的问题。例如,很多构件需要在随时间而交替变化的荷载作用下,或长期在高温环境下工作等,在这些情况下,对构件进行强度、刚度和稳定性的计算时,就得考虑更多的影响因素。又如,航天、航空事业的发展,出现了复合材料。为了解决这些新的问题,近年来产生了断裂力学和复合材料力学。这些学科的产生,既促进了生产的发展,又丰富了材料力学的内容。因此,生产的发展全面地推动着材料力学的发展。

1.2 材料力学的内容

实际工程中,构件的几何形状是各种各样的,简化后可大致归纳为4种:杆、板、壳和块,本书主要研究其中的杆件。凡是长度方向尺寸远大于其他两个方向尺寸的构件称为杆件,如建筑工程中的梁、柱以及机器上的传动轴等均属于杆类。杆的几何形状可用其轴线(截面形心的连线)和垂直轴线的几何图形(横截面)表示。就轴线来分类,杆可分为直杆、曲杆和折杆。轴线为曲线的杆称为曲杆,轴线为直线的杆称为直杆,轴线为折线的杆称为折杆。就横截面来分类,杆又可分为变截面(横截面是变化的)杆和等截面(各横截面均相同)杆。材料力学将着重讨论等截面的直杆(等直杆)。

1.3 材料力学的基本假设

实际事物往往是很复杂的,为了便于研究,每门学科均采用抓主要矛盾的科学抽象法——略去对所研究问题影响不大的次要因素,只保留事物的主要性质,将实际物体抽象、简化为理想模型作为研究对象。例如,在理论力学的静力学中,讨论力系作用下物体的平衡时,是把固体看成刚体,即不考虑固体形状和尺寸的改变。实际上,自然界中的任何物体在外力作用下,都要或大或小地产生变形。由于固体的可变形性质,所以又称为变形固体。严格地讲,自然界中的一切固体均属变形固体。

材料力学是研究构件的强度、刚度、稳定性等方面的问题,这些问题的研究,都要与构件在荷载作用下产生的变形相联系,因此,材料力学的研究对象必须看成为可变形的固体。

变形固体在外力作用下产生的变形,就其变形性质可分为弹性变形和塑性变形。弹性是指变形固体在去掉其所受外力后能恢复原来形状和尺寸的性质。工程中所用的材料,当所受荷载不超过一定的范围时,绝大多数的材料在撤去荷载后均可恢复原状,但当荷载过大时,则在荷载撤去后只能部分地复原而残留下一部分不能消失的变形。在撤去荷载后能完全消失的那一部分变形称为弹性变形,不能消失的那一部分变形则称为塑性变形。

在材料力学的研究中,对变形固体作了如下的基本假设。

1. 连续均匀假设

连续是指材料内部没有空隙,均匀是指材料的性质各处都一样。连续均匀假设认为变形固体内毫无间隙地充满了物质,而且各处的力学性能都相同。

2. 各向同性假设

各向同性假设认为材料沿不同的方向具有相同的力学性质。常用的工程材料如钢、铸铁、玻璃以及浇筑很好的混凝土等,都可以认为是各向同性材料。有些材料如轧制钢材、竹、木材等,沿不同方向的力学性质是不同的,称为各向异性材料。本书主要研究各向同性材料。

按照连续均匀、各向同性假设而理想化了的变形固体称为理想变形固体。采用理想变形固体模型不但使理论分析和计算得到简化,而且计算所得的结果在大多数情况下能满足工程精度要求。

工程中大多数构件在荷载作用下,其几何尺寸的改变量与构件本身的尺寸相比都很微小,称这类变形为“小变形”。由于变形很微小,所以在研究构件的平衡、运动等问题时,可忽略其变形,采用构件变形前的原始尺寸进行计算,从而使计算大为简化。但是,有些构件在荷载作用下其几何尺寸的改变量可能很大,称其为“大变形”。在材料力学中,将限于研究小变形问题。

综上所述,在材料力学中,是把实际材料看成均匀、连续、各向同性的可变形固体,且在大多数情况下局限在弹性变形范围内和小变形条件下进行研究。

1.4 内力的概念

如前所述,材料力学的研究对象是构件,对于所研究的构件而言,其他物体作用于该构件上的力均为外力。

构件在受到外力作用而变形时,其内部各部分之间将产生相互作用力,这种由外力的作用而引起的物体内部的相互作用力,称为材料力学中所研究的内力。内力随着外力的变化而变化,外力增加,内力也增加,外力去掉后,内力也将随之消失。显然,作用在构件上的外力使其产生变形,而内力的作用则力图使受力构件恢复原状,内力对变形起抵抗和阻止作用。由于假设了物体是连续均匀的,因此在物体内部相邻部分之间相互作用的内力,实际上是一个连续分布的内力系,而将分布内力系的合成结果(力或力偶),简称为内力。

在研究构件的强度、刚度、稳定性等问题时,经常需要知道构件在已知外力作用下某一截面上的内力值。与理论力学中计算物系内力的方法相仿,为了显示和计算某一截面上的内力,可在该截面处用一假想的平面将构件截为两部分,取其中任一部分为研究对象,弃去另一部分,将弃去部分对研究对象的作用以力的形式来表示,此力就是该截面上的内力。

这里需指明一点:在研究内力与变形时,对“等效力系”的应用应该慎重,不能机械地不加分析地任意应用。一个力(或力系)用别的等效力系代替,虽然对整体平衡没有影响,但对构件的内力与变形来说,则有很大差别。

计算内力的方法,通常称为截面法。其步骤如下:

- ① 假想沿所求内力的截面将构件分为两部分;

- ② 取其中任一部分为研究对象,并画其受力图;
- ③ 列研究对象的平衡方程,并求解内力。

1.5 应力的概念

前面讨论了构件内力的概念及计算方法,但是,知道内力的大小还不能判断构件的强度是否足够。经验告诉我们,有两根材料相同的拉杆,一根较粗,一根较细,在相同的轴向拉力 F 作用下,内力相等,当力 F 增大时,细杆必先断。这是由于内力仅代表内力系的总和,而不能表明截面上各点受力的强弱程度。为了解决强度问题,不仅需要知道构件可能沿哪个截面破坏,而且还需要知道截面上哪个点处最危险。这样,就需要进一步研究内力在截面上各点处的分布情况,因而引入了应力的概念。

如图 1.1(a)所示为任一受力构件,在 $m-m$ 截面上任一点 K 的周围取一微小面 ΔA ,并设作用在该面积上的内力为 ΔF ,那么 ΔF 与 ΔA 的比值,称为 ΔA 上的平均应力,并用 p_m 表示,即

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1-1)$$

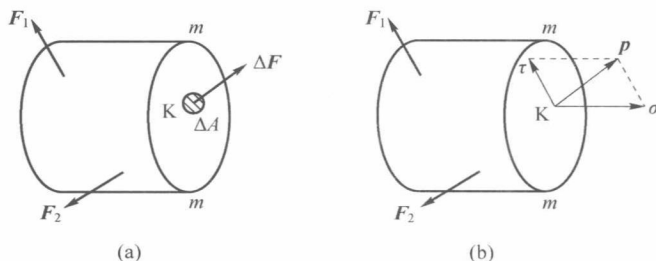


图 1.1 截面上任一点的应力

当内力沿截面分布不均匀时,平均应力 p_m 的值随 ΔA 的大小而变化,它不能确切表示 K 点受力强弱的程度,只有当 ΔA 趋于零时, p_m 的极限 p 方代表 K 点受力强弱的程度,即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1-2)$$

p 称为截面 $m-m$ 上点 K 处的总应力。显然,应力 p 的方向即 ΔF 的极限方向。应力 p 是矢量,通常沿截面的法向与切向分解为两个分量。沿截面法向的应力分量 σ 称为正应力;沿截面切向的应力分量 τ 称为切应力。它们可以分别反映垂直于截面与切于截面作用的两种内力系的分布情况。

从应力的定义可见,应力具有如下特征。

① 应力定义在受力物体的某一截面上的某一点处,因此,讨论应力时必须明确是哪一个截面上的哪一个点处。

② 在某一截面上一点处的应力是矢量。对于应力分量,通常规定,正应力方向是离开截面的为正,指向截面的为负;切应力对截面内部(靠近截面)的一点产生顺时针方向的力矩时为正,反之则为负,如图 1.1(b)中所示的正应力为正,切应力为负。

③ 应力的量纲为 $ML^{-1}T^{-2}$ 。其国际单位是牛/米² (N/m^2),称为帕斯卡(Pa),即

$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ 。应力常用的单位为 MPa , $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$ 。

1.6 杆件的基本变形形式

工程中的杆件所受的外力是多种多样的,因此,杆的变形也是各种各样的,但杆件变形的基本形式总不外乎以下4种。

1. 轴向拉伸或压缩变形

在一对方向相反、作用线与杆轴线重合的外力作用下,杆件的主要变形是长度的改变。这种变形形式称为轴向拉伸(如图1.2(a)所示)或轴向压缩(如图1.2(b)所示)。

2. 剪切变形

在一对相距很近、大小相等、方向相反的横向外力作用下,杆件的横截面将沿外力作用方向发生错动(如图1.2(c)所示),这种变形形式称为剪切。

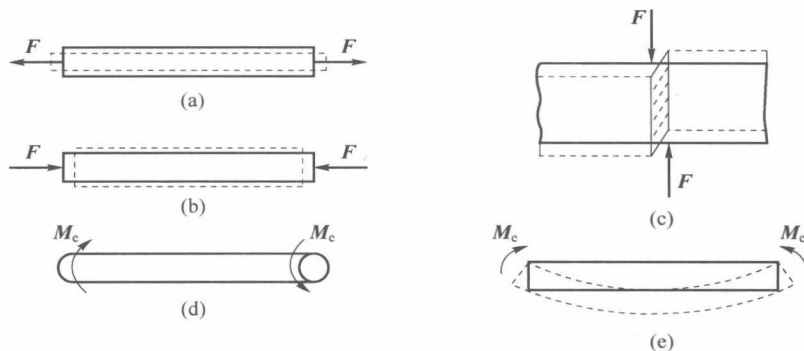


图 1.2 杆件的基本变形

3. 扭转变形

在一对转向相反、作用面垂直于杆轴线的外力偶作用下,杆的任意二横截面将发生相对转动,而轴线仍维持直线,这种变形形式称为扭转(如图1.2(d)所示)。

4. 弯曲变形

在一对转向相反、作用面在杆件的纵向平面(即包含杆轴线在内的平面)内的外力偶作用下,杆件将在纵向平面内发生弯曲。这种变形形式称为弯曲(如图1.2(e)所示)。

工程实际中的杆件可能同时承受不同形式的外力,常常同时发生两种或两种以上的基本变形,这种变形情况称为组合变形。本书将先分别讨论杆件的每一种基本变形,然后再分析比较复杂的组合变形问题。

第2章 截面的几何性质

2.1 截面的静矩和形心

计算杆在外力作用下的应力和变形时,用到杆横截面的几何性质,例如,在杆的拉(压)计算中用到横截面的面积 A ,在圆杆扭转计算中用到横截面的极惯性矩 I_P ,以及在梁的弯曲计算中所用的横截面的静矩、惯性矩等。

1. 静矩

设任意形状截面如图 2.1 所示,其截面积为 A 。从截面中坐标为 (x, y) 处取一面积元素 dA ,则 $x dA$ 和 $y dA$ 分别称为该面积元素 dA 对于 y 轴和 x 轴的静矩,而以下积分:

$$S_y = \int_A x dA, \quad S_x = \int_A y dA \quad (2-1)$$

分别定义为该截面对于 y 轴和 x 轴的静矩。上述积分应遍及整个截面的面积 A 。

2. 形心

从理论力学已知,在 Oxy 坐标系中,均质等厚薄板的重心坐标为

$$x_c = \frac{\int_A x dA}{A}, \quad y_c = \frac{\int_A y dA}{A}$$

而均质薄板的重心与该薄板平面图形的形心是重合的,所以,上式可用来计算截面(图 2.1)的形心坐标。于是可将上式改写为

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} \quad (2-2)$$

因此,在知道截面对于 y 轴和 x 轴的静矩以后,即可求得截面形心的坐标。若将式(2-2)改写为

$$S_y = A x_c, \quad S_x = A y_c \quad (2-3)$$

则在已知截面的面积 A 及其形心的坐标 x_c, y_c 时,就可求得截面对于 y 轴和 x 轴的静矩。

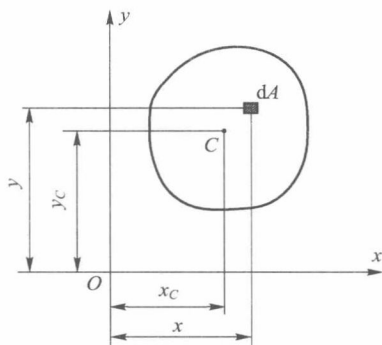


图 2.1 形心和静矩

由式(2-2)和式(2-3)可见,若截面对于某一轴的静矩等于零,则该轴必通过截面的形心;反之,截面对通过其形心轴的静矩恒等于零。

应该注意,截面的静矩是对于一定的轴而言的,同一截面对不同坐标轴的静矩不同。静矩可能是正值或负值,也可能为零。其量纲为[长度]³,常用单位为 m^3 或 mm^3 。

当截面由若干简单图形(如矩形、圆形或三角形等)组成时,由于简单图形的面积及其形心位置均为已知,可分别计算简单图形对该轴的静矩,然后再代数相加,即

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_i, \quad S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_i \quad (2-4)$$

式中, A_i 和 x_i, y_i 分别代表各简单图形的面积和形心坐标, n 为简单图形的个数。将式(2-4)代入式(2-2), 可得计算组合截面形心坐标的公式, 即

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2-5)$$

例题 2.1 试计算图 2.2 所示三角形截面对于与其底边重合的 x 轴的静矩。

解: 取平行于 x 轴的狭长条(见图 2.2)作为面积元素, 即 $dA = b(y)dy$ 。由相似三角形关系, 可知 $b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$, 因此有 $dA = \frac{b}{h}(h-y)dy$ 。将其代入式(2-1)的第二式, 即得

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y dy = b \int_0^h y dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^2}{6}$$

例题 2.2 对称 T 形截面, 其尺寸如图 2.3 所示, 求该截面的形心位置。

解: 因图形相对 y 轴对称, 其形心一定在该对称轴上。取一对直角参考坐标 x, y , 其中 $x_c = 0$, 只需计算 y_c 值。将截面分成 I、II 两个矩形, 则

$$A_I = 0.072 \text{ m}^2 \quad A_{II} = 0.08 \text{ m}^2$$

$$y_I = 0.46 \text{ m} \quad y_{II} = 0.2 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_I y_I + A_{II} y_{II}}{A_I + A_{II}} = 0.323 \text{ m}$$

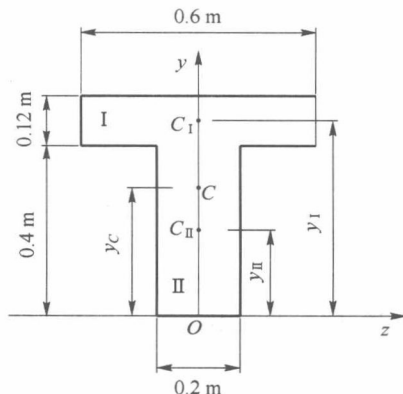


图 2.3 例题 2.2 图

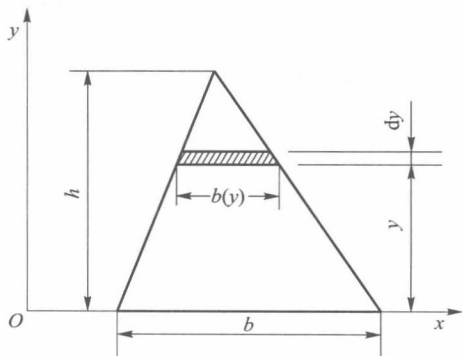


图 2.2 例题 2.1 图

2.2 极惯性矩 · 惯性矩 · 惯性积

1. 极惯性矩

设一面积为 A 的任意形状截面如图 2.4 所示。从截面中坐标为 (x, y) 处取一面积元素 dA , 则 dA 与其坐标原点距离平方的乘积 $\rho^2 dA$, 称为面积元素对 O 点的极惯性矩。

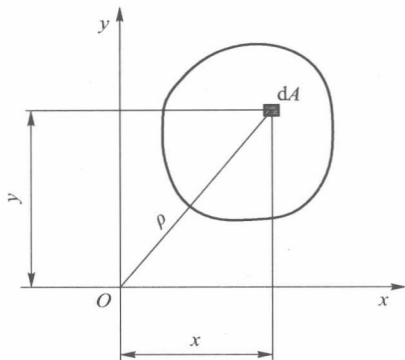


图 2.4 极惯性矩、惯性矩和惯性积

而以下积分

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \quad (2-6)$$

定义为整个截面对 O 点的极惯性矩。上述积分应遍及整个截面面积 A 。显然, 极惯性矩的数值恒为正值, 其单位为 m^4 或 mm^4 。

2. 惯性矩

面积元素 dA 与其至 y 轴或 x 轴距离平方的乘积 $x^2 dA$ 或 $y^2 dA$, 分别称为该面积元素对于 y 轴或 x 轴的惯性矩。而以下积分

$$I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA \quad (2-7)$$

则分别定义为整个截面对 y 轴和 x 轴的惯性矩。同样, 上述积分应遍及整个截面的面积 A , 由图 2.4 可见, $\rho^2 = x^2 + y^2$, 故有

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x \quad (2-8)$$

式(2-8)表明: 截面对任意一对互相垂直轴的惯性矩之和, 等于截面对该二轴交点的极惯性矩。

3. 惯性积

面积元素 dA 与其分别至 y 轴和 x 轴距离的乘积 $xy dA$, 称为该面积元素对于两坐标轴的惯性积。而以下积分

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (2-9)$$

定义为整个截面对 x, y 两坐标轴的惯性积, 其积分也应遍及整个截面的面积。

从上述定义可见, 惯性矩 I_x, I_y 和惯性积 I_{xy} 都是对轴而言的, 同一截面对不同轴的数值不同, 极惯性矩是对点而言的, 同一截面对不同点的极惯性矩值也是各不相同。惯性矩恒为正值, 而惯性积则可正可负, 也可能等于零。若 x, y 两坐标轴中有一个为截面的对称轴, 则其惯性积 I_{xy} 恒等于零。惯性矩和惯性积的单位相同, 均为 m^4 或 mm^4 。

4. 惯性半径

在某些应用中, 将惯性矩表示为截面面积 A 与某一长度平方的乘积, 即:

$$I_y = i_y^2 A, \quad I_x = i_x^2 A \quad (2-10a)$$

式中, i_y 和 i_x 分别称为截面对 y 轴和 x 轴的惯性半径, 其单位为 m 或 mm 。当已知截面