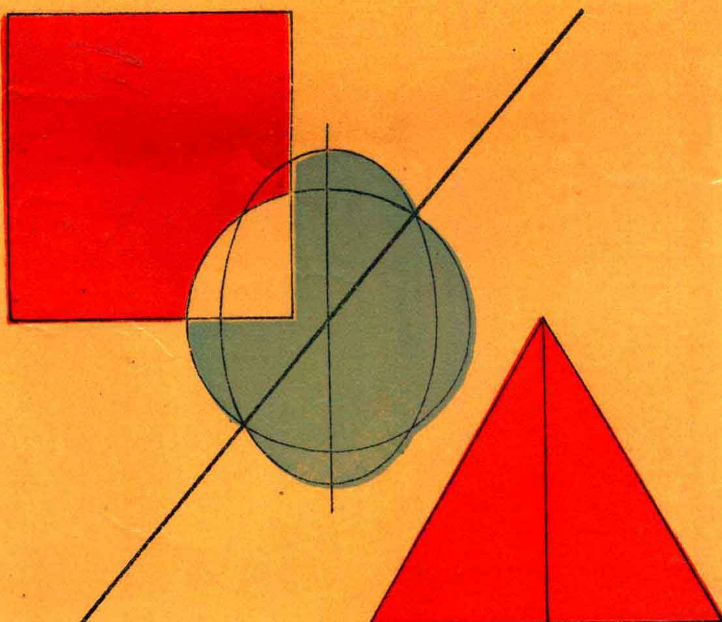
初等数学应用手册

基本知识与解题指导

主　编　刘培进　王运生



中国矿业大学出版社

初等数学应用手册

——基本知识与解题指导

刘培进　王运生　主编

中国矿业大学出版社

责任编辑　孙树朴　姜　华
责任校对　许秀荣

初等数学应用手册
——基本知识与解题指导
刘培进　王运生　主编

中国矿业大学出版社出版发行
新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/32　印张 11.625　字数 251 千字
1995 年 9 月第一版　　1996 年 3 月第一次印刷
印数 1－7200 册

ISBN 7-81040-408-3

O·25　　　　定价:10.00 元

《初等数学应用手册》编委名单

主　编　刘培进　王运生

副主编　丁殿坤　尹明义　王相国
刘持曾　田绪海　许曰才
李显金　李汝彬　赵　光
张学军　盛敏奇

编　委　王金芝　边龙河　孙守斌
罗衍法　杨庆海　韩育林
侯加彪　郑新建　秦宝丰
郭言坤　段大锋　张悦忍
蔡尔恭　焦方雷

前　言

本手册是由山东煤炭系统部分数学教师联合编写的。在编写过程中，特别注重围绕中学现行教材，体现了为学生学习服务、为学生复习服务、为教师教学服务的宗旨。

本手册系统总结了初等数学的基本知识，主要包括：数、式、方程与不等式、函数与图像、三角、数列极限、排列结合、概率统计、平面几何、立体几何、平面解析几何等。在此基础上，对中学数学解题方法结合例题进行了分析指导，并由浅至深收录了部分习题，适合于初高中学生和部分中专生学习数学之用，也适合于中学数学教师和理工科大学生参考之用。

本手册编写分工如下：

第一、二、三、四章由丁殿坤、田绪海、盛敏奇、韩育林、李汝彬、张学军、王金芝、王相国等老师编写。

第五、六、七、八章由许曰才、赵光、罗衍法、郭言坤、尹明义、李显金、郑新建、杨庆海、侯加彪等老师编写。

第九、十、十一章由王运生、刘培进、孙守斌、秦宝丰、蔡尔恭、段大锋、张悦忍、焦方雷等老师编写。

刘培进、王运生两同志对全书进行了修改和审订，张本利等同志对该书的编写工作提出了宝贵意见。

限于编者的水平，本手册肯定存在着谬误之处，敬请读者批评指正。

编　者

1995 年 3 月于泰安

目　录

第一章　数

第一节　基本知识

一、有理数

1. 有关概念

(1) 正数与负数　像3,0.5,$8\frac{1}{5}$,1995等大于零的数,叫做正数;像-3,-0.5,$-8\frac{1}{5}$,-137等在正数前面加上“$-$”号的数,叫做负数。0既不是正数,也不是负数。

(2) 有理数　正数、负数和零统称有理数。

(3) 数轴　规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。有理数可以用数轴上的点表示出来。

(4) 相反数　只有符号不同的两个数互称为相反数。零的相反数是零。

(5) 绝对值　一个数a的绝对值就是数轴上表示a的点与原点的距离。数a的绝对值记作$|a|$,即:

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}。$$

(6) 有理数的大小比较　正数都大于零;零大于一切负

数；正数大于一切负数；两个正数，绝对值大的数较大；两个负数，绝对值大的数反而小。

2. 有理数的运算

（1）有理数的加法法则

① 同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加。

② 异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值。互为相反数的两个数相加得零。

③ 一个数与零相加，仍得这个数。

（2）有理数减法法则　减去一个数，等于加上这个数的相反数。数 a 减去数 b 时，可表示为：$a-b=a+(-b)$。

（3）有理数的乘法法则　两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘。任何数与零相乘都得零。

由有理数的乘法法则可以推知：几个不等于零的数相乘，积的符号由负因数的个数决定。当有奇数个负因数时，积为负；当有偶数个负因数时，积为正。

（4）有理数的除法法则　两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除。零除以任何不等于零的数得零（零不能做除数）。

（5）倒数　乘积是 1 的两个数互为倒数。

除以一个数等于乘以这个数的倒数。

（6）乘方　求几个相同因数积的运算叫做乘方。乘方的结果叫做幂。数 a 的 n 次方表示为 a^n，a 叫做底数，n 叫做指数。

（7）有理数的运算律

① 加法交换律：$a+b=b+a$.

② 加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

③ 乘法交换律：$ab=ba$.

④ 乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$.

⑤ 分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

二、实数

1. 有关概念

(1) 平方根　如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根。

(2) 立方根　如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根。

(3) n 次方根　如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根。

(4) 算术根　正数 a 的正的方根，叫做 a 的算术根。零的算术根仍然是零。

注意：必须严格区分“方根”与“算术根”两个不同的概念。只有“非负数”才有偶次方根。

(5) 无理数　无限不循环小数叫做无理数。

(6) 实数　有理数与无理数统称为实数，常用 R 表示。

(7) 实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零(0)}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数(有限小数和无限循环小数)}\end{cases}\\ \text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}$$

(8) 实数的相反数、绝对值及实数的大小比较与有理数类同

把数从有理数扩充到实数以后，实数和数轴上的点就成为一一对应的关系。

2. 实数的运算

(1) 实数的四则运算(加、减、乘(乘方)、除)的法则和运算律都与有理数相同

(2) 开方　求一个数 a 的 n 次方根的运算叫做开 n 次方。例如,求数 a 的平方根的运算叫做开平方。

开方与乘方互为逆运算,但必须在实数范围内。负数不能开偶次方。

三、复数

1. 复数的有关概念

(1) 虚数单位"i"　$i=\sqrt{-1}, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i^{4n+4}=1$.

(2) 虚数　形如 $a+bi$($a,b\in R$,且 $b\neq 0$)的数叫做虚数。a,b 分别叫做虚数的实部与虚部。当 $a=0,b\neq 0$ 时叫做纯虚数。

(3) 复数　实数和虚数统称复数。

(4) 复数的相等　如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等,称这两个复数相等。记作 $a+bi=c+di$.

(5) 复数的模　$|Z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.

(6) 复数的表示形式　复数有"代数"、"三角"、"指数"三种表示形式。

① 代数式:$a+bi$.

② 三角式:$r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 其中 θ 叫做复数的幅角,$0\leqslant\theta<2\pi$ 的幅角 θ 的值,叫做幅角的主值;r 称为复数的模数。

③ 指数式:$re^{i\theta}$。

④ 三种表示式的相互关系:

若 $Z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$，则有

$$\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta.\end{cases}$$

$$\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2},\\ \mathrm{tg}\theta=\dfrac{b}{a}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}.\end{cases}$$

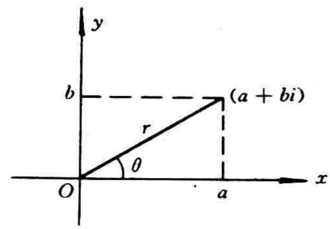


图 1-1

2. 复数的运算

(1) 加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

(2) 减法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

(3) 乘法

① $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$.

② $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

③ $r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

(4) 除法

① $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

② $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

③ $\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

(5) 乘方

① $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

② $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

(6) 开方

① $\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$,

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

② $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

3. 共轭复数及其性质

(1) 定义　$Z=a+bi$ 与 $\bar{Z}=a-bi$ 互称为共轭复数。

(2) 性质

$$|\bar{Z}| = |Z|$$

$$\bar{Z}Z = |\bar{Z}|^2 = |Z|^2$$

$$\overline{Z_1 \pm Z_2} = \overline{Z_1} \pm \overline{Z_2}$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

4. 复数的模的性质

$$|Z_1+Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1-Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$|Z^n| = |Z|^n$$

$$|\sqrt[n]{Z}| = \sqrt[n]{|Z|}$$

*四、数制与换算

1. 几种常用进位制数

(1) 二、八、十、十六进制数的按权展开式

设 n 为整数部分的位数，m 为小数部分位数，则

① 二进制数

$$X_2 = a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1} + \cdots + a_{-m} \cdot 2^{-m}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} a_{-j} \cdot 2^{-j}$$

注：除了用 X_2 表示 X 是一个二进制数外，还可用 XB 的形式表示 X 是二进制数。如 $(1011.11)_2$ 也可表示为 1011.11B。

② 八进制数

$$X_8 = a_n \cdot 8^{n-1} + a_{n-1} \cdot 8^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 8^0 + a_{-1} \cdot 8^{-1} + \cdots + a_{-m} \cdot 8^{-m}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 8^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} a_{-j} \cdot 8^{-j}$$

注：除了用 X_8 表示 X 是一个八进制数外，还可用 XQ 的形式表示 X 是八进制数。如 $(57.24)_8$ 也可表示为 57.24Q。

③ 十进制数

$$X_{10} = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \cdots + a_{-m} \cdot 10^{-m}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 10^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} a_{-j} \cdot 10^{-j}$$

④ 十六进制数

$$X_{16} = a_n \cdot 16^{n-1} + a_{n-1} \cdot 16^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 16^0 + a_{-1} \cdot 16^{-1} + \cdots + a_{-m} \cdot 16^{-m}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 16^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} a_{-j} \cdot 16^{-j}$$

注：除了用 X_{16} 表示 X 是一个十六进制数外，还可用 XH 表示 X 是十六进制数。如 $(3AC.98)_{16}$ 也可以表示为 3AC.98H。

一般地，r 进制数可表示为：

$$X_r = a_n \cdot r^{n-1} + a_{n-1} \cdot r^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot r^0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + \cdots + a_{-m} \cdot r^{-m}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot r^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} a_{-j} \cdot r^{-j}$$

（2）二、八、十、十六进制数的数码符号

十进制	二进制	八进制	十六进制
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	*A*
11	1011	13	*B*
12	1100	14	*C*
13	1101	15	*D*
14	1110	16	*E*
15	1111	17	*F*
16	10000	20	10