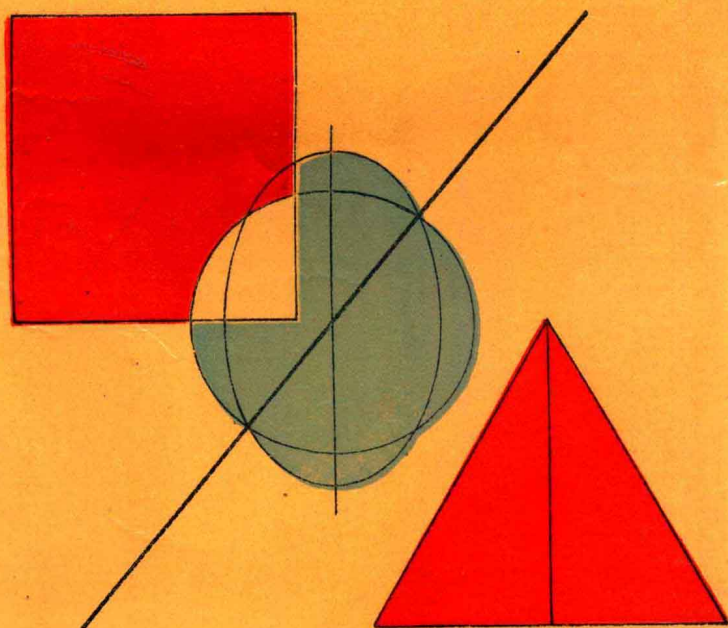


初等数学应用手册

基本知识与解题指导

主 编 刘培进 王运生



中国矿业大学出版社

初等数学应用手册

——基本知识 with 解题指导

刘培进 王运生 主编

中国矿业大学出版社

责任编辑 孙树朴 姜 华
责任校对 许秀荣

初等数学应用手册
——**基本知识与解题指导**
刘培进 王运生 主编

中国矿业大学出版社出版发行
新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 $1/32$ 印张 11.625 字数 251 千字
1995 年 9 月第一版 1996 年 3 月第一次印刷
印数 1—7200 册

ISBN 7-81040-408-3

O·25

定价:10.00 元

《初等数学应用手册》编委名单

主 编	刘培进	王运生	
副主编	丁殿坤	尹明义	王相国
	刘持曾	田绪海	许曰才
	李显金	李汝彬	赵 光
	张学军	盛敏奇	
编 委	王金芝	边龙河	孙守斌
	罗衍法	杨庆海	韩育林
	侯加彪	郑新建	秦宝丰
	郭言坤	段大锋	张悦忍
	蔡尔恭	焦方雷	

前 言

本手册是由山东煤炭系统部分数学教师联合编写的。在编写过程中,特别注重围绕中学现行教材,体现了为学生学习服务、为学生复习服务、为教师教学服务的宗旨。

本手册系统总结了初等数学的基本知识,主要包括:数、式、方程与不等式、函数与图像、三角、数列极限、排列组合、概率统计、平面几何、立体几何、平面解析几何等。在此基础上,对中学数学解题方法结合例题进行了分析指导,并由浅至深收录了部分习题,适合于初高中学生和部分中专生学习数学之用,也适合于中学数学教师和理工科大学生参考之用。

本手册编写分工如下:

第一、二、三、四章由丁殿坤、田绪海、盛敏奇、韩育林、李汝彬、张学军、王金芝、王相国等老师编写。

第五、六、七、八章由许曰才、赵光、罗衍法、郭言坤、尹明义、李显金、郑新建、杨庆海、侯加彪等老师编写。

第九、十、十一章由王运生、刘培进、孙守斌、秦宝丰、蔡尔恭、段大锋、张悦忍、焦方雷等老师编写。

刘培进、王运生两同志对全书进行了修改和审订,张本利等同志对该书的编写工作提出了宝贵意见。

限于编者的水平,本手册肯定存在着谬误之处,敬请读者批评指正。

编 者

1995年3月于泰安

目 录

第一章 数	(1)
第一节 基本知识	(1)
一 有理数	(1)
二 实数	(3)
三 复数	(4)
四 数制与换算	(6)
第二节 例题与解题方法指导	(10)
第三节 练习	(18)
第二章 式	(22)
第一节 基本知识	(22)
一 式的分类	(22)
二 有理式	(22)
三 无理式	(26)
四 指数式与对数式	(28)
第二节 例题与解题方法指导	(29)
第三节 练习	(44)
第三章 方程与不等式	(49)
第一节 基本知识	(49)
一 等式	(49)
二 方程 I (初中水平).....	(49)
三 方程 II (高中水平).....	(53)

四	列方程解应用题	(59)
五	不等式	(59)
第二节	例题与解题方法指导	(63)
第三节	练习	(82)
第四章	函数与图像	(90)
第一节	基本知识	(90)
一	函数 I (初中水平)	(90)
二	函数 II (高中水平)	(97)
第二节	例题与解题方法指导	(110)
第三节	练习	(132)
第五章	三角	(140)
第一节	基本知识	(140)
一	$0^\circ \sim 360^\circ$ 角的三角函数	(140)
二	三角形的基本定理	(141)
三	任意角的三角函数	(145)
第二节	例题与解题方法指导	(154)
第三节	练习	(172)
第六章	数列 极限 数学归纳法	(178)
第一节	基本知识	(178)
一	数列	(178)
二	极限	(180)
三	数学归纳法	(181)
第二节	例题与解题方法指导	(182)
第三节	练习	(195)
第七章	排列 组合 二项式定理	(199)
第一节	基本知识	(199)
一	排列	(199)

二 组合	(200)
三 二项式定理	(200)
第二节 例题与解题方法指导	(201)
第三节 练习	(215)
第八章 概率 统计 近似计算	(219)
第一节 基本知识	(219)
一 概率	(219)
二 统计	(221)
三 近似计算	(222)
第二节 例题与解题方法指导	(222)
第三节 练习	(234)
第九章 平面几何	(239)
第一节 基本知识	(239)
一 基本概念	(239)
二 平行线、相交线	(241)
三 三角形	(243)
四 四边形	(246)
五 比例线段定理	(248)
六 圆与正多边形	(250)
七 有关计算公式	(253)
八 命题、轨迹与作图	(257)
第二节 例题与解题方法指导	(260)
第三节 练习	(283)
第十章 立体几何	(292)
第一节 基本知识	(292)
一 直线与平面	(292)
二 多面体与旋转体	(295)

三 祖暅定理	(300)
第二节 例题与解题方法指导	(300)
第三节 练习	(315)
第十一章 平面解析几何	(319)
第一节 基本知识	(319)
一 直线	(319)
二 圆锥曲线	(324)
三 参数方程与极坐标	(330)
第二节 例题与解题方法指导	(334)
第三节 练习	(348)
附录一 微积分基本知识	(352)
附录二 常用数学符号	(358)

第一章 数

第一节 基本知识

一、有理数

1. 有关概念

(1) 正数与负数 像 $3, 0.5, 8\frac{1}{5}, 1995$ 等大于零的数, 叫做正数; 像 $-3, -0.5, -8\frac{1}{5}, -137$ 等在正数前面加上“ $-$ ”号的数, 叫做负数。0 既不是正数, 也不是负数。

(2) 有理数 正数、负数和零统称有理数。

(3) 数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。有理数可以用数轴上的点表示出来。

(4) 相反数 只有符号不同的两个数互称为相反数。零的相反数是零。

(5) 绝对值 一个数 a 的绝对值就是数轴上表示 a 的点与原点的距离。数 a 的绝对值记作 $|a|$, 即:

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

(6) 有理数的大小比较 正数都大于零; 零大于一切负

数;正数大于一切负数;两个正数,绝对值大的数较大;两个负数,绝对值大的数反而小。

2. 有理数的运算

(1) 有理数的加法法则

① 同号两数相加,取原来的符号,并把绝对值相加。

② 异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值。互为相反数的两个数相加得零。

③ 一个数与零相加,仍得这个数。

(2) 有理数减法法则 减去一个数,等于加上这个数的相反数。数 a 减去数 b 时,可表示为: $a-b=a+(-b)$ 。

(3) 有理数的乘法法则 两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘。任何数与零相乘都得零。

由有理数的乘法法则可以推知:几个不等于零的数相乘,积的符号由负因数的个数决定。当有奇数个负因数时,积为负;当有偶数个负因数时,积为正。

(4) 有理数的除法法则 两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除。零除以任何不等于零的数得零(零不能做除数)。

(5) 倒数 乘积是 1 的两个数互为倒数。

除以一个数等于乘以这个数的倒数。

(6) 乘方 求几个相同因数积的运算叫做乘方。乘方的结果叫做幂。数 a 的 n 次方表示为 a^n , a 叫做底数, n 叫做指数。

(7) 有理数的运算律

① 加法交换律: $a+b=b+a$ 。

② 加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

③ 乘法交换律: $ab=ba$.

④ 乘法结合律: $(ab)c=a(bc)$.

⑤ 分配律: $a(b+c)=ab+ac$.

二、实数

1. 有关概念

(1) 平方根 如果 $x^2=a$, 那么 x 叫做 a 的平方根。

(2) 立方根 如果 $x^3=a$, 那么 x 叫做 a 的立方根。

(3) n 次方根 如果 $x^n=a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根。

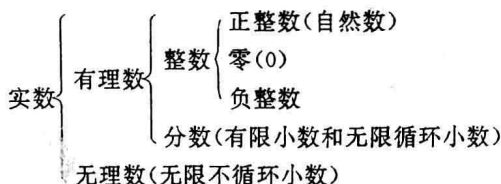
(4) 算术根 正数 a 的正的方根, 叫做 a 的算术根。零的算术根仍然是零。

注意: 必须严格区分“方根”与“算术根”两个不同的概念。只有“非负数”才有偶次方根。

(5) 无理数 无限不循环小数叫做无理数。

(6) 实数 有理数与无理数统称为实数, 常用 R 表示。

(7) 实数的分类



(8) 实数的相反数、绝对值及实数的大小比较与有理数类同

把数从有理数扩充到实数以后, 实数和数轴上的点就成为一一对应的关系。

2. 实数的运算

(1) 实数的四则运算(加、减、乘(乘方)、除)的法则和运算律都与有理数相同

(2) 开方 求一个数 a 的 n 次方根的运算叫做开 n 次方。例如,求数 a 的平方根的运算叫做开平方。

开方与乘方互为逆运算,但必须在实数范围内。负数不能开偶次方。

三、复数

1. 复数的有关概念

(1) 虚数单位“ i ” $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, $i^{4n+4} = 1$ 。

(2) 虚数 形如 $a+bi$ ($a, b \in R$, 且 $b \neq 0$) 的数叫做虚数。 a, b 分别叫做虚数的实部与虚部。当 $a=0, b \neq 0$ 时叫做纯虚数。

(3) 复数 实数和虚数统称复数。

(4) 复数的相等 如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等,称这两个复数相等。记作 $a+bi=c+di$ 。

(5) 复数的模 $|Z| = |a+bi| = r = \sqrt{a^2+b^2}$ 。

(6) 复数的表示形式 复数有“代数”、“三角”、“指数”三种表示形式。

① 代数式: $a+bi$ 。

② 三角式: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 。其中 θ 叫做复数的幅角, $0 \leq \theta < 2\pi$ 的幅角 θ 的值,叫做幅角的主值; r 称为复数的模数。

③ 指数式: $re^{i\theta}$ 。

④ 三种表示式的相互关系:

若 $Z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, 则有

$$\begin{cases} a = r\cos\theta, \\ b = r\sin\theta. \\ r = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}. \\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{cases}$$

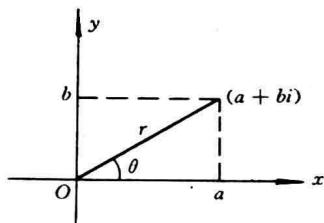


图 1-1

2. 复数的运算

(1) 加法 $(a + bi) + (c +$

$di) = (a + c) + (b + d)i.$

(2) 减法 $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$

(3) 乘法

$$\textcircled{1} (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

$$\textcircled{2} r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

$$\textcircled{3} r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

(4) 除法

$$\textcircled{1} \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

$$\textcircled{2} \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

$$\textcircled{3} \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

(5) 乘方

$$\textcircled{1} [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

$$\textcircled{2} (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

(6) 开方

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

$$\textcircled{2} \sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

3. 共轭复数及其性质

(1) 定义 $Z = a + bi$ 与 $\bar{Z} = a - bi$ 互称为共轭复数。

(2) 性质

$$|\bar{Z}| = |Z|$$

$$\bar{Z}Z = |\bar{Z}|^2 = |Z|^2$$

$$\overline{Z_1 \pm Z_2} = \bar{Z}_1 \pm \bar{Z}_2$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

4. 复数的模的性质

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1 - Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$|Z^n| = |Z|^n$$

$$|\sqrt[n]{Z}| = \sqrt[n]{|Z|}$$

四、数制与换算

1. 几种常用进位制数

(1) 二、八、十、十六进制数的按权展开式

设 n 为整数部分的位数, m 为小数部分位数, 则

① 二进制数

$$\begin{aligned} X_2 &= a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1} \\ &\quad + \cdots + a_{-m} \cdot 2^{-m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{i-1} + \sum_{j=1}^m a_{-j} \cdot 2^{-j} \end{aligned}$$

注:除了用 X_2 表示 X 是一个二进制数外,还可用 XB 的形式表示 X 是二进制数。如 $(1011.11)_2$ 也可表示为 $1011.11B$ 。

② 八进制数

$$\begin{aligned} X_8 &= a_n \cdot 8^{n-1} + a_{n-1} \cdot 8^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 8^0 + a_{-1} \cdot 8^{-1} \\ &\quad + \cdots + a_{-m} \cdot 8^{-m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot 8^{i-1} + \sum_{j=1}^m a_{-j} \cdot 8^{-j} \end{aligned}$$

注:除了用 X_8 表示 X 是一个八进制数外,还可用 XQ 的形式表示 X 是八进制数。如 $(57.24)_8$ 也可表示为 $57.24Q$ 。

③ 十进制数

$$\begin{aligned} X_{10} &= a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} \\ &\quad + \cdots + a_{-m} \cdot 10^{-m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot 10^{i-1} + \sum_{j=1}^m a_{-j} \cdot 10^{-j} \end{aligned}$$

④ 十六进制数

$$\begin{aligned} X_{16} &= a_n \cdot 16^{n-1} + a_{n-1} \cdot 16^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 16^0 + a_{-1} \cdot 16^{-1} \\ &\quad + \cdots + a_{-m} \cdot 16^{-m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot 16^{i-1} + \sum_{j=1}^m a_{-j} \cdot 16^{-j} \end{aligned}$$

注:除了用 X_{16} 表示 X 是一个十六进制数外,还可用 XH 表示 X 是十六进制数。如 $(3AC.98)_{16}$ 也可以表示为 $3AC.98H$ 。

一般地, r 进制数可表示为:

$$\begin{aligned} X_r &= a_n \cdot r^{n-1} + a_{n-1} \cdot r^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot r^0 + a_{-1} \cdot r^{-1} \\ &\quad + \cdots + a_{-m} \cdot r^{-m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot r^{i-1} + \sum_{j=1}^m a_{-j} \cdot r^{-j} \end{aligned}$$

(2) 二、八、十、十六进制数的数码符号

十进制	二进制	八进制	十六进制
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10