弹性波动力学习题分析与解答

TANXINGBO DONGLIXUE XITI FENXI YU JIEDA

王晓春 李信富 编著

地质出版社

弹性波动力学

习题分析与解答

王晓春　李信富　编著

地质出版社

·北　京·

内 容 提 要

本书是胡德绥所著《弹性波动力学》一书的配套教学用书，完全按照《弹性波动力学》章节顺序逐章分析解答全部习题，并分章给出内容提要和必要的定理和公式。

本书适合于地球物理等专业高年级本科生和研究生使用，也可供教师和工程技术人员阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

弹性波动力学习题分析与解答/王晓春编著．—北京：地质出版社，2009.11

ISBN 978-7-116-06342-6

Ⅰ．弹…　Ⅱ．王…　Ⅲ．地震波-弹性动力学-高等学校-解题　Ⅳ．P631.4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 182786 号

责任编辑：杨友爱　杨惠敏
责任校对：关风云
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
电　　话：（010）82324508（邮购部）；（010）82324581（编辑室）
网　　址：http://www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@gph.com.cn
传　　真：（010）82310759
印　　刷：北京市朝阳区小红门印刷厂
开　　本：787 mm×1092 mm 1/16
印　　张：6
字　　数：180 千字
印　　数：1—2100 册
版　　次：2009 年 11 月北京第 1 版·第 1 次印刷
定　　价：15.00 元
书　　号：ISBN 978-7-116-06342-6

前　言

弹性波动力学是研究地震学和地震勘探方法的重要基础，是地球物理专业及其相关专业的高年级学生和研究生必需的专业基础知识。作为一门专业基础课，由于它所涉及的物理概念多，数学工具抽象，公式演绎复杂，因此，历年来被同学们认为是较难掌握的一门课程。我们在教学过程中发现，要学好这门课程，必须在物理概念和综合分析能力上下功夫，而概念的掌握仅仅依靠教师的讲解是远远不够的，还必须有针对性地做系统的练习。然而实际情况却是，同学们似乎对所学内容都懂了，在课后做习题的时候，面对基本的练习题往往不知如何下手。究其原因，主要是大家对弹性波动力学这门主要以演绎法为手段的课程缺乏较深入的认识，不懂得对物理概念的正确理解和必要的数学训练是学好这门课程的关键。另外，还有一个重要原因是，《弹性波动力学》这部教材没有附必要的习题参考答案，使得同学们很难及时检验自己的学习成果。

为此，我们编写了这本《弹性波动力学习题分析与解答》，对《弹性波动力学》（胡德绥，地质出版社，1989）一书的所有习题进行分析和解答，目的在于帮助大学生更好地学好这门课程，提高他们的逻辑思维能力和综合分析能力，为同学们将来适应更加激烈的社会竞争打下扎实的专业基础。同时也能为讲课老师提供一本案头参考书，切实地减轻他们的劳动强度，从而可以腾出时间集中精力钻研教材，改进教学方法，向课内45分钟要效率，努力取得良好的教学效果。当然，同学们不能过分依赖本书。学习任何一门功课，都要注意培养独立思考的习惯，努力提高分析问题和解决问题的能力。本书曾作为内部教材在部分高等学校试用，反映良好。这次借公开出版的机会，对其中部分文字和内容做了修订。对本书中存在的不足之处欢迎专家学者及本书读者指正。

本书在编写过程中，得到了编者所在学校教务处及学院领导和同事的鼓励和支持，谨在此一并表示衷心的感谢。

编　者

2009年8月

目　　次

第一章　仿射正交张量

第一节　本 章 概 要

一、求和约定

在给定的直角坐标系 $ox_1x_2x_3$❶ 中，空间内任意一点 P 的向径 $\boldsymbol{x}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{e}_i$ 为沿坐标轴 ox_i 的单位基向量，x_i 是空间内一点的坐标，如果将式（1）简写为

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2}$$

这就是**求和约定**，亦即：如果在数学表达式内同一项中，有某个指标重复出现一次且仅一次，就表示对该指标在其取值范围内取一切值，并对所得到的对应项进行求和．

由于式（2）可以写为

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_k\boldsymbol{e}_k$$

因此，对于求和指标用 k 表示还是用 i 表示，只要它们的取值范围相同（例如都是 1，2，3），那么求和的结果相同．通常为了区别起见，将不求和的指标称为自由指标，而将求和指标称为哑指标．由前面的说明可知，哑指标可以根据需要（尤其在推导公式的时候）进行替换，例如 $A_{ij}x_j$ 可以改写为 $A_{ik}x_k$．

二、克罗内克尔（Kronecker）符号和置换符号

1．克罗内克尔符号 δ_{ij} 定义为　$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j \\ 0, & \text{当 } i\neq j \end{cases}$　　（3）

即　$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1$，$\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{32}=\delta_{13}=\delta_{31}=0$

2．置换符号 e_{ijk} 又称为排列符号，它的定义如下：

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ijk \text{ 为 123 的偶排列} \\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 为 123 的奇排列} \\ 0, & \text{当 } ijk \text{ 中有两个指标相同} \end{cases} \tag{4}$$

这里所谓 123 的偶排列，是指从 123 的排列顺序出发，任意将其中的指标偶次对换而得到的排列，并且规定 123 本身是偶排列，例如 231 是偶排列（它可通过两次对换得到：首先从 123 出发，对换 1 和 2 的位置得到 213，然后再对换 3 和 1 的位置就得到 231）．而所谓 123 的奇排列，是指任意将 123 中的指标奇次对换而得到的排列，例如 321 是从 123 出

❶ 为方便读者阅读，本书中的变量等符号尽量保持与教材《弹性波动力学》（胡德绥，地质出版社，1989）一致．书中所谓教材，均指此书．

发，对换 1 和 3 的位置而得到的排列，即对换次数为奇次（一次），根据奇排列的定义，321 是奇排列．

3．基本关系式

$$\delta_{ij}=\delta_{ji} \tag{5}$$

因为

$$\delta_{1k}\delta_{k2}=\delta_{2k}\delta_{k3}=\delta_{3k}\delta_{k1}=0$$

$$\delta_{1k}\delta_{k1}=\delta_{2k}\delta_{k2}=\delta_{3k}\delta_{k3}=1$$

所以

$$\delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij} \tag{6}$$

$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}=-e_{jik}=-e_{ikj}=-e_{kji} \tag{7}$$

$$e_{ijk}e_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\,\boldsymbol{e}_k \tag{10}$$

式（9）表示单位基向量的数量积与 δ_{ij} 的关系，式（10）表示单位基向量的向量积可以用单位基向量和置换符号的乘积之和（对指标 k 求和）表示．

三、坐标旋转变换

在三维空间中的直角坐标系 $ox_1x_2x_3$，称为旧系，其单位基向量记为 $\boldsymbol{e}_i$，经坐标旋转变换，得到一个新的直角坐标系 $o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$，相应的单位基向量记为 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$，定义

$$\beta_{ij}=\bar{\boldsymbol{e}}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_i,\boldsymbol{e}_j) \tag{11}$$

称 β_{ij} 为变换系数，这相当于给出新、旧坐标系基向量之间的关系式

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i=\beta_{ij}\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{e}_i=\beta_{ji}\bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{12}$$

1．向量的坐标旋转变换式：设向量 $\boldsymbol{x}$ 在新旧坐标系里的坐标分别为 $\bar{x}_i$，x_i（$i=1$，2，3），则有

$$\boldsymbol{x}=\bar{x}_j\bar{\boldsymbol{e}}_j=x_j\boldsymbol{e}_j \tag{13}$$

在上式两端同时点乘单位基向量 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 并利用（9）式、（11）式得到

$$\bar{x}_i=\beta_{ij}x_j \tag{14a}$$

同样，如果在（13）式两端同时点乘单位基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 可得到

$$x_i=\beta_{ji}\bar{x}_j \tag{14b}$$

2．变换系数的乘积公式（在（12）两式两端同时点乘单位基向量 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 或 $\boldsymbol{e}_i$ 可推出）

$$\beta_{ik}\beta_{jk}=\beta_{ki}\beta_{kj}=\delta_{ij} \tag{15}$$

3．变换系数行列式的值

$$\det(\beta_{ij})=\begin{vmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\beta_{13}\\\beta_{21}&\beta_{22}&\beta_{23}\\\beta_{31}&\beta_{32}&\beta_{33}\end{vmatrix}=1 \tag{16}$$

四、n 阶张量的一般定义

对于给定的坐标旋转变换（14），如果一个量具有 3^n 个有序分量，在新旧两个直角坐

标系中这个量的分量分别为 $\bar{T}_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 和 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$，它们满足

$$\left.\begin{aligned} \bar{T}_{i_1 i_2 \cdots i_n} &= \beta_{i_1 j_1} \beta_{i_2 j_2} \cdots \beta_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \cdots j_n} \\ T_{i_1 i_2 \cdots i_n} &= \beta_{j_1 i_1} \beta_{j_2 i_2} \cdots \beta_{j_n i_n} \bar{T}_{j_1 j_2 \cdots j_n} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

则称这个量为 n 阶张量，记为 $\mathbf{T}=(T_{i_1 i_2 \cdots i_n})$，简记为 n 阶张量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$. 例如：

- 对于零阶张量（标量）φ，$\bar{\varphi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)=\varphi(x_1, x_2, x_3)$；
- 对于一阶张量（向量）$\boldsymbol{a}$，它有 $3^1=3$ 个分量，而且 $\bar{a}_i=\beta_{ij} a_j$ 或 $a_i=\beta_{ji}\bar{a}_j$；
- 对于二阶张量 $\mathbf{T}$，它有 $3^2=9$ 个分量，且

$$\bar{T}_{ij} = \beta_{im} \beta_{jn} T_{mn} \qquad \text{或} \qquad T_{ij} = \beta_{mi} \beta_{nj} \bar{T}_{mn} \tag{18}$$

如果直角坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的单位基向量为 $\boldsymbol{e}_i$（$i=1, 2, 3$），则各阶张量可用 $\boldsymbol{e}_i$ 表示成

（1）一阶张量　　$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$

（2）二阶张量　　$\mathbf{A}=A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$

（3）三阶张量　　$\mathbf{B}=B_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$

（4）n 阶张量　　$\mathbf{T}=T_{i_1 i_2 \cdots i_n}\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2}\cdots\boldsymbol{e}_{i_n}$　　$(n\geqslant 1)$

以上记法称为张量的并向量记法．利用张量的这种并向量表示法，二阶张量还可理解为向量到向量的一个线性变换

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{u} \tag{19}$$

即张量 $\mathbf{T}$ 将向量 $\boldsymbol{u}$ 变换为一个新的向量 $\boldsymbol{v}$，且对任意的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 及任意标量 λ 都具有线性性质

$$\mathbf{T}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{a}+\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$\mathbf{T}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda(\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{a})$$

由于 $\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i$，$\mathbf{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{u}=u_k\boldsymbol{e}_k$，将它们代入式（19），注意到 $\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k=\delta_{jk}$，即得

$$v_i = T_{ij} u_j \tag{20}$$

由此可以计算向量 $\boldsymbol{u}$ 经二阶张量 $\mathbf{T}$ 变换后得到的向量 $\boldsymbol{v}$.

五、张量的代数运算，商法则

1. 张量相等：如果两个同阶张量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 在一个坐标系中的每个对应分量都相等，则称这两个张量相等，记为 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

2. 张量的和（差）：两个同阶张量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的和（差）是一个同阶张量，令其为 $\mathbf{C}$，其分量是原来两个同阶张量对应分量的和（差），记为 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

3. 张量乘积（或并运算）：一个 r 阶张量 $\mathbf{A}$ 和一个 s 阶张量 $\mathbf{B}$ 的乘积是一个 $r+s$ 阶的张量，令其为 $\mathbf{C}$，其 3^{r+s} 个分量是 $\mathbf{A}$ 的 3^r 个分量与 $\mathbf{B}$ 的 3^s 个分量分别相乘的积，记为 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$. 张量乘积运算的性质如下：

（1）服从分配律：　　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

（2）服从结合律：　　$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$

（3）不满足交换律：　　一般情形下，$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$

4. 张量的缩并：在 r（$r\geqslant 2$）阶张量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ 中，令其任何两个指标相同，并对重复出

现指标进行求和，则得到一个 $r-2$ 阶的张量，这种运算称为张量的缩并．例如二阶张量 A_{ij} 的缩并 $A_{ii}=A_{11}+A_{22}+A_{33}$ 为零阶张量（标量）．

5. 张量的内积：在 r（$r>0$）阶张量 **A** 与 s（$s>0$）阶张量 **B** 的乘积张量中，对分别属于张量 **A** 和张量 **B** 的指标进行一次缩并运算，称这样得到的 $r+s-2$ 阶张量为张量 **A** 与 **B** 的内积，记为 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. 例如二阶张量 **T** 与一阶张量 $\boldsymbol{u}$ 的内积 $\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{u}$ 是一阶张量（向量）.

6. 商法则：如果任意的 s 阶张量与一组 3^r 个函数 A（i_1，i_2，…，i_r）的乘积或内积都是适当阶数的张量，则 **A**（i_1，i_2，…，i_r）是一个 r 阶张量，记为 $A_{i_1i_2\cdots i_r}$.

六、几种特殊张量

1. 零张量：所有分量全为零的张量称为零张量，显然两个相等张量的差张量是零张量．

2. 二阶单位张量：若二阶张量 $I_{ij}=\delta_{ij}$，则称此张量为二阶单位张量，记为 **I**.

3. 转置张量：若二阶张量 $\mathbf{A}=A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，则称 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=A_{ji}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是 **A** 的转置张量，对任意一阶张量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和二阶张量 **A**、**B**，有下列性质：

（1）$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$

（2）$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}$

（3）$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

4. 逆张量：如果二阶张量 **A**、**B** 各自分量所构成的行列式都不等于零，即 det（**A**）$\neq0$，det（**B**）$\neq0$，且 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}$，则 **A**、**B** 互为逆张量，记为 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$，$\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}$.

5. 正交张量：如果 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$，则称 **A** 是正交张量，显然，对于正交张量 **A**，有 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

6. 各向同性张量：如果一个张量的每一个分量都是坐标系旋转变换下的不变量，则称此张量为各向同性张量．例如：

- 任何标量均为零阶各向同性张量．
- 零向量是唯一的一阶各向同性张量．
- 二阶各向同性张量 A_{ij} 的一般形式为 $A_{ij}=\alpha\delta_{ij}$，α 为任意标量．
- 三阶各向同性张量 B_{ijk} 的一般形式为 $B_{ijk}=\beta e_{ijk}$，β 为任意标量．
- 四阶各向同性张量 C_{ijkl} 的一般形式为

$$C_{ijkl}=\lambda_1\delta_{ij}\delta_{kl}+\lambda_2\delta_{ik}\delta_{jl}+\lambda_3\delta_{il}\delta_{jk} \tag{21}$$

其中 λ_1，λ_2 和 λ_3 为任意标量．如果 C_{ijkl} 还关于 i、j（或 k、l）对称，则由式（21）可推出 $\lambda_2=\lambda_3=\mu$，记 $\lambda_1=\lambda$，式（21）成为

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{22}$$

七、二阶张量的特征值和特征向量

二阶实数张量 **T** 的特征值 λ 及特征向量 $\boldsymbol{n}$ 满足方程

$$\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{n}\quad\text{或}\quad T_{ij}n_j=\lambda n_i$$

确定特征值的方程为

$$\det(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0 \tag{23}$$

亦即

$$\lambda^3-\mathrm{I}\lambda^2+\mathrm{II}\lambda-\mathrm{III}=0 \tag{24}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{I}=T_{ii}\\&\mathrm{II}=\frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ji}\right)\\&\mathrm{III}=\det\left(T_{ij}\right)\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

在求出特征值 $\lambda^{(i)}$ 后，与之对应的特征向量 $\boldsymbol{n}^{(i)}$（$i=1，2，3$）由下列方程确定

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{n}^{(i)}=\lambda^{(i)}\boldsymbol{n}^{(i)}\qquad(i\text{ 不求和})\\&\boldsymbol{n}^{(i)}\cdot\boldsymbol{n}^{(i)}=1\qquad(i\text{ 不求和})\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

二阶张量 $\mathbf{T}$ 的特征值 λ 又称为主值，特征向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向称为 $\mathbf{T}$ 的与 λ 对应的特征方向或主方向．由于二阶实对称张量 T_{ij} 总存在有三个相互垂直的主方向，如果沿主方向选定一个新的右手直角坐标系 $o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$，则称它为张量 T_{ij} 的主轴坐标系．T_{ij} 在其主轴坐标系内的矩阵形式是对角形的，对角线上的分量就是张量 T_{ij} 的特征值．

八、张量分析初步

1. 张量场：如果对于某一个空间区域的每一点 $\boldsymbol{x}$ 以及某一个时间间隔内的每一个时刻 t，都可一一对应地给定张量分量的值，那么就说给定了一个张量场．

2. 张量场 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x，t)$ 对时间的偏导数记为 $\dot{\mathbf{A}}=\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$，如果对任意时刻 t，都有 $\dot{\mathbf{A}}=0$，即 $\mathbf{A}$ 与时间 t 无关，则称 $\mathbf{A}$ 为稳定张量场．

3. 张量场 $\mathbf{T}$ 的梯度定义为
$$\operatorname{grad}\mathbf{T}=\nabla\mathbf{T}\tag{27}$$
其中
$$\operatorname{grad}=\nabla=\boldsymbol{e}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\tag{28}$$
称为梯度算子，$\boldsymbol{e}_k$（$k=1，2，3$）为直角坐标系 $ox_1x_2x_3$ 的单位基向量．

4. 张量场 $\mathbf{T}$ 的散度定义为
$$\operatorname{div}\mathbf{T}=\nabla\cdot\mathbf{T}\tag{29}$$
对于二阶张量场 $\mathbf{T}$，其散度为
$$\operatorname{div}\mathbf{T}=T_{ij,i}\boldsymbol{e}_j\tag{30}$$
根据散度的定义，标量场（零阶张量场）没有散度．

5. Laplace 算子
$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\tag{31}$$

6. 张量场 $\mathbf{T}$ 的旋度定义为
$$\operatorname{curl}\mathbf{T}=\nabla\times\mathbf{T}\tag{32}$$
对于二阶张量场 $\mathbf{T}$，其旋度为
$$\operatorname{curl}\mathbf{T}=e_{ikl}T_{lj,k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\tag{33}$$
同样，标量场无旋度．

第二节　习题与解答

习题 1-1　写出下列各式的展开式

(1) $\beta_{ik}\beta_{jk}=\delta_{ij}$；　(2) $\beta_{ki}\beta_{kj}=\delta_{ij}$；

(3) $\bar{a}_i=\beta_{ij}a_j$；　(4) $\bar{A}_{ij}=\beta_{im}\beta_{jn}A_{mn}$；

(5) $e_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$；　(6) $\theta=e_{ii}$；

(7) $\tau_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$；　(8) $\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i$；

(9) $W=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu e_{ij}e_{ij}$；　　(10) $W=\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}$.

解：(1) 由于 $\beta_{ik}\beta_{jk}=\delta_{ij}$ 中有 2 个自由指标，故可展开成 9 个式子．因为 $\delta_{ji}=\delta_{ij}$，所以实际只能展开成独立的 6 个式子如下：

$$\begin{aligned}
\beta_{1k}\beta_{1k} &= \beta_{11}^2+\beta_{12}^2+\beta_{13}^2=1\\
\beta_{2k}\beta_{2k} &= \beta_{21}^2+\beta_{22}^2+\beta_{23}^2=1\\
\beta_{3k}\beta_{3k} &= \beta_{31}^2+\beta_{32}^2+\beta_{33}^2=1\\
\beta_{1k}\beta_{2k} &= \beta_{11}\beta_{21}+\beta_{12}\beta_{22}+\beta_{13}\beta_{23}=0\\
\beta_{1k}\beta_{3k} &= \beta_{11}\beta_{31}+\beta_{12}\beta_{32}+\beta_{13}\beta_{33}=0\\
\beta_{2k}\beta_{3k} &= \beta_{21}\beta_{31}+\beta_{22}\beta_{32}+\beta_{23}\beta_{33}=0
\end{aligned}$$

(2) $\beta_{ki}\beta_{kj}=\delta_{ij}$ 同样可展开成 6 个式子如下：

$$\begin{aligned}
&\beta_{11}^2+\beta_{21}^2+\beta_{31}^2=1\\
&\beta_{12}^2+\beta_{22}^2+\beta_{32}^2=1\\
&\beta_{13}^2+\beta_{23}^2+\beta_{33}^2=1\\
&\beta_{11}\beta_{12}+\beta_{21}\beta_{22}+\beta_{31}\beta_{32}=0\\
&\beta_{11}\beta_{13}+\beta_{21}\beta_{23}+\beta_{31}\beta_{33}=0\\
&\beta_{12}\beta_{13}+\beta_{22}\beta_{23}+\beta_{32}\beta_{33}=0
\end{aligned}$$

(3) 在 $\bar{a}_i=\beta_{ij}a_j$ 中，有 1 个自由指标 i，可以展开成下面 3 个式子：

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= \beta_{11}a_1+\beta_{12}a_2+\beta_{13}a_3\\
\bar{a}_2 &= \beta_{21}a_1+\beta_{22}a_2+\beta_{23}a_3\\
\bar{a}_3 &= \beta_{31}a_1+\beta_{32}a_2+\beta_{33}a_3
\end{aligned}$$

(4) 在 $\bar{A}_{ij}=\beta_{im}\beta_{jn}A_{mn}$ 中有 2 个自由指标 i 和 j，可以展开成 9 个式子如下（i、$j=1$，2，3）：

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{ij} =&\ \beta_{i1}\beta_{j1}A_{11}+\beta_{i1}\beta_{j2}A_{12}+\beta_{i1}\beta_{j3}A_{13}\\
&+\beta_{i2}\beta_{j1}A_{21}+\beta_{i2}\beta_{j2}A_{22}+\beta_{i2}\beta_{j3}A_{23}\\
&+\beta_{i3}\beta_{j1}A_{31}+\beta_{i3}\beta_{j2}A_{32}+\beta_{i3}\beta_{j3}A_{33}
\end{aligned}$$

如果在上式中让 ij 取遍 11，12，13，21，22，23 和 31，32，33，则得到 $\bar{A}_{ij}$ 的 9 个分量 $\bar{A}_{11}$，$\bar{A}_{12}$，…，$\bar{A}_{33}$ 与 A_{ij} 的 9 个分量的 9 个关系式，例如

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{11} &= \beta_{1m}\beta_{1n}A_{mn}\\
&= \beta_{11}^2A_{11}+\beta_{11}\beta_{12}A_{12}+\beta_{11}\beta_{13}A_{13}\\
&\quad+\beta_{12}\beta_{11}A_{21}+\beta_{12}^2A_{22}+\beta_{12}\beta_{13}A_{23}\\
&\quad+\beta_{13}\beta_{11}A_{31}+\beta_{13}\beta_{12}A_{32}+\beta_{13}^2A_{33}
\end{aligned}$$

余类推．

(5) 虽然在 $e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ 中有 2 个自由指标，但由于 $e_{ji}=e_{ij}$，所以它可展成独立的 6 个式子，即

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad e_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

$$e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3},\quad e_{31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

（6）在 $\theta=e_{ii}$ 中，无自由指标，它的展开式只有 1 个，即

$$\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}$$

（7）在 $\tau_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$ 中有 2 个自由指标，可展开成 9 个式子

$$\tau_{11}=\lambda\theta+2\mu e_{11},\quad \tau_{12}=2\mu e_{12},\quad \tau_{21}=2\mu e_{21}$$

$$\tau_{22}=\lambda\theta+2\mu e_{22},\quad \tau_{13}=2\mu e_{13},\quad \tau_{31}=2\mu e_{31}$$

$$\tau_{33}=\lambda\theta+2\mu e_{33},\quad \tau_{23}=2\mu e_{23},\quad \tau_{32}=2\mu e_{32}$$

在上面 9 个式子中，由于 $e_{ij}=e_{ji}$，所以只有 6 个式子是独立的．

（8）在 $\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i$ 中有 1 个自由指标，它的展开式有 3 个：

$$\mu(u_{1,11}+u_{1,22}+u_{1,33})+(\lambda+\mu)(u_{1,11}+u_{2,21}+u_{3,31})+\rho f_1=\rho\ddot{u}_1$$

$$\mu(u_{2,11}+u_{2,22}+u_{2,33})+(\lambda+\mu)(u_{1,12}+u_{2,22}+u_{3,32})+\rho f_2=\rho\ddot{u}_2$$

$$\mu(u_{3,11}+u_{3,22}+u_{3,33})+(\lambda+\mu)(u_{1,13}+u_{2,23}+u_{3,33})+\rho f_3=\rho\ddot{u}_3$$

（9）在 $W=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu e_{ij}e_{ij}$ 中无自由指标，其展开式只有 1 个：

$$W=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu\left[e_{11}^2+e_{12}^2+e_{13}^2+e_{21}^2+e_{22}^2+e_{23}^2+e_{31}^2+e_{32}^2+e_{33}^2\right]$$

（10）在 $W=\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}$ 中也没有自由指标，只有 1 个展开式如下：

$$W=\frac{1}{2}\left[\tau_{11}e_{11}+\tau_{12}e_{12}+\tau_{13}e_{13}+\tau_{21}e_{21}+\tau_{22}e_{22}+\tau_{23}e_{23}+\tau_{31}e_{31}+\tau_{32}e_{32}+\tau_{33}e_{33}\right]$$

习题 1－2　简捷地证明

（1）$\delta_{ij}\delta_{ij}=3$　　（2）$\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}=3$　　（3）$e_{ikl}e_{ljk}=2\delta_{ij}$

（4）$e_{ijk}\delta_{ij}=0$　　（5）$e_{ijk}a_ia_j=0$

证：（1）因为当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$，当 $i\neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$，所以

$$\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{11}^2+\delta_{22}^2+\delta_{33}^2=3$$

（2）由公式（1.1—10）[1] 有 $\delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij}$，再利用上面的结果并注意到 $\delta_{jk}=\delta_{kj}$，即得

$$\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij}\delta_{ij}=3$$

（3）由公式（1.1—15）有 $e_{ijk}e_{ijn}=2\delta_{kn}$，再利用 $e_{ikl}=e_{kli}$ 及 $e_{ljk}=e_{klj}$，即得

$$e_{ikl}e_{ljk}=e_{kli}e_{klj}=2\delta_{ij}$$

（4）由于当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$，再利用 e_{ijk} 的性质，即得

$$e_{ijk}\delta_{ij}=e_{iik}=0$$

（5）令 $A_k=e_{ijk}a_ia_j$，由于 $e_{jik}=-e_{ijk}$，$a_ia_j=a_ja_i$，

所以　　$A_k=e_{ijk}a_ia_j$，$=-e_{jik}a_ia_j=-A_k$

---

[1] 见教材《弹性波动力学》，胡德绥编，地质出版社，1989．下同．

由此得　$2A_k=0$，即 $A_k=e_{ijk}a_ia_j=0$　证讫．

习题 1－3　试证明

$$(P_{ijk}+P_{jki}+P_{kij})x_ix_jx_k=3P_{ijk}x_ix_jx_k$$

证：令 $A=P_{ijk}x_ix_jx_k$，由于

$$P_{jki}x_ix_jx_k=P_{jki}x_jx_kx_i=A$$

同理

$$P_{kij}x_ix_jx_k=P_{kij}x_kx_ix_j=A$$

所以

$$(P_{ijk}+P_{jki}+P_{kij})\ x_ix_jx_k=3A=3P_{ijk}x_ix_jx_k$$　证讫．

习题 1－4　设旧坐标系及新坐标系的单位基向量分别为 $\boldsymbol{e}_i$ 及 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$，它们之间的夹角如下表所给定．试求此两坐标系之间的变换系数．

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\bar{\boldsymbol{e}}_1$	60°	150°	90°
$\bar{\boldsymbol{e}}_2$	30°	60°	90°
$\bar{\boldsymbol{e}}_3$	90°	90°	0°

解：根据变换系数定义　$\beta_{ij}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$

$$\beta_{11}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_1,\ \boldsymbol{e}_1)=\cos 60°=0.5$$

及已知数据得到

$$\beta_{12}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_1,\ \boldsymbol{e}_2)=\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta_{13}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_1,\ \boldsymbol{e}_3)=\cos 90°=0$$

$$\beta_{21}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_2,\ \boldsymbol{e}_1)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta_{22}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_2,\ \boldsymbol{e}_2)=\cos 60°=0.5$$

$$\beta_{23}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_2,\ \boldsymbol{e}_3)=\cos 90°=0$$

$$\beta_{31}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_3,\ \boldsymbol{e}_1)=\cos 90°=0$$

$$\beta_{32}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_3,\ \boldsymbol{e}_2)=\cos 90°=0$$

$$\beta_{33}=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_3,\ \boldsymbol{e}_3)=\cos 0°=1$$

写成矩阵形式就是

$$(\beta_{ij})=\begin{bmatrix} 0.5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习题 1－5　给定一个坐标变换 $\bar{x}_i=\beta_{ij}x_j$，其中变换系数的阵列形式为

$$(\beta_{ij})=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 x_i 系中的分量为 [1, 2, −1], 试求它在 $\bar{x}_i$ 系中的分量.

解: 根据一阶张量（向量）的变换公式, $\bar{a}_i=\beta_{ij}a_j$, 得到 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\bar{x}_i$ 系中分量如下

$$\bar{\alpha}_1=\beta_{1j}\alpha_j=\beta_{11}\alpha_1+\beta_{12}\alpha_2+\beta_{13}\alpha_3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\bar{\alpha}_2=\beta_{2j}\alpha_j=\beta_{21}\alpha_1+\beta_{22}\alpha_2+\beta_{23}\alpha_3=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\bar{\alpha}_3=\beta_{3j}\alpha_j=\beta_{31}\alpha_1+\beta_{32}\alpha_2+\beta_{33}\alpha_3=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

习题 1-6 给定一坐标变换 $\bar{x}_i=\beta_{ij}x_j$, 如果在 x_i 系中张量为 τ_{ij}, 其中

$$(\beta_{ij})=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix},\quad (\tau_{ij})=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

试求此张量在 $\bar{x}_i$ 系中的分量.

解: 根据二阶张量的变换公式, 得到 τ_{ij} 在 $\bar{x}_i$ 系中的分量如下（注意 $\tau_{ji}=\tau_{ij}$）:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{11}&=\beta_{1m}\beta_{1n}\tau_{mn}\\&=\beta_{11}^2\tau_{11}+\beta_{12}^2\tau_{22}+\beta_{13}^2\tau_{33}+2\beta_{11}\beta_{12}\tau_{12}+2\beta_{11}\beta_{13}\tau_{13}+2\beta_{12}\beta_{13}\tau_{23}\end{aligned}$$

因为 $\tau_{11}=\tau_{33}=0$, $\beta_{12}=0$, 所以上式右端除 $2\beta_{11}\beta_{13}\tau_{13}$ 这一项以外, 其余各项均为零, 因此

$$\bar{\tau}_{11}=2\beta_{11}\beta_{13}\tau_{13}=-1$$

同理

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{22}&=\beta_{2m}\beta_{2n}\tau_{mn}\\&=\beta_{21}^2\tau_{11}+\beta_{22}^2\tau_{22}+\beta_{23}^2\tau_{33}+2\beta_{21}\beta_{22}\tau_{12}+2\beta_{21}\beta_{23}\tau_{13}+2\beta_{22}\beta_{23}\tau_{23}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{33}&=\beta_{3m}\beta_{3n}\tau_{mn}\\&=\beta_{31}^2\tau_{11}+\beta_{32}^2\tau_{22}+\beta_{33}^2\tau_{33}+2\beta_{31}\beta_{32}\tau_{12}+2\beta_{31}\beta_{33}\tau_{13}+2\beta_{32}\beta_{33}\tau_{23}\\&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{12}=\bar{\tau}_{21}&=\beta_{1m}\beta_{2n}\tau_{mn}\\&=\beta_{11}\beta_{21}\tau_{11}+\beta_{12}\beta_{22}\tau_{22}+\beta_{13}\beta_{23}\tau_{33}+(\beta_{11}\beta_{22}+\beta_{12}\beta_{21})\tau_{12}\\&\quad+(\beta_{11}\beta_{23}+\beta_{13}\beta_{21})\tau_{13}+(\beta_{12}\beta_{23}+\beta_{13}\beta_{22})\tau_{23}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{13}=\bar{\tau}_{31}&=\beta_{1m}\beta_{3n}\tau_{mn}\\&=\beta_{11}\beta_{31}\tau_{11}+\beta_{12}\beta_{32}\tau_{22}+\beta_{13}\beta_{33}\tau_{33}+(\beta_{11}\beta_{32}+\beta_{12}\beta_{31})\tau_{12}\\&\quad+(\beta_{11}\beta_{33}+\beta_{13}\beta_{31})\tau_{13}+(\beta_{12}\beta_{33}+\beta_{13}\beta_{32})\tau_{23}\\&=0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\tau}_{23}=\bar{\tau}_{32} &= \beta_{2m}\beta_{3n}\tau_{mn} \\
&= \beta_{21}\beta_{31}\tau_{11}+\beta_{22}\beta_{32}\tau_{22}+\beta_{23}\beta_{33}\tau_{33}+(\beta_{21}\beta_{32}+\beta_{22}\beta_{31})\tau_{12} \\
&\quad +(\beta_{21}\beta_{33}+\beta_{23}\beta_{31})\tau_{13}+(\beta_{22}\beta_{33}+\beta_{23}\beta_{32})\tau_{23} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式，即为 $$(\bar{\tau}_{ij})=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

习题 1－7 已知用 e_{ij} 表示的 τ_{ij} 为

$$\tau_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

其中 λ 及 μ 为参数，试用 τ_{ij} 表示出 e_{ij}.

解：在表达式 $$\tau_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{1}$$

中，令 $i=j$，并对 i 求和得到

$$\tau_{ii}=\lambda e_{kk}\delta_{ii}+2\mu e_{ii}$$

将 $\tau_{ii}=\tau_{kk}$，$e_{ii}=e_{kk}$ 以及 $\delta_{ii}=3$ 代入上式得

$$\tau_{kk}=(3\lambda+2\mu)e_{kk}$$

所以 $$e_{kk}=\frac{\tau_{kk}}{3\lambda+2\mu}$$

将它代入式（1）得到 $$\tau_{ij}=\frac{\lambda\tau_{kk}}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

由此即可得到 $$e_{ij}=\frac{1}{2\mu}\tau_{ij}-\frac{\lambda\tau_{kk}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}$$

习题 1－8 试证张量 A_{ijklm} 关于 j 及 l 的对称性质或反对称性质都是与坐标系无关的.

证：设在给定坐标变换 $\bar{x}_i=\beta_{ij}x_j$ 下，张量 A_{ijklm} 在新旧坐标系中的分量分别为 $\bar{A}_{ijklm}$ 和 A_{ijklm}，则由张量定义必有

$$\bar{A}_{ijklm}=\beta_{ir}\beta_{js}\beta_{kt}\beta_{lp}\beta_{mq}A_{rstpq} \tag{1}$$

(i) 若 A_{ijklm} 关于 j 和 l 对称，则有

$$A_{ijklm}=A_{ilkjm} \quad 或 \quad A_{rstpq}=A_{rptsq}$$

将它代入式（1）得到
$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{ijklm} &= \beta_{ir}\beta_{js}\beta_{kt}\beta_{lp}\beta_{mq}A_{rstpq} \\
&= \beta_{ir}\beta_{lp}\beta_{kt}\beta_{js}\beta_{mq}A_{rptsq} \\
&= \bar{A}_{ilkjm}
\end{aligned}
$$

这就是说，$\bar{A}_{ijklm}$ 关于 j 和 l 也是对称的，即 A_{ijklm} 的这一对称性与坐标系无关.

(ii) 若 A_{ijklm} 关于 j 和 l 反对称，则有

$$A_{ijklm}=-A_{ilkjm} \quad 或 \quad A_{rstpq}=-A_{rptsq}$$

同样将它代入式（1）可得到 $$\bar{A}_{ijklm}=-\bar{A}_{ilkjm}$$

因此，$\bar{A}_{ijklm}$ 关于 j 和 l 也是反对称的. 由于对坐标变换 $\bar{x}_i=\beta_{ij}x_j$ 并无特别限制，所以 A_{ijklm} 的这一反对称性与坐标系的选择无关. 证讫.

习题 1－9 试证张量 $B_{ik}=e_{ijk}a_j$ 是反对称的.

证：因为 $e_{ijk}=-e_{kji}$，所以