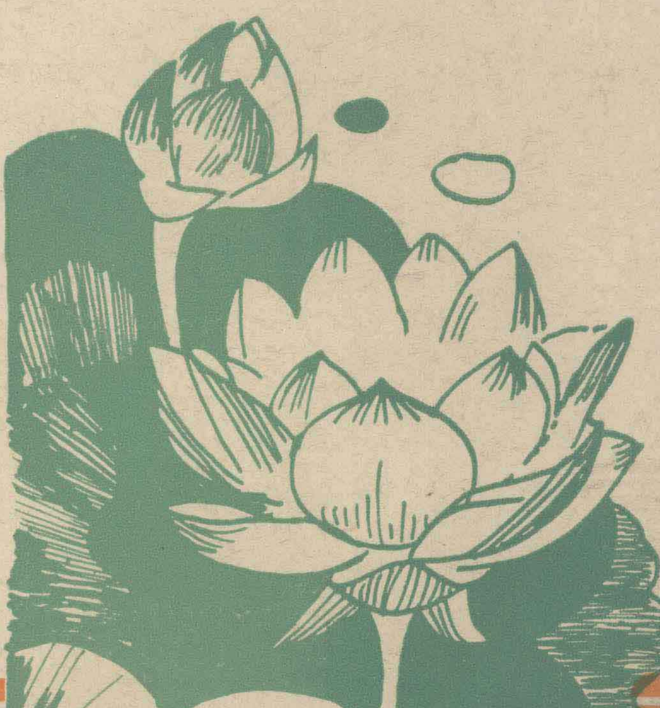
高考对策丛书

数学

SHUXUE



陕西人民教育出版社

高 考 对 策 丛 书

数 学

主编 杨致武 陈 恬
编写 梁肖珣 陈 恬
胡笃庆 李生才 吴子超

陕西人民教育出版社

高考对策丛书
数　学
杨致武　主编
陕西人民教育出版社出版发行
（西安长安路南段376号）
新华书店经销　雁塔区第二印刷厂印刷
787×1092毫米　16开本　10.5印张　210千字
1991年1月第1版　1991年1月第1次印刷
印数：1—17,100
ISBN 7—5419—2022—3/G·1702
定价：2.70元

目　　录

第一章　近年高考试题100例题解

一、一九八九年数学（文科）试题及题解

（一）选择题（本题满分36分，共12个小题，每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中只有一个是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的圆括号内，每一个小题选对得3分，不选或选错一律得0分。）

（1）如果$I=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$，$M=\{a,\ c,\ d\}$，$N=\{b,\ d,\ e\}$，其中I是全集，那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于

（A）ϕ.　（B）$\{d\}$.　（C）$\{a,\ c\}$.　（D）$\{b,\ e\}$.　　答【A】

（2）与函数$y=x$有相同图象的一个函数是

（A）$y=\sqrt{x^2}$.　　（B）$y=\dfrac{x^2}{x}$.

（C）$y=a^{\log_a x}$，其中$a>0$，$a\neq1$.　　（D）$y=\log_a a^x$，其中$a>0$，$a\neq1$.

答【D】

（3）如果圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，高为2，那么它的侧面积是

（A）$2\sqrt{3}\ \pi$.　　（B）$2\sqrt{2}\ \pi$.

（C）$4\sqrt{3}\ \pi$.　　（D）$4\sqrt{2}\ \pi$.　　答【A】

（4）已知$\{a_n\}$是等比数列，如果$a_1+a_2=12$，$a_2+a_3=-6$，且$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的值等于

（A）8.　（B）16.　（C）32.　（D）48.　　答【B】

（5）如果$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，那么$a_1+a_2+\cdots+a_7$的值等于

（A）-2.　（B）-1.　（C）0.　（D）2.　　答【A】

（6）如果$|\cos\theta|=\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，那么$\sin\dfrac{\theta}{2}$的值等于

（A）$-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.　　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

（C）$-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.　　（D）$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.　　答【C】

（7）与直线$2x+3y-6=0$关于点（1，-1）对称的直线是

（A）$3x-2y+2=0$.　（B）$2x+3y+7=0$.

（C）$3x-2y-12=0$.　（D）$2x+3y+8=0$.　　答【D】

（8）已知球的两个平行截面的面积分别为5π和8π，它们位于球心的同一侧且相距为1，那么这个球的半径是

（A）4.　（B）3.　（C）2.　（D）5.　　答【B】

（9）由数字1，2，3，4，5组成没有重复数字的五位数，其中偶数共有

（A）60个．（B）48个．（C）36个．（D）24个．答【B】

（10）如果双曲线$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$上的一点$P$到它的右焦点的距离是8，那么$P$到它的右准线的距离是

（A）10．（B）$\frac{32\sqrt{7}}{7}$．（C）$\frac{32}{5}$．（D）$2\sqrt{7}$．答【D】

（11）如果$|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$，那么函数$f(x)=\cos^2x+\sin x$的最小值是

（A）$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$．（B）$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$．

（C）-1．（D）$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$．答【D】

（12）已知$f(x)=8+2x-x^2$，如果$g(x)=f(2-x^2)$，那么$g(x)$

（A）在区间$(-2,0)$上是增函数．（B）在区间$(0,2)$上是增函数．

（C）在区间$(-1,0)$上是减函数．（D）在区间$(0,1)$上是减函数．

答【C】

（二）填空题只要求直接填写结果

（13）给定三点$A(1,0)$，$B(-1,0)$，$C(1,2)$，那么通过点A并且与直线BC垂直的直线方程是 $\underline{\quad x+y-1=0\quad}$．

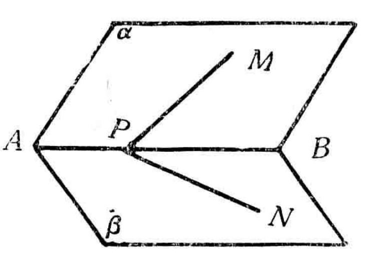
（14）不等式$|x^2-3x|>4$的解集是$\underline{\{x|x<-1,\text{ 或}x>4\}}$．

（15）函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数的定义域是 $\underline{\quad(-1,1)\quad}$．

（16）已知A和B是两个命题，如果A是B的充分条件，那么B是A的 $\underline{\quad\text{必要}\quad}$ 条件；$\overline{A}$是$\overline{B}$的$\underline{\quad\text{必要}\quad}$条件．

（17）已知$0<a<1$，$0<b<1$，如果$a^{\log_b(x-3)}<1$，那么x的取值范围是$\underline{\quad(3,4)\quad}$．

（18）如图，P是二面角$\alpha-AB-\beta$棱AB上的一点，分别在α，β上引射线PM，PN，如果$\angle BPM=\angle BPN=45°$，$\angle MPN=60°$，那么二面角$\alpha-AB-\beta$的大小是$\underline{\quad 90°\quad}$．



（三）解答题

（19）设复数$z=(1-\sqrt{3}i)^5$，求z的模和辐角的主值．

〔解〕 ∵ $(1-\sqrt{3}i)^5=2^5\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5=32\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)^5$

$$=32\left(\cos\frac{25}{3}\pi+i\sin\frac{25}{3}\pi\right)=32\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

∴ 复数z的模为32，辐角的主值为$\frac{\pi}{3}$．

（20） 证明 $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

〔**证法一**〕 $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}x\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$$

〔**证法二**〕 $\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}=\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

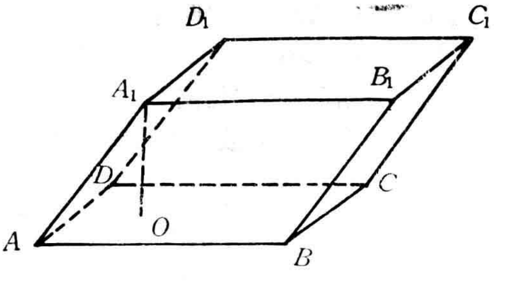
$$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

（21）如图，在平行六面体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，已知$AB=5$，$AD=4$，$AA_1=3$，$AB\perp AD$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\frac{\pi}{3}$.

（i）求证：顶点A_1在底面$ABCD$的射影O在$\angle BAD$的平分线上；

（ii）求这个平行六面体的体积.



（i）〔证〕如图，连结A_1O，则$A_1O\perp$底面$ABCD$。作$OM\perp AB$交AB于M，作$ON\perp AD$交AD于N，连结A_1M，A_1N.

由三垂线定理得

$A_1M\perp AB$，$A_1N\perp AD$.

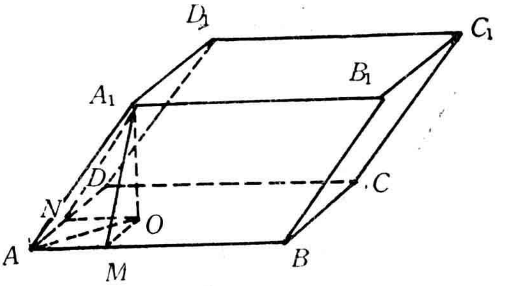
∵ $\angle A_1AM=\angle A_1AN$，

∴ $Rt\triangle A_1NA\cong Rt\triangle A_1MA$.

∴ $A_1M=A_1N$.

∴ $OM=ON$.

∴ 点O在$\angle BAD$的平分线上.



（ii）〔**解**〕 ∵ $AM=A_1A\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

∴ $AO=AM\csc\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

又在$Rt\triangle AOA_1$中　$A_1O^2 = A_1A^2 - AO^2 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$，

$\therefore$　$A_1O = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\therefore$　平行六面体的体积　$V = 5 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$.

（22）用数学归纳法证明

$(1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2) + (3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 5^2) + \cdots + [(2n-1)(2n)^2 - 2n(2n+1)^2]$

$= -n(n+1)(4n+3)$.

〔证〕　当$n=1$时，左边$=-14$，右边$=-1 \cdot 2 \cdot 7 = -14$，等式成立.

假设当$n=k$时等式成立，即有

$(1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2) + \cdots\cdots + [(2k-1)(2k)^2 - 2k(2k+1)^2]$

$= -k(k+1)(4k+3)$.

那么　当$n=k+1$时，

$(1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2) + \cdots\cdots + [(2k-1)(2k)^2 - 2k(2k+1)^2]$

$+[(2k+1)(2k+2)^2 - (2k+2)(2k+3)^2]$（*）

$= -k(k+1)(4k+3) - 2(k+1)[4k^2+12k+9-4k^2-6k-2]$

$= -(k+1)[4k^2+3k+2(6k+7)] = -(k+1)(4k^2+15k+14)$

$= -(k+1)(k+2)(4k+7)$

$= -(k+1)[(k+1)+1][4(k+1)+3]$.

这就是说，当$n=k+1$时等式也成立。根据以上论证可知等式对任何$n \in N$都成立。

（23）已知$a>0$，$a \neq 1$，试求使方程 $\log_a(x-ak) = \log_{a^2}(x^2-a^2)$

有解的k的取值范围。

〔解〕由对数函数的性质可知，原方程的解x应满足

$$\begin{cases} (x-ak)^2 = x^2 - a^2, & ① \\ x - ak > 0, & ② \\ x^2 - a^2 > 0. & ③ \end{cases}$$

当①，②同时成立时，③显然成立，因此只需解 $\begin{cases} (x-ak)^2 = x^2 - a^2, & ① \\ x - ak > 0. & ② \end{cases}$

由①得　　$2kx = a(1+k^2)$，④

当$k=0$时，④无解，因而原方程无解.

当$k \neq 0$时，④的解是　　$x = \frac{a(1+k^2)}{2k}$. ⑤　把⑤代入②，得 $\frac{1+k^2}{2k} > k$.

当$k<0$时，得$k^2>1$，即　$-\infty<k<-1$.

当$k>0$时，得$k^2<1$，　即　$0<k<1$.

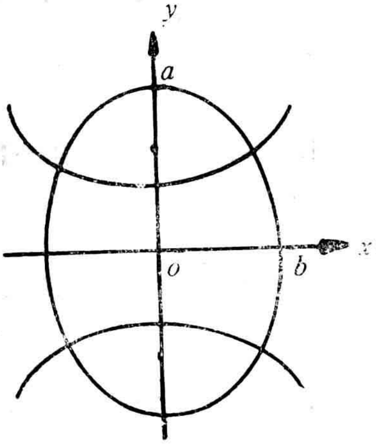
综合得，当k在集合$(-\infty, 1) \cup (0, 1)$内取值时，原方程有解。

（24）　给定椭圆：$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$　　（$a>b>0$），求与这个椭圆有公共焦点的双曲

线，使得以它们的交点为顶点的四边形面积最大，并求相应的四边形的顶点坐标。

〔**解**〕 设所求双曲线的方程是 $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=-1$.

由题设知 $c^2=\alpha^2+\beta^2=a^2-b^2$.



由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\\ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{c^2-\alpha^2}=-1.\end{cases}$

解得交点的坐标满足 $x^2=\frac{b^2\alpha^2}{c^2}$，$y^2=a^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right)$，

即 $|x|=\frac{b\alpha}{c}$，$|y|=a\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2}}$.

由椭圆和双曲线关于坐标轴的对称性知，以它们的交点为顶点的四边形是长方形，其面积

$$S=4|xy|=4ab\cdot\frac{\alpha}{c}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2}}.$$

因为S与 $\frac{\alpha^2}{c^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right)$ 同时达到最大值，所以当 $\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2=\frac{1}{2}$时 S达到最大值$2ab$.

这时 $\alpha^2=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$，$\beta^2=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$.

因此，满足题设的双曲线方程是 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}=-1$.

相应的四边形顶点的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}b,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}b,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$.

二、一九八九年数学（理科）试题及题解

（一）**选择题**（本题满分36分，共12个小题，每一个小题都给出代号为A，B，C，D的四个结论，其中只有一个是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的圆括号内，每一个小题选对得3分，不选或选错一律得0分。）

（25）如果$I=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，其中I是全集，那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于

（A）ϕ. （B）$\{d\}$. （C）$\{a, c\}$. （D）$\{b, e\}$. 答【A】

（26）与函数$y=x$有相同图象的一个函数是

（A）$y=\sqrt{x^2}$. （B）$y=\frac{x^2}{x}$. （C）$y=a^{\log_a x}$，其中$a>0,a\neq1$.

（D）$y=\log_a a^x$，其中$a>0,a\neq1$. 答【D】

（27）如果圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，高为 2，那么它的侧面积是

（A）$4\sqrt{3}\pi$．（B）$2\sqrt{2}\pi$．（C）$2\sqrt{3}\pi$．（D）$4\sqrt{2}\pi$．　　答【C】

（28）$\cos\left[\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)-\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$的值等于

（A）-1．　（B）$-\frac{7}{25}$．　（C）$\frac{7}{25}$．　（D）$-\frac{\sqrt{10}}{5}$．　　答【A】

（29）已知$\{a_n\}$是等比数列，如果$a_1+a_2+a_3=18$，$a_2+a_3+a_4=-9$，且$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的值等于

（A）8．　（B）16．　（C）32．　（D）48．　　答【B】

（30）如果$|\cos\theta|=\frac{1}{5}$，$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，那么$\sin\frac{\theta}{2}$的值等于

（A）$-\frac{\sqrt{10}}{5}$．（B）$\frac{\sqrt{10}}{5}$．（C）$-\frac{\sqrt{15}}{5}$．（D）$\frac{\sqrt{15}}{5}$．　　答【C】

（31）设复数z满足关系式$z+|z|=2+i$，那么z等于

（A）$-\frac{3}{4}+i$．（B）$\frac{3}{4}-i$．（C）$-\frac{3}{4}-i$．（D）$\frac{3}{4}+i$．　答【D】

（32）已知球的两个平行截面的面积分别为5π和8π，它们位于球心的同一侧，且相距为1，那么这个球的半径是

（A）4．　（B）3．　（C）2．　（D）5．　　答【B】

（33）已知椭圆的极坐标方程是$\rho=\frac{5}{3-2\cos\theta}$，那么它的短轴长是

（A）$\frac{10}{3}$．　（B）$\sqrt{5}$．　（C）$2\sqrt{5}$．　（D）$2\sqrt{3}$．　　答【C】

（34）如果双曲线$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$上一点$P$到它的右焦点的距离是8，那么点$P$到它的右准线的距离是

（A）10．　（B）$\frac{32\sqrt{7}}{7}$．　（C）$2\sqrt{7}$．　（D）$\frac{32}{5}$．　　答【D】

（35）已知$f(x)=8+2x-x^2$，如果$g(x)=f(2-x^2)$，那么$g(x)$

（A）在区间$(-1,\ 0)$上是减函数．（B）在区间$(0,\ 1)$上是减函数．

（C）在区间$(-2,\ 0)$上是增函数．

（D）在区间$(0,\ 2)$上是增函数．　　答【A】

（36）由数字1，2，3，4，5组成没有重复数字的五位数，其中小于50000的偶数共有

（A）60个．　（B）48个．　（C）36个．　（D）24个．　　答【C】

（二）填空题（本题满分24分，共有6个小题，每一个小题满分4分．）

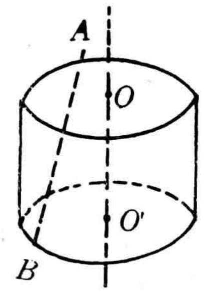
(37)方程$\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$的解集是$\{x|x=2k\pi+\frac{7\pi}{12}$，或$x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in Z\}$　注：也可写成$\{x|x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3},\ k\in Z\}$。

(38) 不等式$|x^2-3x|>4$的解集是$\{x|x<-1,或x>4\}$.

(39) 函数$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数的定义域是$(-1,1)$.

(40) 已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$,那么$a_1+a_2+\cdots+a_7=$ -2.

(41) 已知A和B是两个命题，如果A是B的充分条件，那么B是A的　必要　条件；$\overline{A}$是$\overline{B}$的　必要　条件.



(42) 如图，已知圆柱的底面半径是3，高是4，A、B两点分别在两底面的圆周上，并且$AB=5$,那么直线AB与轴OO'之间的距离等于　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　.

(三) 解答题（本题满分60分，共6个小题.）

(43)（**本小题满分8分**）证明　$\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

〔**证法一**〕$\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

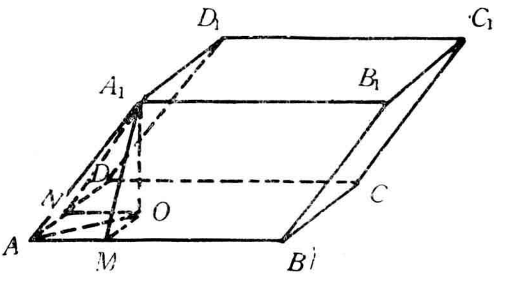
$$=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}.$$

〔**证法二**〕　$\dfrac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}=\dfrac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

(44)（**本小题满分10分**）

如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$AB=5$，$AD=4$，$AA_1=3$，$AB\perp AD$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$.



(i) 求证：顶点A_1在底面$ABCD$的射影O在$\angle BAD$的平分线上；

(ii) 求这个平行六面体的体积.

(i)〔**证**〕如图，连结A_1O，则$A_1O\perp$底面$ABCD$。作$OM\perp AB$交AB于M，作$ON\perp AD$交AD于N，连结A_1M，A_1N。由三垂线定理得$A_1M\perp AB$，$A_1N\perp AD$.

$\because$　$\angle A_1AM=\angle A_1AN$，$\therefore$　$Rt\triangle A_1NA\cong Rt\triangle A_1MA$。$\therefore$　$A_1M=A_1N$.
$\therefore$　$OM=ON$。　$\therefore$　点O在$\angle BAD$的平分线上.

(ii)〔解〕$\because AM = AA_1\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$，$\therefore\ AO = AM\csc\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

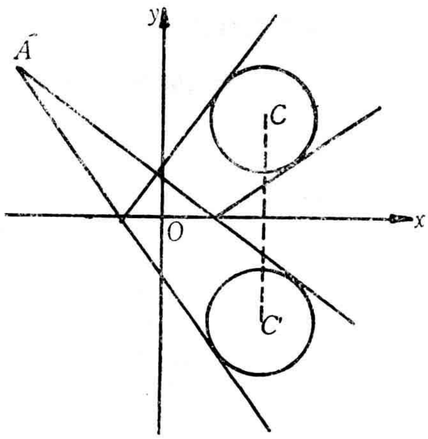
又在$Rt\triangle AOA_1$中，$A_1O^2 = AA_1{}^2 - AO^2 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$，$\therefore\ A_1O = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\therefore$ 平行六面体的体积$V = 5\cdot 4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$.

(45)(**本小题满分10分**)

自点$A(-3,\ 3)$发出的光线L射到x轴上，被x轴反射，其反射光线所在直线与圆$x^2+y^2-4x-4y+7=0$相切，求光线L所在直线的方程.

〔**解法一**〕



已知圆的标准方程是$(x-2)^2+(y-2)^2=1$，它关于x轴的对称圆的方程是

$$(x-2)^2+(y+2)^2=1.$$

设光线L所在直线的方程是

$$y-3=k(x+3)(\text{其中斜率}k\text{待定}).$$

由题设知对称圆的圆心$C'(2,\ -2)$到这条直线的距离等于1，即$d=\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$.

整理得 $12k^2+25k+12=0$,

解得 $k=-\frac{3}{4}$，或 $k=-\frac{4}{3}$.

故所求的直线方程是

$y-3=-\frac{3}{4}(x+3)$，或$y-3=-\frac{4}{3}(x+3)$,

即 $3x+4y-3=0$，或$4x+3y+3=0$.

〔**解法二**〕

已知圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

设光线L所在直线的方程是 $y-3=k(x+3)$（其中斜率k待定）.

由题意知$k\neq 0$，于是L的反射点的坐标是$\left(-\frac{3(1+k)}{k},\ 0\right)$.

因为光线的入射角等于反射角，所以反射光线L'所在直线的方程是

$$y=-k\left(x+\frac{3(1+k)}{k}\right),\qquad \text{即}\quad y+kx+3(1+k)=0.$$

这条直线应与已知圆相切，故圆心C到它的距离等于1，　即　$d=\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$.

以下同解法一.

(46)(**本小题满分12分**)

已知$a>0$，$a\neq 1$，试求使方程$\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有解的$k$的取值范围.

〔**解**〕　由对数函数的性质可知，原方程的解x应满足

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2, & ①\\ x-ak>0, & ②\\ x^2-a^2>0. & ③\end{cases}$$

当①，②同时成立时，③显然成立，因此只需解 $\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2, & ①\\ x-ak>0. & ②\end{cases}$

由①得　$2kx=a(1+k^2)$。④

当　$k=0$时，由$a>0$知④无解，因而原方程无解.

当　$k\neq0$时，④的解是　$x=\dfrac{a(1+k^2)}{2k}$。⑤

把⑤代入②，得　$\dfrac{1+k^2}{2k}>k$.　　当　$k<0$时得$k^2>1$，即$-\infty<k<-1$.

当　$k>0$时得$k^2<1$，即　$0<k<1$.

综合得，当k在集合$(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$内取值时，原方程有解.

（47）（**本小题满分10分**）

是否存在常数a，b，c使得等式

$$1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$$

对一切自然数n都成立？并证明你的结论.

〔**解法一**〕　假设存在a，b，c使题设的等式成立，这时，

令　$n=1$　得　$4=\dfrac{1}{6}(a+b+c)$，　　令　$n=2$　得　$22=\dfrac{1}{2}(4a+2b+c)$，

令　$n=3$　得　$70=9a+3b+c$，

经整理得 $\begin{cases}a+b+c=24,\\ 4a+2b+c=44,\\ 9a+3b+c=70.\end{cases}$

解得　$a=3$，$b=11$，$c=10$。　　于是，对$n=1$，2，3下面等式成立：

$$1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10).$$

记　$S_n=1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+n(n+1)^2$.

设　$n=k$时上式成立，即　$S_k=\dfrac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)$，

那么　$S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+2)^2=\dfrac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)+(k+1)(k+2)^2$

$=\dfrac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24)$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10]$.

也就是说，等式对$n=k+1$ 也成立.

综上所述，当$a=3$，$b=11$，$c=10$时，题设的等式对一切自然数n成立.

〔**解法二**〕 因为 $n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$，所以

$$
\begin{aligned}
S_n&=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2\\
&=(1^3+2\cdot 1^2+1)+(2^3+2\cdot 2^2+2)+\cdots+(n^3+2n^2+n)\\
&=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n).
\end{aligned}
$$

由于下列等式对一切自然数n成立： $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

由此可知 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$.

综上所述，当$a=3$，$b=11$，$c=10$时，题设的等式对一切自然数n成立。

（48）（**本小题满分10分**）

设$f(x)$是定义在区间$(-\infty,\ +\infty)$上以2为周期的函数，对$k\in Z$，用I_k表示区间$(2k-1,\ 2k+1)$，已知当$x\in I_0$时$f(x)=x^2$.

（i）求$f(x)$在I_k上的解析表达式；

（ii）对自然数k，求集合$M_k=\{a\,|\,$使方程$f(x)=ax$在I_k上有两个不相等的实根$\}$。

（i）〔**解**〕∵ $f(x)$是以2为周期的函数， ∴ 当$k\in Z$时，$2k$是$f(x)$的周期.

又∵ 当$x\in I_k$时，$(x-2k)\in I_0$， ∴ $f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$.

即对 $k\in Z$，当$x\in I_k$时，$f(x)=(x-2k)^2$.

（ii）〔**解**〕当$k\in N$且$x\in I_k$时，利用（i）的结论可得方程$(x-2k)^2=ax$，

整理得 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$. 它的判别式是 $\Delta=(4k+a)^2-16k^2=a(a+8k)$.

上述方程在区间I_k上恰有两个不相等的实根的充要条件是a满足

$$
\begin{cases}
a(a+8k)>0,\\
2k-1<\dfrac{1}{2}\left[4k+a-\sqrt{a(a+8k)}\right],\\
2k+1\geqslant\dfrac{1}{2}\left[4k+a+\sqrt{a(a+8k)}\right].
\end{cases}
\quad\text{化简得}\quad
\begin{cases}
a(a+8k)>0, & ①\\
\sqrt{a(a+8k)}<2+a, & ②\\
\sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a. & ③
\end{cases}
$$

由①知$a>0$，或$a<-8k$.

当$a>0$时： 因$2+a>2-a$，故从②，③可得$\sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a$，即

$$
\begin{cases}
a(a+8k)\leqslant(2-a)^2,\\
2-a>0.
\end{cases}
\quad\text{即}\quad
\begin{cases}
(2k+1)a\leqslant 1,\\
a<2.
\end{cases}
\quad\text{即}\quad 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}.
$$

当$a<-8k$时：$2+a<2-8k<0$，易知$\sqrt{a(a+8k)}<2+a$无解.

综上所述，a应满足 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$,

故所求集合

$$M_k=\left\{a\,\middle|\,0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\right\}.$$

三、一九九〇年数学（文科）试题及题解

（一）选择题：本大题共15小题；每小题3分，共45分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。把所选项前的字母填在题后括号内。

（49）方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$ 的解是

（A）$x=\frac{1}{9}$　（B）$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$x=\sqrt{3}$　（D）$x=9$。　【 A 】

（50）$\cos^2 75^\circ+\cos^2 15^\circ+\cos 75^\circ\cos 15^\circ$的值等于

（A）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（B）$\frac{3}{2}$。　（C）$\frac{5}{4}$。　（D）$1+\frac{\sqrt{3}}{4}$。　【 C 】

（51）如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是S，那么圆柱的体积等于

（A）$\frac{S}{2}\sqrt{S}$　（B）$\frac{S}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$　（C）$\frac{S}{4}\sqrt{S}$　（D）$\frac{S}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$。　【 D 】

（52）把复数$1+i$对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$，所得到的向量对应的复数是

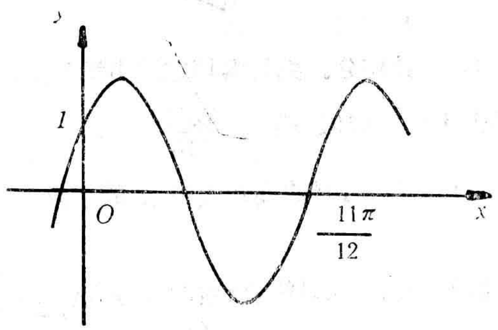
（A）$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$。　（B）$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$。

（C）$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$。　（D）$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$。　【 B 】

（53）双曲线$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$的准线方程是

（A）$y=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$　（B）$x=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$

（C）$x=\pm\frac{16}{5}$　（D）$y=\pm\frac{16}{5}$　【 D 】



（54）已知左图是函数$y=2\sin(\omega x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图象，那么

（A）$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

（B）$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

（C）$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　（D）$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$　【 C 】

（55）设命题甲为：$0<x<5$；命题乙为：$|x-2|<3$。那么

（A）甲是乙的充分条件，但不是乙的必要条件

（B）甲是乙的必要条件，但不是乙的充分条件

（C）甲是乙的充要条件（D）甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件　【 A 】

（56）函数$y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\operatorname{tg}x}{|\operatorname{tg}x|}+\frac{|\operatorname{ctg}x|}{\operatorname{ctg}x}$的值域是

(A)$\{-2,4\}$ (B)$\{-2,0,4\}$ (C)$\{-2,0,2,4\}$ (D)$\{-4,-2,0,4\}$ 【 B 】

(57) 如果直线$y=ax+2$与直线$y=3x-b$关于直线$y=x$对称，那么

(A) $a=\frac{1}{3},b=6$. (B) $a=\frac{1}{3},b=-6$. (C)$a=3,b=-2$. (D)$a=3,b=6$. 【 A 】

(58) 如果抛物线$y^2=a(x+1)$的准线方程是$x=-3$,那么这条抛物线的焦点坐标是

(A)$(3,0)$ (B)$(2,0)$ (C)$(1,0)$ (D)$(-1,0)$ 【 C 】

(59) 设全集$I=\{(x,y)|x,y\in R\}$,集合 $M=\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1\right.\}$,

$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$. 那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于

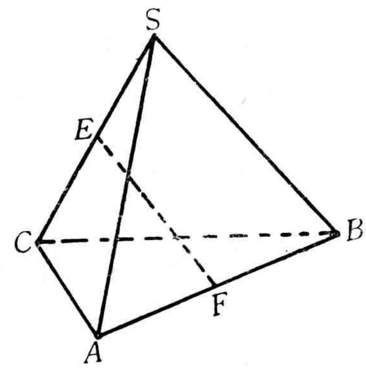
(A)ϕ (B)$\{(2,3)\}$ (C)$(2,3)$ (D)$\{(x,y)|y=x+1\}$ 【 B 】

(60) A、B、C、D、E五人并排站成一排，如果A,B必须相邻且B在A的右边,那么不同的排法共有

(A)60种 (B)48种 (C)36种 (D)24种 【 D 】

(61) 已知$f(x)=x^5+ax^3+bx-8$,且$f(-2)=10$,那么$f(2)$等于

(A)-26 (B)-18 (C)-10 (D)10 【 A 】



(62) 如图,正三棱锥$S-ABC$的侧棱与底面边长相等,如果E、F分别为SC、AB的中点,那么异面直线EF与SA所成的角等于

(A)$90°$ (B)$60°$ (C)$45°$ (D)$30°$ 【 C 】

(63) 以一个正三棱柱的顶点为顶点的四面体共有

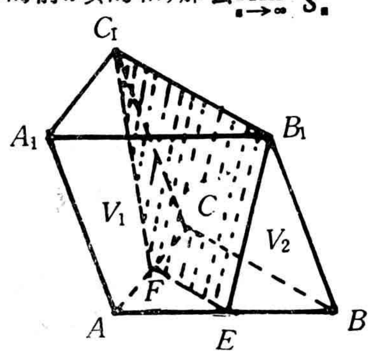
(A)6个 (B)12个 (C)18个 (D)30个 【 B 】

(二) 填空题: 本大题共5小题；每小题3分，共15分。把答案填在题中横线上。

(64) 已知$\sin\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,那么$\sin\frac{\alpha}{2}$的值等于 $\underline{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$.

(65) $(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$的展开式中,$x^2$的系数等于 $\underline{-20}$.

(66) 已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,如果S_n是$\{a_n\}$的前n项的和,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$等于 $\underline{2}$.



(67) 如图,三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,若E、F分别为AB、AC的中点,平面EB_1C_1F将三棱柱分成体积为V_1、V_2的两部分,那么$V_1:V_2=\underline{7:5}$.

(68) 如果实数x、y满足等式$(x-2)^2+y^2=3$.

那么$\frac{y}{x}$的最大值是 $\underline{\sqrt{3}}$.

(三) 解答题: 本大题共6小题，共60分。

(69) 有四个数,其中前三个数成等差数列,后三个数成等比数列,并且第一个数与第四个数的和是16,第二个数与第三个数的和是12.求这四个数。