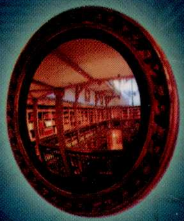
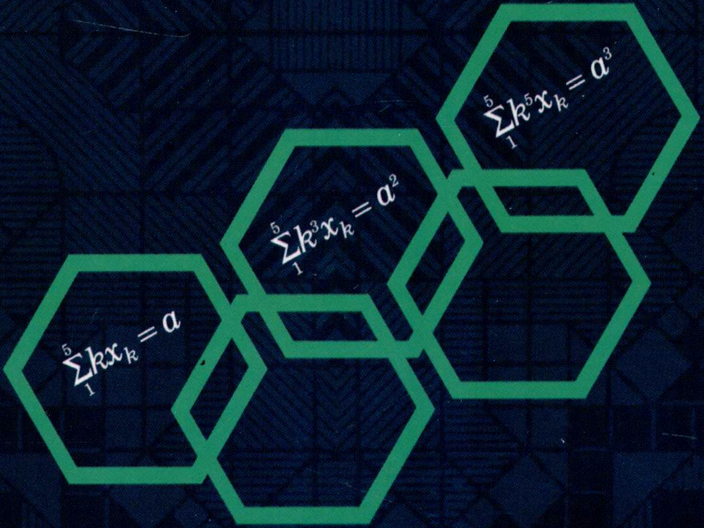
Solutions of Former Soviet Union Collegiate Math Olympic (II)



前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解（下编）

许康　陈强　陈挚　陈娟　编译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Solutions of Former Soviet Union Collegiate Math Olympic (II)

前苏联大学生
数学奥林匹克
竞赛题解（下编）

许康　陈强　陈挚　陈娟　编译

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书下编根据莫斯科大学出版社出版的 B·A·萨多夫尼奇等合编的《大学生数学奥林匹克竞赛题集》译出。这是 1987 年全新版本,不重复前书。

下编前后分问题与解答两部分,两部分均相应分为四章:数学分析,代数,几何,数论、组合和概率论。这与上编(按初、复试)略有区别。

下编包含六百多道题,主要来自 1978 ~ 1984 年间前苏联主要高等院校、城市和地区以至全苏联多轮次的大学生奥林匹克竞赛题。此外尚有部分著名大学间的数学竞赛题和少量重要考试题,书中多数题在后部分配有解答。

由于涉及各种层次的竞赛题,因此书中题目难度波动较大,有相对简单的问题,也有相当令人费解的难题,读者不妨依个人情况自选章节择题解读。

本书适合大学师生参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解. 下编/许康等编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.4

ISBN 978-7-5603-3562-9

Ⅰ.①前… Ⅱ.①许… Ⅲ.①高等数学-竞赛题-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 056085 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 17.5 字数 380 千字
版　　次 2012 年 4 月第 1 版 2012 年 4 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3562-9
定　　价 38.00 元

下编原序

B·A·萨多夫尼奇和A·C·波得戈尔金在1978年所编书[1]中,按选题和复杂性提供了大量各种各样的大学生竞赛题。随后一段时期大学生奥林匹克竞赛活动在前苏联得到更进一步的发展,进行了大量奥林匹克竞赛和解题竞赛。前苏联大批高等院校参与了"大学生与科学-技术进步"多种形式的奥林匹克竞赛活动。奥林匹克竞赛分若干轮次进行:高等院校内部的,地区的,共和国的,全苏联的。在莫斯科和列宁格勒进行了与共和国可相比拟的城市这一轮次的竞赛。总之,有全苏联的,有所有联盟共和国组织参与的轮次,还有莫斯科和列宁格勒的。1974 年首次举行了全苏联轮次的竞赛,随后几年没有进行,而从 1981 年开始一年一度举行。

我们注意到,对于不同数学教学大纲的高等院校,奥林匹克竞赛予以分别进行,最难的竞赛题被提议在综合大学组。

在莫斯科城市这轮竞赛,划分为另一种的若干组。第Ⅰ组有综合大学、师范学院和扩大了数学教学大纲的技术大学,如 МФТИ,МИФИ 等。第Ⅱ组为突出的多数高等技术院校。第Ⅲ组是大多数的工学院。

每组由两类不同版本的问题组成:对于大学一年级和对于大学二到五年级。

遗憾的是,大多数奥林匹克竞赛题近年没有发表,对于广大数学爱好者仍然还不知道。按我们的看法,竞赛题集编成出版的时候,在某种程度会推进今后奥林匹克竞赛活动的发展。由此便引起编写此书的想法,书中编有1978~1984年竞赛题,而B·A·萨多夫尼奇和A·C·波得戈尔金的1974~1977年竞赛题没有编入本书。

本集汇编的问题有“大学生与科学-技术进步”奥林匹克竞赛所有轮次提供的竞赛题:高等院校的,莫斯科奥林匹克竞赛轮次的,地区性奥林匹克竞赛(伏尔加地区),俄罗斯奥林匹克竞赛,以及1981~1983年综合大学组奥林匹克竞赛末轮的竞赛题,还有同样是末轮的1974年奥林匹克竞赛题(没有分组)。在“大学生与科学-技术进步”奥林匹克竞赛范围之外,还有在莫斯科国立大学力学-数学系进行的一系列竞赛题;这个解题的函授竞赛与1982年的讲座的奥林匹克竞赛一起进行。随后一年,在莫斯科国立大学力学-数学系,列宁格勒大学数学-力学系,莫斯科物理-技术学院之间开始进行数学竞赛。本书中也包含有这些竞赛题。希望读者有兴趣了解在НССР和СФРЮ进行的奥林匹克竞赛的某些题目(最近的竞赛是国际的,组织了一些欧洲国家的综合大学参加)。除此之外,书中还包含一系列考试题,它们有莫斯科国立大学提供的数学分析试题,全国性考试及进入研究机关的考试等试题,而其中没有由专家评判组提供的奥林匹克竞赛题。

所有选取的题目分为四章,每章分为若干节(§)。书中提供的题目难度波动很大。在每节有若干相对简单的问题,然而,因为书中包含许多讲座的奥林匹克竞赛题、地区竞赛和数学竞赛题,通常会含有十分困难的题目,其复杂性平均水准略微超过B·A·萨多夫尼奇和A·C·波得戈尔金一书。本编中有若干很难的题目。比如,第四章§7的28题是由列宁格勒大学评判组提供的莫斯科大学-列宁格勒大学数学竞赛题。评判组不知道它的解答(这是竞赛规则允许的),数学竞赛参与者都没有解出此题目,不知道其解答的也包括我们。

本编对多半的题目提供了解答,希望读者独立求解其余的问题。在解答它们中的多数问题之后,便可利用同样的思想来考虑相近的题目。

本编不能以完备性自居,读者可从下列书中寻找不同的奥林匹克竞赛题:从1983年开始在基辅出版的丛书《今日数学》,М. А. Щубин[2],В. Н. Сергеев 和 Г. А. Тоноян[3],П. Г. Сатьянов[4].在[5]汇编有奥林匹克竞赛较复杂的400道题。而在Г. А. Тоноян[6]编入从1889~1977年在前苏联和外国一批著名大学的大学生数学竞赛近2 500道题。

作者对所有举办大学生奥林匹克竞赛的集体,赛题作者,竞赛参与者表示感谢。我们特别感谢莫斯科国立大学的В. М. Тихомиров教授对我们工作的关照,以及И. Г. Царьков,И. А. Копылов和В. В. Титенко有益地商讨一批题目的条件和解答。

B·A·萨多夫尼奇
A·A·格里戈里扬
C·B·阔尼亚金

◎ 目录

第一部分　问题 // 1

第四章　数学分析 // 3

§1. 数列和极限 // 3
§2. 一元连续函数 // 6
§3. 一元函数的微分法 // 8
§4. 积分法 // 13
§5. 多元函数(连续性,微分法,积分法) // 20
§6. 方程和不等式 // 22
§7. 级数和无穷乘积 // 27
§8. 微分方程 // 30
§9. 函数方程 // 33
§10. 复变函数 // 35
§11. 度量和拓扑空间 // 36

第五章　代数 // 39

§1. 行列式,矩阵和线性算子 // 39
§2. 欧几里得空间的线性代数和二次型 // 45
§3. 多项式和三角多项式 // 48

第六章　几何 // 54

§1. 解析几何 // 54
§2. 凸图形,体积和其他问题 // 56

第七章　数论、组合和概率论 // 60

§1. 数论 // 60
§2. 集合论与组合的问题 // 62
§3. 概率论 // 65

第二部分　解答、提示和答案　// 67

第四章　数学分析　// 69

§1. 数列和极限　// 69

§2. 一元连续函数　// 78

§3. 一元函数的微分法　// 82

§4. 积分法　// 91

§5. 多元函数(连续性,微分法,积分法)　// 112

§6. 方程和不等式　// 118

§7. 级数和无穷乘积　// 129

§8. 微分方程　// 137

§9. 函数方程　// 144

§10. 复变函数　// 148

§11. 度量和拓扑空间　// 154

第五章　代数　// 159

§1. 行列式,矩阵和线性算子　// 159

§2. 欧几里得空间的线性代数和二次型　// 184

§3. 多项式和三角多项式　// 192

第六章　几何　// 211

§1. 解析几何　// 211

§2. 凸图形,体积和其他问题　// 216

第七章　数论、组合和概率论　// 232

§1. 数论　// 232

§2. 集合论与组合的问题　// 240

§3. 概率论　// 248

附　　录　// 253

附录一　本书所用符号简介　// 255

附录二　本书各题俄文缩写字母表示的学校及院系全名　// 258

附录三　原书参考文献(下编)　// 260

主译者后记　// 261

编辑手记　// 263

第一部分
问　　题

第四章 数学分析

§1 数列和极限

1.（全俄竞赛） 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n}$$

2.（УДН） 设 $c>0$ 和 $q>1$ 为定数. 对任意自然数 p，我们给出满足不等式

$$(k+c)^p\leqslant qk^p$$

的自然数 k，用 $k(p)$ 予以表示.

证明：极限 $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{k(p)}{p}$ 存在，并求此极限.

3.（全俄竞赛） 设数列 $\{x_n\}\subset\mathbf{R}$ 有极限 $a\in\mathbf{R}$. 证明

$$\bigcap_{\alpha>0}\bigcup_{\beta>0}\bigcap_{n>\beta}(x_n-\alpha,x_n+\alpha)=\{a\}$$

4.（数学竞赛） 数列 1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,… 由奇数和偶数依次交替分组构成，并且在第 n 组中含 n 项. 证明：数列的第 m 项为

$$2m-\left[\frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}\right]$$

5.（МЭИ） 已知数列满足 $a_0=1$，$a_{n+1}=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ia_{n-i}(n\geqslant 0)$，求通项 a_n 的表达式.

6.（莫斯科，Ⅱ组） 设数列由条件 $x_1=1\ 982, x_{n+1}=\dfrac{1}{4-3x_n}(n\geqslant 1)$ 所确定，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7.（МГПИ） 1）求数列 $\{x_n\}$ 的极限，其中 $x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}, x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots,a\geqslant 1$.

2）设 $x_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}, a_i>1$. 证明：当有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(\ln a_n)<\ln 2$$

时，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

8.（МАДИ） 设 $a_1=1\ 983$ 且 $a_{n+1}=\dfrac{2}{2^{a_n}}(n\geqslant 1)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

9.(莫斯科,Ⅲ组) 设 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=x_n-x_n^2(n\geqslant 1)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$.

10.(全苏竞赛) 设数列 $\{a_n\}$ 由条件 $a_n=a_{n-1}(a_{n-1}-1)$ 所确定.试问:对怎样的 a_1,$\{a_n\}$ 收敛?

11.(НГУ) 设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的连续增函数,且 $f(a)\geqslant a$, $f(b)\leqslant b$.任取 $x_1\in[a,b]$,而数列 $\{x_n\}$ 由 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n\geqslant 1)$ 所确定.证明:极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=x^*$ 存在,且 $f(x^*)=x^*$.

12. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1=a$, $x_{n+1}=\frac{2x_n^3}{3x_n^2-1}(n\geqslant 1)$ 所确定.试求所有这样的 a,使得数列 $\{x_n\}$ 确定且有有限的极限.

13.(УДН) 设 $c_0>0$, $c_1>0$ 且 $c_{n+1}=\sqrt{c_n}+\sqrt{c_{n-1}}\ (n\geqslant 1)$,证明:数列 $\{c_n\}$ 收敛,并求此极限.

14.(数学竞赛) 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1>0$, $a_2>0$ 和 $a_{n+1}=\frac{2}{a_n+a_{n-1}}(n\geqslant 2)$ 所确定,证明:$\{a_n\}$ 收敛.

15.(Мехмат) 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^2}{n^2}$ 所确定.其中 $n\geqslant 1$, $0\leqslant x_2<x_1$,证明:$\{x_n\}$ 有界.

16.(数学竞赛) 数列 $\{a_n\}$ 由 $a_n=a_{n-1}-\frac{2}{n}a_{n-2}(n\geqslant 2$, a_0 和 a_1 为任意数)所确定,证明:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$.

17.(Мехмат) 数列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 由下式所确定

$$p_{-1}=0, q_{-1}=1, p_0=q_0=1$$
$$p_n=2p_{n-1}+(2n-1)^2p_{n-2}\quad (n\geqslant 1)$$
$$q_n=2q_{n-1}+(2n-1)^2q_{n-2}\quad (n\geqslant 1)$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\frac{\pi}{4}$.

18.(莫斯科,Ⅱ组) 有界数列 $\{a_n\}$ 中 a_n 为自然数,已知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=1$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=1$.

19.(Мехмат) 将自然数集分成两个无穷子集 A 和 B.证明:对任意 $c>0$,存在这样的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$:$\{a_n\}\subset A$, $\{b_n\}\subset B$, $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 递增且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$$

20.(奥林匹克 СФРЮ;莫斯科,Ⅲ 组) 设$\{a_n\}$为正数数列,而数列$\{x_n\}$由$x_1=1$, $x_2=2$, $x_{n+2}=-x_n-a_nx_{n+1}(n\geqslant 1)$所确定.证明:在数列$\{x_n\}$中有无穷多个正数和无穷多个负数.

21.(莫斯科,Ⅱ 和 Ⅲ 组) 设$\{a_n\}$为由0,1和2组成的非周期数列,按以下方式建立数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$:

当$a_n=0$时,$b_n=0$;

当$a_n=1$或$a_n=2$时,$b_n=1$;

当$a_n=2$时,$c_n=1$;

当$a_n=0$或$a_n=1$时,$c_n=0$.

证明:数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$中至少有一个是非周期的.

22.(莫斯科,Ⅱ 组) 设有n个正数$a_1,\cdots,a_n$,并且$a_1=1$, $a_n=2$,而当$k=2,3,\cdots,n-1$时,$a_k\leqslant\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$.求$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_k$.

23.(Мехмат) 设$\{a_n\}$为有穷的实数数列,$1\leqslant n\leqslant N$.若数a_k, $a_k+a_{k+1},\cdots,a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+1982}$中至少有一个是非负的(若$n>N$,则认为$a_n=0$),我们称数$a_k$为被标记的数.证明:所有被标记的数之和是非负的.

24.(МФТИ) 设数列$\{x_n\}$具有性质:对任何$n<m$有$|x_n-x_m|>\dfrac{1}{n}$.证明:该数列是无界的.

25.(Мехмат) 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为实数数列,并且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,b_n=\infty$$

证明:可找到这样的m和n,使得$|a_m-a_n|>1$和$|b_m-b_n|>1$.

26.(Мехмат) 设有界实数数列$\{x_n\}$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-2x_{n+1}+x_{n+2})=0$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n+1})=0$.

27.同上题.

28.(Мехмат) 设数列$\{x_n\}$对任意具有非负整系数的二次多项式$p(x)$均有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+x_{p(n)})=0$$

问:能否推出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$?

29.设正数数列$\{\alpha_n\}$满足$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\alpha_n^{\frac{1}{n}}=1$和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\alpha_n^{\frac{1}{n}}<1$.证明:存在子数列$\{\alpha_{n_i}\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n_i}^{\left(\frac{1}{n_i}\right)}=1$$

和

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_{n_i}^2-\alpha_{n_i+1}\alpha_{n_i-1}|^{\frac{1}{n_i}}=1$$

§2 一元连续函数

1.(奥林匹克 ЧССР; Мехмат) 证明:存在两个下凸函数f和g,使对所有x都有

$$f(x)-g(x)=\sin x$$

2.(莫斯科,Ⅱ和Ⅲ组) 设$f\in C(\mathbf{R})$. 问:是否一定存在连续函数$g(x)$和$h(x)$,使对所有$x\in\mathbf{R}$都有

$$f(x)=g(x)\sin x+h(x)\cos x$$

3. 讨论函数$f(g(x))$和$g(f(x))$的连续性,其中$f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=1+x-[x]$.

4. 设有区间$(0,1)$内的函数:

1) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

2) $f(x)=\frac{1}{x}$;

3) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

试问,其中哪些函数具有以下性质:$\forall x\in(0,1), \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall y(|y-x|<\varepsilon, y\in(0,1)\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\delta)$.

5.(Мехмат) 试问:定义在自然数集$\mathbf{N}$上的函数$f(n)=\sin n$是否一致连续?

6.(莫斯科,Ⅲ组) 设定义在实轴上的函数$f(x)$,对任何x和任何$h>0$满足

$$|f(x+h)-f(x-h)|<h^2$$

证明:$f(x)\equiv$常数.

7.(奥林匹克 СФРЮ) 设

$$f^*(x)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{3h}$$

其中$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 证明:若处处有$f^*(x)\geqslant0$,则$f$是非减函数.

8.(全苏竞赛) 设连续函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$满足:对任何算术级数$a,b,c,d$都有

$$|f(a)-f(d)|\geqslant\pi|f(b)-f(c)|$$

证明:$f(x)\equiv$常数.

9.(Мехмат) 是否存在$(0,1)$上的连续函数$f(x)$,使对任何$x\in(0,1)$,都有

$$0<\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x)}{t^2}<\infty$$

10.(Мехмат) 设$\varphi(t)$和$\psi(t)$是$(0,+\infty)$上单调递减的

互逆函数,问:对所有 $t>0$,是否有不等式 $\varphi(t)>\psi(t)$ 成立?

11.(Мехмат)　试问:是否存在 $[0,1]$ 上的子集 A 和 B 以及这个区间上的连续函数 f,使得 $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=[0,1]$, $f(A)\subset B$, $f(B)\subset A$?

12.(Мехмат)　设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上具有不同符号值的连续函数. 证明:可找到算术级数 $a,b,c(a<b<c)$ 使得 $f(a)+f(b)+f(c)=0$.

13.(МИИГАиК)　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是区间 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的连续映射. 证明:可找到点 $x_0\in[0,1]$ 使得 $g(f(x_0))=f(g(x_0))$.

14.(数学竞赛)　设 $f\in C[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$. 证明:可找到点 $x_1,x_2\in[0,1]$,使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 且 x_1-x_2 等于 α 或 $1-\alpha$,其中 α 为定数,$0<\alpha<1$.

15.(莫斯科,Ⅱ组)　设 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的严格递增的连续正函数,且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x\ln x}=1$. 我们用 $\varphi(x)$ 表示 $f(x)$ 的反函数,即对每个正的 x,都有 $\varphi(f(x))=x$. 证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}}=1$$

16.(莫斯科,Ⅰ组)　设函数 $\varphi(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对任何 $a>0$,有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(at)}{t^a}=f(a)$$

证明:$\frac{f(a)}{a^a}\equiv$ 常数.

17.(莫斯科,Ⅰ组)　设 f 和 g 为定义在整个数轴上的周期函数,已知

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$$

证明:$f(x)\equiv g(x)$.

18.(МФТИ)　试问:对怎样的实数 α,函数序列

$$f_n(x)=\left(\frac{x-\alpha n}{n}\right)^n e^{-\frac{x}{3}}\quad n=1,2,\cdots$$

对 $x>0$ 为一致有界? 亦即,是否有某个 c,对所有 n 和 $x>0$,都有 $|f_n(x)|<c$?

19.(奥林匹克 СФРЮ)　设 f 和 g 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的实函数,它们在任何有限区间 $[a,b]$ 上有界,且 $g(x)$ 在不同点处有不同的值. 又已知对某个 $h>0$ 存在(有穷或无穷)极限

$$c=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)}$$

证明:极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在且等于 c.

20.(莫斯科,Ⅱ和Ⅲ组) 设连续函数$f(x)$下凸且$f(0)=0$. 证明:对 $x>0$,函数$\dfrac{f(x)}{x}$是增加的.

21. 黎曼函数 $R(x)$ 如此定义

$$R(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\\ \dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\end{cases}$$

其中$\dfrac{p}{q}$为不可约分数,$q>0$.

证明:$R(x)$是具有点态极限的连续函数序列.

22.(数学竞赛) 构造$[0,1]$上的连续函数,使其在每个象点 y 有一个,或有三个逆象,并且在某点有三个逆象.

23.(数学竞赛) 是否存在连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得点集 $\{f(0),f(f(0)),\cdots,\underbrace{ff\cdots f}_{k}(0)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 处处稠密?

24.(莫斯科,Ⅰ组) 是否存在这样的连续函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,其对有理数 x,$f(x)$ 是无理数,而对无理数 x,$f(x)$ 是有理数?

25.(奥林匹克 СФРЮ) 证明:任意函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的第一类间断点集 y 为可数集.

26. 数 $y\in\mathbf{R}$ 称为函数$f(x)$的极值,是指:存在点 x_0 使得 $f(x_0)=y$ 且 x_0 为$f(x)$的局部极大或极小点. 证明:连续函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的极值集不多于可数的.

27. 试问:是否存在这样的实连续函数序列$\{f_n(x)\}$,其当且仅当在有理点 x 有 $f_n(x)\to+\infty\ (n\to+\infty)$?

28.(Мехмат) 设函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$对任意 $a\neq b$ 有

$$|f(a)-f(b)|<|a-b|$$

证明:若$f(f(f(0)))=0$,则$f(0)=0$.

§3 一元函数的微分法

1.(莫斯科,Ⅲ组) 函数$f(x)=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$在$x=0$处是否可导?(我们约定,$\sqrt[3]{-u}=-\sqrt[3]{u}$, $u>0$)

2.(МИЭМ) 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$可导,$f'(0)=1$ 且 $f'(1)=0$. 证明:在某点 $c\in(0,1)$,$f'(c)=c$.

3.(МЭИ) 设函数$f(x)$在$[0,1]$可导,$f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:对任何正数 k_1 和 k_2,可找到数 $x_1\in[0,1]$ 和 $x_2\in[0,1]$,使得 $x_1<x_2$ 且

$$\frac{k_1}{f'(x_1)}+\frac{k_2}{f'(x_2)}=k_1+k_2$$

4.(Мехмат) 函数$f(x)$在区间$[0,1]$连续,在区间$(0,1)$可导.证明:若$f(0)=f(1)=0$,则在某点$x\in(0,1)$有$f'(x)=x$.

5.(Мехмат) 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$二次连续可导,并且在$[a,b]$有不少于三个的不同零点.证明:存在点$x\in[a,b]$,使得

$$f(x)+f''(x)=2f'(x)$$

6.(奥林匹克 ЧССР) 函数f和g在区间(a,b)不是常数,且对每点$x\in(a,b)$满足条件$f(x)+g(x)\neq 0$,$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)=0$.证明:对所有$x\in(a,b)$,$g(x)$不取零值,且关系式$\frac{f(x)}{g(x)}$在区间(a,b)上为常数.

7.函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续,在区间(a,b)可导,已知$f(a)\leqslant f(b)$,并且有某个$\varepsilon>0$,对所有$x\in(a,b)$,不等式$f(x)+f'(x)<\varepsilon$成立.证明:当$x\in(a,b)$时,有$f(x)<\varepsilon$.

8.函数f在点x_0可导,如果在点x_0存在这样的邻域U,使对任何点$x\in U$都有不等式$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$(或$f(x)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$),我们就称$f$在点$x_0$为凸的(或凹的).

证明:在区间可导的任何一个函数,它至少在这区间的一个内点是凸的或是凹的.

9.(Мехмат) 函数$x(t)\in C^2[0,1]$,已知$x(0)=x'(0)=x(1)=0$且对所有$t\in[0,1]$有$|x''(t)|\leqslant 1$.问:$\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$将取怎样的值?

10.(莫斯科,Ⅰ组) 设函数$a(x)$连续可导,$a(x)\geqslant 1$;$f(x)$有连续二阶导数,$f(0)=f'(0)=0$且对所有x,$(af')'(x)+f(x)\geqslant 0$.证明:$f(\sqrt{2})\geqslant 0$.(所有函数定义在$(-\infty,+\infty)$上)

11.(奥林匹克 СФРЮ) 设$p(x)$是首项系数为正的多项式,证明:存在这样的数x_0,使对一切$x>x_0$,函数$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}p(x)$的所有导数都是正的.

12.(莫斯科,Ⅲ组) 试问:是否存在这样定义在整个数轴上的非线性函数,它具有任意阶导数,并且对任意自然数n,它的n阶导数按模处处不超过$\frac{1}{2^n}$?

13. 1)(Мехмат) 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上n次连续可导,且有不少于n个零点(考虑重数).证明

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant\frac{(b-a)^n}{n!}\max_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|$$

2)(МАДИ) 函数$f(x)\in C^2[0,1]$,在$[0,1]$有不少于两个的零点(考虑重数),此外,对所有$x\in[0,1]$,$|f''(x)|\leqslant 1$.试

问: $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ 是多大的数?

14.(数学竞赛) 设 $f(x)\in C^n[0,1]$; $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 是区间 $[0,1]$ 上不同的数. 证明

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\right|\leqslant \frac{1}{n!}\max_{x\in[0,1]}|f^{(n)}(x)|$$

15.(Мехмат) 设 $f(x)\in C^k[a,b]$, 且对所有 $x\in[a,b]$, $f^{(k)}(x)\geqslant 1$. 证明:对于 $0<\varepsilon<\dfrac{b-a}{2^{k+1}}$, 可以指出若干个位于区间 $[a,b]$ 上的两两不相交的区间 $\Delta_1,\cdots,\Delta_n$(可能是一个), 使得:

1)它们长度之和大于 $b-a-2^{k+1}\varepsilon$;

2)对任意点 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$, 不等式 $|f(x)|\geqslant\varepsilon^k$ 成立.

16.(数学竞赛) 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 有 p 阶连续导数, 设 $M_0=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|$, $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f^{(k)}(x)|<\infty$ $(k=1,\cdots,p)$. 证明:对任何这样的 k, 以下不等式成立

$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(p-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{p}}M_p^{\frac{k}{p}}$$

17.(МИЭТ) 设 $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, 求 $f^{(s)}(0)$ $(s=1,2,\cdots)$.

18.(莫斯科,Ⅲ组) 解方程

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\left(\frac{1}{1+\sqrt{y}}\right)\bigg|_{y=x}=\frac{1}{3}$$

19.(莫斯科,Ⅱ组) 证明:存在这样的常数 a,b,c, 使对任意在 $[-1,1]$ 上三阶可导的函数 $f(x)$, 以下关系式成立

$$af(-h)+bf(0)+cf(h)=f'(0)h+O(h^3)\quad(|h|\leqslant 1)$$

20.(МИСиС) 求 $\varphi(1)$, 设

$$\varphi(x)=\left[(x+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n(x^k-1)^n\quad k\in\mathbf{N},\ n\in\mathbf{N}$$

(记 $\left[(x+1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n$ 表示 n 次使用算子 $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$).

21.(奥林匹克 СФРЮ; Мехмат) 设 $f(x)\in C^{\infty}(\mathbf{R})$, $f(0)=0$, $f^{(k)}(0)=0$ 且对所有 $k\in\mathbf{N}$ 和 $x>0$, $f^{(k)}(x)\geqslant 0$. 证明:当 $x>0$ 时 $f(x)=0$.

22.(全俄竞赛) 设 $f(x)\in C^{\infty}[-1,1]$, 对所有 $k\in\mathbf{N}$, $f^k(0)=0$, 以及存在数 $\alpha\in(0,1)$ 使对所有 $k\in\mathbf{N}$ 有

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f^{(k)}(x)|\leqslant\alpha^k k!$$

证明:在 $[-1,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

23.(数学竞赛) 将函数 $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$ 展开为 x 的幂级数.