运 筹 学 讲 义

线 性 规 划

排 队 论

上海交通大学1220教研室

移动。

令函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别获得变分 $\delta x_1(t)$ 和 $\delta x_2(t)$，这时泛函（5-10）变成

$$J[x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2]=\int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} F(t, x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \dot{x}_1+\delta\dot{x}_1, \dot{x}_2+\delta\dot{x}_2)dt$$

可以求出其变分为

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}[F_{x_1}\delta x_1+F_{x_2}\delta x_2+F_{\dot{x}_1}\delta\dot{x}_1+F_{\dot{x}_2}\delta\dot{x}_2]dt+F\Big|_{t_1}\delta t_1$$

将上式积分内的后两项进行分部积分，可得

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(F_{x_1}-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}_1}\right)\delta x_1+\left(F_{x_2}-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}_2}\right)\delta x_2\right]dt+$$

$$+F\Big|_{t_1}\delta t_1+F_{\dot{x}_1}\delta x_1\Big|_{t_1}+F_{\dot{x}_2}\delta x_2\Big|_{t_1}$$

在极值曲线上，应有

$$\delta J=0$$

由此得 Euler 方程组

$$\begin{cases} F_{x_1}-\dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_1}=0 \\ F_{x_2}-\dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_2}=0 \end{cases} \tag{5-12}$$

和

$$[F\delta t_1+F_{\dot{x}_1}\delta x_1+F_{\dot{x}_2}\delta\dot{x}_2]_{t_1}=0 \tag{5-13}$$

仿照推证等式（4-22）的作法，可得

$$\delta x_1\Big|_{t_1}=\delta x_1(t_1)=\dot{\varphi}(t_1)\delta t_1-\dot{x}_1(t_1)\delta t_1$$

$$\delta x_2\Big|_{t_1}=\delta x_2(t_1)=\dot{\psi}(t_1)\delta t_1-\dot{x}_2(t_1)\delta t_1$$

将以上两式代入方程（5－13），给出

$$[F+(\dot{\varphi}-\dot{x}_1)F_{\dot{x}_1}+(\dot{\psi}-\dot{x}_2)F_{\dot{x}_2}]_{t_1}\delta t_1=0$$

考虑到 δt_1 的任意性，最后得横截条件为

$$[F+(\dot{\varphi}-\dot{x}_1)F_{\dot{x}_1}+(\dot{\psi}-\dot{x}_2)F_{\dot{x}_2}]_{t_1}=0 \tag{5-14}$$

极值函数应为 Euler 方程组的解它包含 4 个任意常数利用端点 A 固定的两个条件

$$x_1(t_0)=x_{10}\,,\quad x_2(t_0)=x_{20}$$

加由方程（5－11）给定的两个条件以及横截条件（5－14）一共 5 个条件就可以把这 4 个常数和 t_1 确定出来，再强调一下，这样得出的极值函数并不一定能使泛函实现极值，因为我们得出的所有条件都仅仅是必要条件，并非充分条件。

现在来讨论更一般的情况，这时泛函含有 n 个未知函数。取方程（5－1）的形式，利用相同的方法，可以作出结论：在这种情况下，极值函数应当满足下列的 Euler 微分方程组：

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}_i}=0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{5-15}$$

一般说来，这组方程的解包含 $2n$ 个任意常数，为确定这 $2n$ 个常数需要 $2n$ 个端点条件或横截条件。

在讨论含有多个未知函数的变分问题时，采用向量形式，可以使该式简化。这时的提法是，给定下列形式泛函

$$J[X]=\int_{t_0}^{t_1} F(t,X,\dot{X})\,dt \tag{5-16}$$

其中F是X的数量函数，而X是n维向量函数，

$$X=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{5-17}$$

需要从一类向量函数中确定出函数X(t)，使泛函(5-10)达到极值。

采用和数量情况相同的论证方法，可得向量形式的Euler方程

$$\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=0 \tag{5-18}$$

上式中数量函数F对向量X的导数，根据定义为

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{5-19}$$

设端点A是固定的，端点B可以沿曲线

$$X=C(t)$$

移动，即在端点B处的横截条件的向量形式为

$$\left[\dot{C}^{T}(t_1)-\dot{X}^{T}(t_1)\right]\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\Big|_{t_1}+\delta X(t_1)F\Big|_{t_1}=0 \qquad (5\text{-}20)$$

需要指出，横截条件（5-14）实际上是上式的特殊情况，因为在只含两个未知函数时，有

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}, \qquad C(t)=\begin{bmatrix}\varphi(t)\\\psi(t)\end{bmatrix}$$

将横截条件（5-20）的左端写成数量形式就得到横截条件（5-14）。

§6 条件极值的变分问题

在控制理论中经常遇到条件极值的变分问题。这仍是求一个泛函J的极值问题，但泛函J所依赖的函数需要满足一定的约束条件。解决这种变分问题与解决函数的条件极值问题所用的方法类似。所以让我们先回忆一下条件极值问题的解法。

设有函数

$$Z=F(x,y) \tag{6-1}$$

现在要求函数Z在条件

$$f(x,y)=0 \tag{6-2}$$

下的极值。解决这种问题有两种方法。首先，当然会这样想，从方程（6-2）中把y解出来：

$$y=y(x) \tag{6-3}$$

然后把y(x)代进F(x,y)。这样一来，函数Z只含有一个变量x了，条件极值问题遂化为一般的极值问题。这种方法自然也可以用来解决条件极值的变分问题。不过，这种方法有时并不理想。一则要从方程（6-2）把y解出来往往很困难，再则对x和y这两个变量没有平等看待。因此，第二种方法，即所谓Lagrange乘子法，或简称乘子法便得到广泛的应用，因为它正好可以克服上述缺点。

用乘子法来解决上述问题的步骤如下：

第一步作一个辅助函数

$$H=F(x,y)+\lambda f(x,y) \tag{6-4}$$

式中λ是待定的常数；第二步：求函数H的无条件极值，即令

$$\frac{\partial H}{\partial x}=0 \quad , \tag{6-5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=0 \tag{6-6}$$

第三步：联立求解方程（6-2）、（6-5）和（6-6），求出驻点（x_0，y_0）和常数λ的值来；第四步：判断x_0、y_0是否使函数$F(x,y)$取得极值。这种方法对n元函数

$$F=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

和有多个约束条件

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad , i=1,2,\cdots,m, \quad m<n$$

的问题一样适用。

至于条件极值的变分问题用拉格朗日乘子法方法。以下分两种情况加以讨论。

6—1 几何约束

现在的问题是，给定泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x_1,\cdots,x_n)\,dt$$

求它在几何约束条件

$$f_i(t, x_1, \cdots, x_n) = 0 \qquad i=1,2,\cdots,m$$

下的极值。为叙述方便起见，我们设 $n=2$，$m=1$，现在问题的提法是，给定泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2)dt \tag{6-7}$$

求函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，在约束条件

$$f(t, x_1, x_2)=0 \tag{6-8}$$

下使泛函（6-7）实现极值，且满足边界条件

$$\begin{aligned} x_1(t_0)&=x_{10}, & x_1(t_1)&=x_{11} \\ x_2(t_0)&=x_{20}, & x_2(t_1)&=x_{21} \end{aligned} \tag{6-9}$$

自然、条件（6-8）和（6-9）是不矛盾的，即应有

$$f(t_0, x_{10}, x_{20})=0, \quad f(t_1, x_{11}, x_{21})=0$$

用几何的话说，就是要从曲面 $f(t, x_1, x_2)$ 上确定一条从点 (t_0, x_{10}, x_{20}) 到点 (t_0, x_{11}, x_{21}) 的光滑曲线：

$$\begin{cases} x_1=x_1(t) \\ x_2=x_2(t) \end{cases} \tag{6-10}$$

使泛函（6-7）实现极值。

这个问题用乘子法求解的步骤是：首先作一个泛函

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}[F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)+\lambda(t)f(t, x_1, x_2)]dt \tag{6-11}$$

简记

$$H(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\lambda)=F(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)+\lambda(t)f(t,x_1,x_2)$$

或 (6-12)

$$H=F+\lambda f$$

则泛函（6-11）可以写成

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}H\,dt.$$

然后，求泛函 J_0 的无条件极值，写出 Euler 方程

$$H_{x_1}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_1}=0 \tag{6-13}$$

$$H_{x_2}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_2}=0 \tag{6-14}$$

下一步将约束方程（6-8）和上述两个方程联立求解，3个方程正好可以确定3个未知函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 和 $\lambda(t)$，4个边界条件（6-9）正好用来确定 Euler 方程通解中的4个任意常数，最后还需判定，极值函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是否能使泛函 J 达到极值。

现在来说明，用这种方法求得的函数 $x_1(t)$ $x_2(t)$，即能使泛函 J_0 达到极值的函数，就是原来变分问题的解答。因为，由方程（6-8），（6-13）、（6-14）联立解出的函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 和 $\lambda(t)$ 自然应当满足约束方程

$$f(t,x_1,x_2)=0$$

所以必有

$$J_0=J$$

再有，当把由此解出的$\lambda(t)$代入泛函（6-11）时，可以理解，函数$x_1(t)$、$x_2(t)$将使泛函（6-11）达到无条件极值，因为这时函数$x_1(t)$、$x_2(t)$是泛函J_0的Euler方程（6-13）、（6-14）的解。就是说，对所有相邻的函数说，$x_1(t)$、$x_2(t)$都将使泛函（6-11）达到极值。当然，特别对满足约束方程那一更小类的函数说，泛函也将达到极值。

上面的推理只说明了，用乘子法求出的泛函J_0的极值函数是泛函J的条件极值函数。但是，泛函J的所有条件极值函数是否都能用乘子法求得出来呢？回答这个问题，有下面的定理。

定理　如果函数

$$x_1=x_1(t)\ ,\qquad x_2=x_2(t) \tag{6-15}$$

能使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x_1,x_2)\,dt \tag{6-16}$$

在条件

$$f(t,x_1,x_2)=0 \tag{6-17}$$

下达到极值，那么必有适当的因子$\lambda(t)$存在，使函数$x_1(t)$、$x_2(t)$满足泛函

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}(F+\lambda f)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}H\,dt \tag{6-18}$$

的Euler方程

$$H_{x_1}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_1}=0 \qquad (6-19)$$

$$H_{x_2}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_2}=0 \qquad (6-20)$$

而函数$\lambda(t)$和$x_1(t)$、$x_2(t)$则由Euler和约束方程

$$f(t,x_1,x_2)=0 \qquad (6-21)$$

共同确定。当把$\lambda(t)$也看成泛函J_0的自变函数时，则方程(6－21)也可看成泛函(6－18)的Euler方程。

关于这个定理的证明，请参看关于变分法的专著。

例1、给定泛函

$$J=\int_0^R\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}\,dt$$

求此泛函在约束条件

$$t^2+x_1^2=R^2$$

和边界条件

$$x_1(0)=-R\ ,\quad x_2(0)=0$$

$$x_1(R)=0\ ,\quad x_2(R)=\pi$$

下的极值

解　作泛函

$$J_0=\int_0^R\left[\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}+\lambda(t)(t^2+x_1^2-R^2)\right]dt$$

写出泛函J_0的Euler：

$$2\lambda x_1 - \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}} = 0$$

积分后一方程并两端平方，给出

$$\frac{\dot{x}_2^2}{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2} = c_1$$

由此解出

$$\dot{x}_2^2 = \frac{c_1}{1-c_1}(1+\dot{x}_1^2) = c_2(1+\dot{x}_1^2) \qquad \left(c_2 = \frac{c_1}{1-c_1}\right)$$

从约束方程

$$t^2 + x_1^2 = R^2$$

可以求得

$$\dot{x}_1^2 = \frac{t^2}{R^2-t^2}$$

将它代入 $\dot{x}_2^2$ 的表达式，得

$$\dot{x}_2^2 = \frac{c_2 R^2}{R^2-t^2}$$

两边开方，给出

$$\dot{x}_2 = \frac{c_3}{\sqrt{R^2-t^2}} \qquad (c_3 = \sqrt{c_2}\,R)$$

由此有

$$dx_2 = \frac{c_3\,dt}{\sqrt{R^2-t^2}}$$

两边积分，给出

$$x_2 = C_3 \arcsin \frac{t}{R} + C_4$$

代入边界条件

$$x_2(0)=0 \quad , \quad x_2(R)=\pi$$

求出积分常数

$$C_3 = 2 \quad , \quad C_4 = 0$$

因而

$$x_2 = 2 \arcsin \frac{t}{R}$$

从约束方程并结合 $x_1(t)$ 的边界条件，可得

$$x_1 = -\sqrt{R^2 - t^2}$$

因此，泛函J的极值函数为

$$x_1 = -\sqrt{R^2 t^2} \; , \quad x_2 = 2 \arcsin \frac{t}{R}$$

若改用参数式，令 $t = R\sin\theta$ ，则得泛函J的极值曲线为

$$t = R\sin\theta \; , \quad x_1 = -R\cos t \; , \quad x_2 = 2t$$

这是螺旋线的参数方程式。此例的几何意义实际是，在柱面

$$t^2 + x_1^2 = R^2$$

上找一条连结点（0，−R，0）和点（R，0，π）的曲线，使它有最短的长度。根据直观判断，因为把柱面展开时，螺旋线变成直线。由此可知得出的极值函数或曲线能使泛函J

实现极小值。

6-2 运动约束

在前一般我们考虑的是几何约束

$$f(t, x_1, x_2)=0$$

现在我们来考虑在运动约束

$$f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)=0$$

下的泛函极值问题。和以前一样，可以证明下面的定理

定理 如果函数

$$x_1=x_1(t), \quad x_2=x_2(t)$$

能使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\,dt \tag{6-22}$$

在约束条件

$$f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)=0 \tag{6-23}$$

下实现极值，那么必有适当的因子 $\lambda(t)$ 存在，使函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 满足泛函

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}[F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)+\lambda(t) f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)]\,dt \tag{6-24}$$

的 Euler 方程

$$H_{x_1}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_1}=0 \tag{6-25}$$

$$H_{x_2}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_2}=0 \qquad (6-26)$$

其中

$$H=F(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)+\lambda(t)f(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)$$

而函数 $\lambda(t)$，$x_1(t)$、$x_2(t)$ 由方程 (6-23)，(6-25) 和 (6-26) 共同确定。

对于含有 n 个自变函数的泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x_1,\cdots,x_n,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)dt$$

和 m 个约束条件

$$f_i(t,x_1,\cdots,x_n,\dot{x}_1\cdots,\dot{x}_n)=0\ ,\quad i=1,2,\cdots m\ ,\quad m<n$$

的情况，定理的陈述完全一样。只是这时的 Euler 方程共有 n 个

$$H_{x_j}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

而其中的函数

$$H=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i$$

这 n 个 Euler 方程加上 m 个约束方程就可以把共 $(n+m)$ 个函数 $x_1(t)$，…，$x_n(t)$ 和 $\lambda_1(t)$，…，$\lambda_m(t)$ 确定出来。Euler 方程通解中的 $2n$ 个积分常数可以利用 $2n$ 个边界条件

$$x_1(t_0)=x_{10}\ ,\quad x_2(t_0)=x_{20}\cdots,\quad x_n(t_0)=x_{n0}$$

$$x_1(t_1)=x_{11}\ ,\quad x_2(t_1)=x_{21}\ ,\cdots,\quad x_n(t_1)=x_{n1}$$

确定出来。自然、这2n个边界条件应该和约束条件是相容的。在具体问题中，一般地说，并不需要2n个边界条件。因为有些边界条件已经隐含在约束方程中了。

例2 给定泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2(\ddot{\theta})^2dt$$

需要确定函数 $u(t)$，满足约束方程

$$\ddot{\theta}-u=0$$

及边界条件

$$\theta(0)=1,\ \dot{\theta}(0)=1,\ \theta(2)=0,\ \dot{\theta}(2)=0 \qquad (6-27)$$

并使泛函取极值。

解 先把问题化成我们讨论过的形式。为此，设

$$x_1(t)=\theta(t),\quad x_2(t)=\dot{x}_1(t)$$

则约束方程化为两个一阶方程

$$\dot{x}_1-x_2=0 \qquad (6-28)$$

$$\dot{x}_2-u=0 \qquad (6-29)$$

而泛函J变成

$$J_1=\frac{1}{2}\int_0^2u^2dt \qquad (6-30)$$

现在问题变成：在满足约束条件(6-28)、(6-29)的情况下，确定一个函数 $u(t)$，使泛函(6-30)取极值，且满足边界条件(6-27)。

应用乘子法，作泛函

$$J_0=\int_0^2[\frac{1}{2}u^2+\lambda_1(x_2-\dot{x}_1)+\lambda_2(u-\dot{x}_2)]dt$$

可以把 J_0 看成依赖于3个函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 和 $u(t)$ 的泛函，其Euler方程为

$$H_{x_1}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_1}=\dot{\lambda}_1=0$$

$$H_{x_2}-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}_2}=\lambda_1+\dot{\lambda}_2=0$$

$$H_u-\frac{d}{dt}H_{\dot{u}}=u+\lambda_2=0$$

由此可解出

$$\lambda_1=a_1$$

$$\lambda_2=-a_1t+a_2$$

$$u=a_1t-a_2$$

将 $u(t)$ 代入约束条件(6-29)，给出

$$x_2(t)=\frac{1}{2}a_1t^2-a_2t+a_3$$

再由方程(6-28)，得

$$x_1(t)=\frac{1}{6}a_1t^3-\frac{1}{2}a_2t+a_3t+a_4$$

利用4个边界条件可求出

$$a_1=3\ ,\quad a_2=\frac{7}{2}\ ,\quad a_3=1\ ,\quad a_4=1$$

由此得