高等学校教材

概率论与数理统计

obability and Statistics

主　编　王志福
副主编　李　娜　宓　颖

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　　王志福
副主编　　李　娜　宓　颖
编　者　　王焕清　殷　月　苏再兴

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是根据目前普通二本高校教学现状，结合编者多年在教学一线的教学经验编写而成的。主要内容有：(1)概率论：包括事件和概率、随机变量及其分布、数字特征、大数定律和中心极限定理；(2)数理统计：包括抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。每章配有A、B两类习题，并附有习题参考答案，其中A类题是与该章内容完全相对应的基本题；B类题是供学有余力(包括准备报考硕士研究生)的学生选做的题。书中带“*”号的内容可由授课教师根据实际教学要求灵活取舍。

本书可作为普通二本高校理工类、经管类专业及独立学院的概率统计课程教材，也可供有关科技人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王志福主编. —北京：高等教育出版社，2013.3

ISBN 978-7-04-036874-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第019970号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 徐 可　封面设计 赵 阳　版式设计 杜微言
插图绘制 黄建英　责任校对 刘 莉　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 煤炭工业出版社印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 17.25
字　　数 310千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2013年3月第1版
印　　次 2013年3月第1次印刷
定　　价 25.10元

物 料 号 36874-00

前　言

近年来，随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育已经突破了以前的精英式教育模式，进入大众化教育阶段。高等学校教育教学观念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程专业覆盖面也不断增大。现在出版的大部分教材都是传统的精英教育时期教材的部分调整和修改，对普通二本高校的学生来说，这些教材的理论比较深。二本高校学生的数学基础一般相对比较低，将来的去向少量是继续求学读研究生，多数是直接就业，他们是大众化教育的主要对象，而现实情况是，面向这些学生的教材相对缺乏。

本教材在充分了解当前教学现状的基础上，对教材的基本理论知识和实践应用能力方面做了改革尝试，以保证基本理论知识够用，同时强化学生的实践应用能力。主要特点如下：

1. 面向二本高校学生，依据高校新制定的人才分流培养方案，本教材在概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排等方面，都从教学的实际要求出发，教学适用性强。

2. 从课程特点出发，分析人才培养的需求差异及课程体系系统性、严密性与应用型人才培养需求的关系。在教材中体现出教学改革与教学内容的优化，使教材适宜于培养应用型人才，兼顾学生的知识学习与能力培养，有利于学生的可持续发展。

3. 编写成员都是近年来在教学一线的教师，他们清楚学生的实际情况，多年来对教材内容和教学改革的研究有很好的基础。本书中的例题和习题都是教师多年总结提炼出来的，比较适合于大学生的学习、研究生入学考试及未来的学习。

本教材由王志福主编，参加讨论和编写的人员有李娜、宓颖、王焕清、殷月、苏再兴、沈家云、朱静红、刘小运等。在教材的编写过程中得到很多高校一线教师的宝贵意见，特别是大连理工大学的滕素珍教授、大连大学的张成教授，在此表示衷心感谢。

教材中难免存在不妥之处，希望使用本教材的教师和学生批评指正。

编者

2012 年 11 月

目　　录

第1章 事件和概率

在现实世界中发生的现象千姿百态,概括起来无非是两类现象:确定性的和随机性的.例如,水在通常条件下温度达到100℃时必然沸腾,温度为0℃时必然结冰;同性电荷相互排斥,异性电荷相互吸引等等,这类现象称为确定性现象,它们在一定的条件下一定会发生.另有一类现象,在一定条件下,试验有多种可能的结果,但事先又不能预测是哪一种结果,此类现象称为随机现象.例如:测量一个物体的长度,其测量误差的大小;从一批电视机中随便取一台,电视机的寿命长短等都是随机现象.概率论与数理统计,就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科.

这里我们注意到,随机现象是与一定的条件密切联系的.例如:在城市交通的某一路口,指定的1小时内,汽车的流量多少就是一个随机现象,而"指定的1小时内"就是条件,若换成2小时内,5小时内,流量就会不同.如将汽车的流量换成自行车流量,差别就会更大,故随机现象与一定的条件是有密切联系的.

概率论与数理统计的应用是很广泛的,几乎渗透到所有科学技术领域,如工业、农业、国防与国民经济的各个部门.例如,工业生产中,可以应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品的抽样检查等.还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报等等.另外,概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透,产生了各种边缘性的应用学科,如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

§1.1 随机试验 随机事件

本节包括随机现象、样本空间、随机事件、事件间的关系、事件运算等内容,简要介绍上述内容的概念及事件间的基本运算.

一、随机现象 随机试验

1. 随机现象

在一定条件下,并不总是出现相同结果的现象称为随机现象.例如:

抛一枚硬币,有可能正面朝上,也有可能反面朝上.

投一颗骰子,出现的点数.

一天内进入某超市的顾客数.

射击命中的环数.

测量某物理量(长度、直径等)的误差.

在相同条件下生产产品的不合格率.

商店一天的销售额.

一天的储蓄存款余额.

随机现象到处可见,其特点是结果不止一个,出现哪个结果事先不知道.

2. 随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的,为对随机现象加以研究所进行的观察或实验,称为试验. 若一个试验具有下列三个特点:

1°可以在相同的条件下重复地进行;

2°每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以明确所有可能出现的结果;

3°进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现,则称这一试验为随机试验,记为 E.

二、随机事件

1. 样本空间

将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,用符号 Ω 表示. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点,用符号 ω 表示.

2. 随机事件

样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称事件,用符号 $A,B,\cdots$ 表示. 特别地,由一个样本点组成的单点集,称为基本事件. 在试验中,称一随机事件发生了,当且仅当它所包含的一个样本点出现了. 样本空间 Ω 是自身的子集,包含所有的样本点,在每次试验中它总是发生的,Ω 称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,$\varnothing$ 称为不可能事件.

例如:掷一颗骰子的样本空间为:$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

事件 $A=$"出现1点",它由 Ω 的单个样本点"1"组成;

事件 $B=$"出现偶数点",它由三个样本点"2,4,6"组成;

事件 $C=$"出现的点数大于6",Ω 中的任意样本点都不在 C 中,所以 C 是空集,即不可能事件 $\varnothing$.

三、事件之间的关系及其运算

事件可以用集合表示,因而事件间的关系与运算可以用集合之间的关系与集合之间的运算来处理.

下面我们讨论事件之间的关系及运算.

1. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B(或称事件 B 包含事件 A),记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

$A\subset B$ 的一个等价说法是:如果事件 B 不发生,则事件 A 必然不发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B 相等(或等价),记为 $A=B$.

为了方便起见,规定对于任一事件 A,有 $\varnothing\subset A$. 显然,对于任一事件 A,有 $A\subset\Omega$.

2. "事件 A 与 B 中至少有一个发生"的事件称为 A 与 B 的并(和),记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

由事件并的定义,可以得到:

对任一事件 A,有 $A\cup\Omega=\Omega, A\cup\varnothing=A$.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"可列无穷多个事件 A_i 中至少有一个发生"这一事件.

3. "事件 A 与 B 同时发生"的事件称为 A 与 B 的交(积),记为 $A\cap B$ 或 AB.

由事件交的定义,可以得到:

对任一事件 B,有 $B\cap\Omega=B, B\cap\varnothing=\varnothing$.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示"n 个事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 同时发生"这一事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$ 表示"可列无穷多个事件 B_i 同时发生"这一事件.

4. "事件 A 发生而 B 不发生"的事件称为 A 与 B 的差,记为 $A-B$.

由事件差的定义,可以得到:

对任一事件 A,有 $A-A=\varnothing, A-\varnothing=A, A-\Omega=\varnothing$.

5. 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生,则称事件 A 与 B 为互不相容(互斥),记为 $A\cap B=\varnothing$. 否则,称事件 A 与 B 相容.

基本事件是两两互不相容的.

6. 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互为逆事件(对立事件). A 的对立事件记为 $\bar{A}$, $\bar{A}$ 是由 Ω 中所有不属于 A 的样本点组成的事件,它表示"A 不发生"这样一个事件,显然 $\bar{A}=\Omega-A$.

在一次试验中,若 A 发生,则 $\bar{A}$ 必不发生(反之亦然),即在一次试验中, A 与 $\bar{A}$ 二者只能发生其中之一,并且也必然发生其中之一. 显然有 $\bar{\bar{A}}=A$.

对立事件必为互不相容事件. 反之,互不相容事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用维恩(J. Venn)图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,圆域 A 与圆域 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的各种关系及运算如下列各图所示(见图1-1至图1-6).

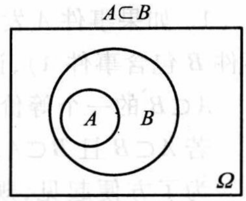

图1-1

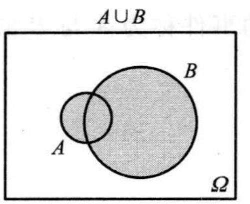

图1-2

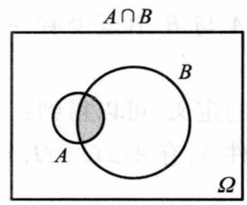

图1-3

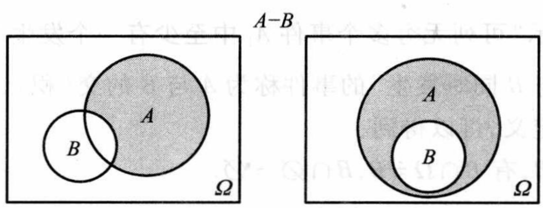

图1-4

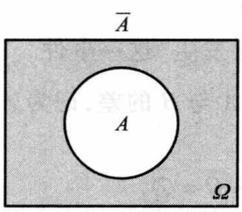

图1-5

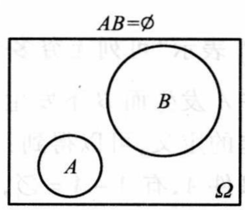

图1-6

可以验证一般事件的运算满足如下关系:

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i),$$

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i).$$

(4) 对偶律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

(5) $A-B=A\overline{B}=A-AB$.

(6) 对有穷个或可列无穷个 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i,$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

例 1.1 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算式表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

(2) A,B 都发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) A,B,C 至少有一个事件发生：$A\cup B\cup C$；

(4) A,B,C 至少有两个事件发生：$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$；

(5) A,B,C 恰好有两个事件发生：$(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$；

(6) A,B,C 恰好有一个事件发生：$(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(B\overline{A}\,\overline{C})\cup(C\overline{A}\,\overline{B})$；

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生：$(A\cup B)\overline{C}$；

(8) A,B,C 都不发生：$\overline{A\cup B\cup C}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 1.2 在某高校数学系的学生中任选一名学生，若事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立；

(3) 在什么条件下 $\overline{A}\subset B$ 成立.

解 (1) 该生是三年级男生，但不是运动员；

(2) 全系运动员都是三年级男生；

(3) 全系女生都在三年级.

例 1.3 设事件 A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，求其对立事件.

解 设 $B=$“甲种产品畅销”，$C=$“乙种产品滞销”，则 $A=BC$，故 $\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=$“甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

§1.2 事件的概率

一、事件的概率 概率的公理

除必然事件与不可能事件外,任一随机事件在一次试验中都有可能发生,也有可能不发生.人们常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小.为此,我们首先引入频率的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而我们再引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

定义1.1 考虑任意事件A,以$\nu_n=\nu_n(A)$表示A在n次重复试验中出现的频数(次数),称

$$f_n=f_n(A)=\frac{\nu_n(A)}{n} \tag{1-1}$$

为A在n次试验中出现的频率.

由定义,易见频率具有下列基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容,则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i).$$

事件A发生的频率$f_n(A)$表示A发生的频繁程度,频率大,事件A发生就频繁,在一次试验中,A发生的可能性也就大,反之亦然.因而,直观的想法是用$f_n(A)$表示A在一次试验中发生可能性的大小.但是,由于试验的随机性,即使同样是进行n次试验,$f_n(A)$的值也不一定相同.但大量试验证实,随着重复试验次数n的增加,频率$f_n(A)$会逐渐稳定于某个常数附近,我们称这个常数为频率的稳定值.这个稳定值就是我们所求的概率.概率具有一定的客观存在性(严格来说,这是一个理想的模型,因为我们在实际上并不能绝对保证在每次试验时,条件都保持完全一样,这只是一个理想的假设).

历史上有一些著名的试验,德摩根(De Morgan)、蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾进行过大量掷硬币试验,所得结果如表1-1所示.

表1-1 掷硬币试验结果

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德摩根	2 048	1 061	0.518 1

续表

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	出现正面的频率
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可见出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就反映正面出现的可能性的大小.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数，定义为事件 A 发生的概率，这就是概率的统计定义.

定义 1.2 设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k，当 n 很大时，频率 $\frac{k}{n}$ 在某一数值 p 附近摆动. 而随着试验次数 n 的增加，发生较大摆动的可能性越来越小，则称数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

值得注意的是，上述定义并没有提供确切计算概率的方法，因为我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，况且我们不知道 n 取多大才行，如果 n 取很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为，取试验次数为 $n+1$ 来计算频率，总会比取试验次数为 n 来计算频率将会更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义.

1. 概率

设 E 是随机试验，Ω 是样本空间. 对每一个事件 A，定义一个实数 $P(A)$ 与之对应，若 $P(A)$ 满足条件：

(1) 非负性　任何事件 A 的概率都是非负的，即 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性　必然事件 Ω 的概率等于 1，即 $P(\Omega)=1$；

(3) 完全可加性　对于任意可数个两两不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots (A_iA_j=\varnothing, i\neq j)$，它们之和的概率等于各事件的概率之和，即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

2. 概率的基本公式和运算法则

与事件的关系和运算相联系，概率也有类似于加、减、乘、除等运算法则——加法公式和减法公式，以及将在下一节介绍的乘法公式、全概率公式和贝叶斯公

式，都是计算概率的基本公式，读者应很好地掌握并熟练地运用.

(1)（有限）可加性　对于任意有限个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ $(A_iA_j=\varnothing,i\neq j)$，它们之和的概率等于各事件的概率之和，即：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(2) 不可能事件的概率　$P(\varnothing)=0$；

(3) 对立事件的概率　两对立事件 A 和 $\bar{A}$ 的概率有如下关系

$$P(\bar{A})=1-P(A); \tag{1-2}$$

(4) 概率的减法公式　对于任意两事件 A 和 B，有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB), \tag{1-3}$$

特别地，若 $B\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B); \tag{1-4}$$

(5) 概率的加法公式　对于任意事件 A,B,C，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB), \tag{1-5}$$

$$\begin{aligned}P(A+B+C)=&[P(A)+P(B)+P(C)]-[P(AB)+P(BC)+\\&P(AC)]+P(ABC),\end{aligned} \tag{1-6}$$

其中，(1-6)式可以推广到任意 $m(m\geqslant 3)$ 个事件（称作一般加法公式）.

(6) 概率的半可加性　设 $A_1,A_2,\cdots$ 是任意有限或可数个事件，则

$$P(A_1+A_2+\cdots)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{1-7}$$

证　(1) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_iA_j=\varnothing(i\neq j),A_k=\varnothing(k=n+1,n+2,\cdots)$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots$ 是两两互不相容的事件，满足完全可加性，因此

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_n)&=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n),\end{aligned}$$

这样，有限可加性得证.

(2) 由概率的（有限）可加性，可见

$$P(\varnothing)+P(\varnothing)=P(\varnothing),2P(\varnothing)=P(\varnothing),P(\varnothing)=0.$$

(3) 设 A 和 $\bar{A}$ 互为对立事件，由 $A\bar{A}=\varnothing,A+\bar{A}=\Omega$ 及概率的规范性和可加性，可知

$$P(A)+P(\bar{A})=P(\Omega)=1,P(\bar{A})=1-P(A).$$

(4) 由于 $A=(A-B)+AB$，而且 $(A-B)$ 和 AB 显然互不相容，故由概率的可加性，可知

$$P(A)=P(A-B)+P(AB),P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地，当 $B\subset A$ 时，由 $B=AB$，有