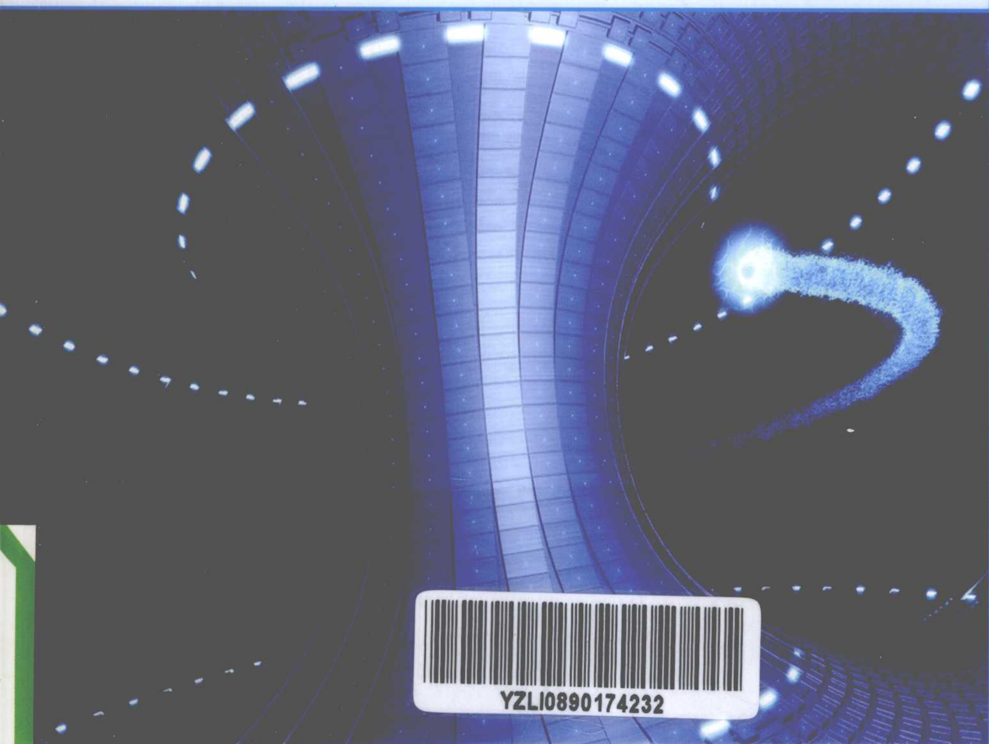
小学数学理论透视

孙国春 编著



苏州大学出版社
Soochow University Press

小学数学理论透视

孙国春　编著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学数学理论透视/孙国春编著. —苏州：苏州大学出版社，2012.12
ISBN 978-7-5672-0398-3

Ⅰ. ①小… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①小学数学课—教学研究 Ⅳ. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 313109 号

小学数学理论透视
孙国春 编著
责任编辑 肖 荣

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号 邮编：215006)
南通印刷总厂有限公司印装
(地址：南通市通州经济开发区朝霞路 180 号 邮编：226300)

开本 787 mm×960 mm 1/16 印张 16.5 字数 313 千
2012 年 12 月第 1 版 2012 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-0398-3 定价：26.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

序

学科知识是教师从事专业实践活动的基础.小学数学教师究竟应该拥有何种数学知识以及拥有多少数学知识才能胜任教学,目前尚难界定.在对小学课堂的大量现场观察中,我们发现,许多数学课堂教学存在着数学知识的纰漏或对数学知识的误读.实施新课改之后,一方面,小学数学的基本教学理念和课程教学内容发生了较大变化,增添了教师认识和解读小学数学课程内容的难度;另一方面,一些教师对新课改精神存在着偏颇的认识,将较多精力投放到"教学方式"与"学习方式"等外在形式的追求上,致使小学数学课堂在不经意间逐渐失去了应有的"数学味道".这种现象在客观上违背了基础教育课程改革的初衷,阻碍了小学生创新能力的培养.往浅里说,是由教师对教学认识的偏差以及对课改精神的误读所致;往深里想,是因教师数学素养浅薄而丧失了学科判断力.由此可见,加强教师的本体性知识已经成为深化小学数学课程改革、提升小学数学教育质量的当务之急.

面对这种形势,一些高师小学教育专业数学与科学方向恢复了20世纪中师开设的"小学数学基础理论"课程,但这种做法显然不合时宜:其一,这门课程内容过于陈旧,不能覆盖现行小学数学课程标准新增的学科知识,如概率统计、几何变换等;其二,教材的学科化表达方式明显,叙述方式呆板,难以给教师解读、加工小学教材以方法上的启迪.有人试图通过编写小学数学疑难知识解析类资料的方式来解决问题,但这种努力的效果也不明显,虽然它可以帮助教师纠正过去对数学知识的误读,但是,采用查阅工具书的方式不能从根本上提升教师的学科认知,因而无法避免教师今后对数学知识的误读.因此,为在职以及未来小学数学教师提供兼具学科素养教育与教学实践指导的专业书籍,引导他们在提高学科认知的过程中改善专业实践品质,是数学教师及其他教育工作者义不容辞的责任.

眼前我们奉献给读者的《小学数学理论透视》一书,正是为了满足在职小学数学教师以及高师小学教育专业师范生提升数学学科素养与专业实践能力的实际需要而编写的.全书以《小学教师专业标准(征求意见稿)》为指导,以《全日制九年制义务教育数学课程标准(2011版)》(书中简称《标准(2011)》)为依据,精心

选择了现行小学数学课程中学科背景深厚、思想内涵丰富、抽象程度较高的“数系发展”“整除理论”“几何度量”“坐标思想”“图形变换”“方程与函数”“统计与概率”“极限思想”“数学建模”“解决问题的策略”等十个模块作为研究专题.在撰写思路与价值定位上,本书根据数学学科的科学逻辑和数学发展的历史逻辑,重点阐述相关模块的学科背景、主干理论与本质联系,以帮助读者形成正确的数学观,领会并掌握数学的核心思想与通用方法;从学科理论的高度和知识系统的视域,深度剖析小学数学相关知识的内在结构、基本功能与关键难点,以帮助读者形成对小学数学的结构性认知与深度性理解;本着体现数学学科的科学要求和兼顾学生学力发展的原则,尝试提出小学数学相关知识的教学要点,以帮助读者科学处理小学数学教材,恰当把握小学阶段的数学教学要求.

在本书的撰写过程中,我们既尽量避免现行学科理论书籍脱离教学实践的“书院气”,又努力防止现行教学用书忽视理论品性的“工匠气”,力求在促进学科理论与教学实践的有机结合中彰显其学术特色和应用价值.为了保证本书的质量和品位,我们采取了团队协作、集体攻关的方式,由孙国春任主编,负责全书的策划、撰写与审核工作,由曹军任副主编,负责部分内容的撰写与后期的统校工作,由于国海、王兴东、沈红霞、许冬云、顾新辉、刘加珍、丁海峰、曹建全、赵彦玲、许卫兵等参与本书的撰写与素材的收集工作.全体撰写人员从立意到构思反复研讨,从选材到表达仔细推敲,力求达到本书既定的目标.尽管我们非常用心,并数易其稿,但由于学力有限,时间仓促,书中难免存在疏漏、偏误,敬请广大读者批评指正.

目 录

第 1 章 数系发展

数学研究的基本对象是数量关系与空间形式，而数系则是数量关系研究的起点，空间形式的研究也离不开数系的发展. 因此，数系是数学科学逻辑体系的基石.

关于数系，人类最早认识的是自然数，其历史几乎与人类历史一样悠久，这也是现实世界中“实实在在”存在的数. 在自然数基础上逐步扩展形成的整数、有理数、实数，乃至复数、超复数等，本质上是更高层次的数学抽象. 数系扩展有其内在的逻辑过程，从数学科学的逻辑发展来看，通常是从自然数系开始，添加负整数，形成整数集合，再扩展成有理数系，添加无理数构成实数，再通过添加虚数扩展为复数. 但从数系发展的历史来看，当人们还普遍怀疑负整数也是一种数时，就已经在研究正的有理数与无理数，甚至已经开始使用复数了. 即是说，数系扩展的历史过程与逻辑过程有所不同. 例如，根据数系发展的历史顺序，分数的认识先于负数. 一开始认识的只是正的分数，是紧接非零自然数之后产生的.

本章首先介绍数系扩展的方法与原则，然后结合小学数学课程，从自然数系出发介绍数系扩展的逻辑脉络. 这些知识的学习有利于在高观点下形成对小学数学更为透彻的理解.

第 1 节　数系扩展的方法与原则

通常把对某种运算是封闭的数集叫作数系. 像自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R** 和复数集 **C** 都是数系. 数学科学发展的基础就是数系的不断扩展. 数系扩展总是面临着某种实际需要，从数学科学本身发展的需要看，数系扩展的动力主要体现在两个方面：

(1) 某一运算的逆运算在原有数集中不能完全实施(如在自然数集中减法运算不能完全实施)；

(2) 某一方程在原有数集中无解(如 $x^2=-1$ 在 **R** 中无解).

1.1.1 数系扩展的方法与原则

数系扩展的方法一般有两种：

(1) 添加元素法.即把新元素添加到已知数系中，形成新数系.现行中小学教材通常采用这种方式.

(2) 构造集合法.即按照代数结构的观点与比较严格的公理化方法，先从理论上构造一个集合，然后指出该集合的某个真子集与已知数系同构.

数系 A 扩展后得到新数系 B，不论采用哪种扩展方法，都应遵循以下原则：

(1) A 是 B 的真子集(即 $A\subsetneqq B$)；

(2) A 的元素间所定义的一些运算与基本关系，在 B 中被重新定义，而且对于 A 的元素来说，重新定义的运算和关系与 A 中原来的意义完全一致；

(3) 在 A 中不是总能施行的某种运算，在 B 中总能施行；

(4) 在同构意义下，B 应当是 A 的满足上述三条原则的最小扩展，而且由 A 唯一确定.

在上述四条原则中，第三条是最重要的.

1.1.2 群、环、域基本知识

不同的数系往往具有不同的代数结构.常见的代数结构有半群、群、环、域.这些不同的代数结构构成了数系的重要特征.

定义 1 一个非空集合 S，若在其上有一个二元运算“$*$”，满足结合律 $(a*b)*c=a*(b*c)$，则称 S 为半群.

半群 S 中如果有元素 e，对 $\forall a\in S$，都有 $a*e=e*a=a$，则称 e 是单位元.

例如，自然数系对加法与乘法均构成半群，并有加法单位元 0(这也是把 0 作为自然数的原因之一)，乘法单位元 1.由于自然数系中的加法与乘法都是可以交换的，因此自然数系关于加法与乘法都构成交换半群.

定义 2 一个非空集合 G，若在其上有二元运算“$*$”，满足结合律，并存在单位元 e，也存在逆元素(即对任意 $a\in G$，都存在 a^{-1}，使得 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$)，则称 G 为群.

根据定义 2，自然数系关于加法不能构成群，因为关于加法没有逆元.当引进负整数后，自然数系扩展成整数系，每个整数 n 关于加法就有逆元了(即 $-n$).因此，整数系关于加法构成群，并且是交换群.但应注意，整数系关于乘法不能构成群，因为整数的逆元不是整数(±1 除外).

定义 3 设 R 是一个具有加法与乘法两种运算的代数系统，关于加法是交换

群，而且乘法对加法满足分配律，则称 R 为环.

根据定义 3，整数系构成环，由于整数乘法满足交换律，因此，整数系还是交换环.

定义 4　设 F 是一个具有加法与乘法两种运算的代数系统，如果对于加法与乘法都满足交换律与结合律，乘法对加法满足分配律；存在加法单位元(零元)，并且每个元素都有负元素；具有乘法单位元 e；最后，除了零元外，所有元素都有逆元素. 则称 F 为域.

根据定义 4，所有域必须是交换环. 如果交换环中的非零元都有逆元素，就成为域. 整数系是交换环，乘法单位元是 1，但由于整数系内关于乘法没有逆元素，因此，整数系还不是域. 添加分数后，每个非零数就都有逆元素. 因此，有理数系就是域了.

从以上论述可知，数系的逻辑扩展是基于运算的需要. 即是说，是为了使某种运算在新的数系中得以顺利施行. 例如，在自然数半群中减法不是总可以施行的，添加负整数构成整数环后，减法运算得以施行；但除法在整数环中又不是总可以施行，因此添加分数构成有理数域后，除法就通行无阻了. 到中学数学中，为了使正数总能开方而引进无理数，构成实数域；中学阶段最后的扩展是为了使负数也能开方，即把实数域扩展为复数域.

第 2 节　自然数系

自然数是数系扩展的基础，也是学习者积累数学知识的开端. 就小学数学来说，自然数及其四则运算是小学生数学学习的最基本内容之一，主要安排在第一学段，包括数的认识、数的表示、数的大小、数的运算、数量的估计等. 根据《标准(2011)》，这部分内容的教学应使学生“在运用数及适当的度量单位描述现实生活中的简单现象，以及对运算结果进行估计的过程中，发展数感”. 课程标准把“数感”列为十个关键词中首要的也是核心的关键词，并对“数感”的内涵进行了界定，指出“数感是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟”.

由此可见，课程标准突出了“数感”这一培养目标. 现行教材根据课程标准的这一理念，采用了多样化的处理方法. 如关于数概念的教学，注意“从日常生活中抽象出数”，力求使学生对现实生活中数的意义获得真实的理解. 关于四则运算，在使学生了解四则运算意义的同时掌握必要的运算技能，并且注重把计算问题置于现实生活或者具体情境中，以使学生对数的运用获得真切的感受.

虽然新课程关于自然数系的学习内容脉络分明、目标清晰，但教师在教学中

依然存在一些难以把握的问题.如“0 为什么是自然数?”“除法运算中为什么除数不能为 0?”“加减法是否互为逆运算?”等等.教学中许多看似简单的内容,教师不仔细推敲往往也会出现一些问题.

案例 “5－2＝3”的教学.(苏教版小学数学教科书一年级上册)

教学“5－2＝3”的关键是对主题图中两幅连续图画的理解,明确原来有 5 个小朋友在给花浇水,后来走了 2 个小朋友,要我们计算还有几个小朋友在浇水.有位教师是这样教的:

师:原来有几个小朋友在给花浇水?

生:5 个.(师板书 5)

师:现在走了几个小朋友?

生:2 个.(师板书 2)

师:走了 2 个小朋友,就用减法算.(板书 5－2)

然后交代减号名称,让学生认识减号.

师:还剩下几个小朋友在给花浇水?

生:3 个.(师板书 5－2＝3)

最后教学读法.

上述思路看似清晰,仔细推敲存在如下问题:

(1) 主题图给学生创设了一个现实情境,引导学生在具体情境中解决问题,从而体会减法的含义.作为实际问题(过去教材称为“图画应用题”),解决之前必须先提出问题,上述教法中问题没有出现而算式却已确定,显然不科学.

(2) 决定该问题用减法的究竟是“走了”还是“去掉”或“求剩余”? 求剩余用减法才是这一问题数量关系本质之所在.至于“走了 2 个小朋友”,仅仅是一个现象,现象是不能代替本质的.

(3) 减法算式应该是主题图的抽象,上述教法实际是对图意的解释,学生认识“5－2”的结果很大程度上不是通过思考得到的,而是从图中数出来的.即是说,学生的认识仍然停留在原有水平上,不能切实感受减法的实质是“从一个数里去掉一部分,求另一部分”.

从上述案例可以看出,为了避免自然数与四则运算教学中出现不科学的做法,需要在高观点指导下推敲小学数学教材与教学.

1.2.1 自然数的基数与序数理论

自然数虽然“自然”地存在于现实世界中,某种程度上可以说看得见摸得着,甚至小学生也可以通过自身的生活经验建立起朴素的自然数知识.但是自然数

的数学意义却经历了漫长的认识过程. 在古代先人的生活实践中，由于记事和分配生活用品等方面的需要，才逐渐产生了数的概念. 比如，捕获了一头野兽，就用 1 块石子代表；捕获了 3 头，就放 3 块石子. 在我国，古有"结绳计数"与"刻画计数"(见《周易・系辞传下》)；西方荷马史诗中也有"石子计数羊群"的故事；传说古代波斯王打仗时也常用绳子打结来计算天数.

系统的自然数系理论的构建，直到 19 世纪末、20 世纪初才形成严格的基础. 这就是康托的基数理论与皮亚诺的序数理论. 现代数学通常使用集合语言来阐述自然数的基数与序数属性，并从集合论角度构建自然数的运算系统. 这一思想在小学数学教材中也得以通俗地呈现. 应用集合论基本原理构建自然数的基数理论，符合人们的认识规律，也有利于学习者获得更为清晰的理解. 关于集合论知识，如：属于、包含、子集、交集、并集、差集等概念，这里不再赘述.

我们知道，集合有有限与无限之分，而无限集又包括可数集与不可数集. 自然数可视为一切等价的有限集合的标记. 这里所说的等价集合即是彼此能够一一对应的两个集合，这里的标记就称为基数. 例如，三个人的集合、三只羊的集合、三棵树的集合，它们彼此都能一一对应，就用"3"表示. 即是说，基数就表示集合中元素的个数. 或者说，有限集合的基数(又称"势") 就是自然数. 如$\{a\}$的基数就是 1，$\{a,b\}$的基数就是 2，等等. 集合 A 的基数通常用符号 card(A)表示. 但是，对于无限集合来说，基数或者说"元素的个数"不是一个确定的自然数，那是什么呢？

我们把全体自然数组成一个集合 **N**，**N** 是无限集，称其为可数集，并且把与 **N** 等价的所有集合都称为可数集. 在离散数学中，可数集的基数用$\aleph_0$表示(读作"阿列夫零")，因此一个集合只要与自然数集等价，就是可数集，它们的基数就是一样的. 例如，偶数集$\{0,2,4,6,8,\cdots\}$可以与自然数集建立一一映射，即两个集合等价，因此，虽然偶数集是自然数集的子集，但偶数集与自然数集的基数是一样的，这与我们常识中的"整体大于部分"的认识不同. 再如，有理数集虽然包含整数集，在感觉上似乎"元素的个数"要比整数集大得多，但实际上，我们可以把有理数集的元素一个一个排列起来与自然数集建立一一映射，因此，有理数集与自然数集也是等价的，它们的基数都是$\aleph_0$. 但无限集合中也有与自然数集合不等势的集合，如实数集，因为实数集不是可数集.

如上所述，自然数的基数理论依赖于集合论原理，意大利数学家皮亚诺在 1889 年运用公理化方法建立了自然数的序数理论，克服了这些缺陷. 该理论采用公理化方法，把自然数的一些最基本性质作为不加定义的公理，把"后继"作为不定义的关系.

定义 1 如果集合 N 的某些元素之间有一个基本关系“后继”(用符号“$'$”表示),并且满足以下四条公理:

(1) 存在一个元素(记作“0”),它不后继于任何元素;

(2) 对于任何元素“a”,有且仅有一个元素后继于它;

(3) 除“0”以外,任何元素后继于且仅后继于某一元素;

(4) (归纳公理)若 M 是 N 的子集,满足(i) $0\in M$,(ii) 当 $a\in M$ 时,就有 $a'\in M$,则 $M=N$.

那么,集合 N 就叫作自然数集,其中的元素叫作自然数.

上述定义中的这组公理称为皮亚诺公理.其中,(1)说明了自然数的有始性.(2)与(3)表明了自然数的无尾性与不重复性.即是说,自然数是无限多的,每个自然数都有唯一的后继数,不同自然数的后继数也不同.(4)则是第一数学归纳法的理论依据.有了这组公理,就能把自然数集合中的元素完全确定下来.例如,从 0 出发,$0'=1$,$1'=2$,…,继续下去,就得到自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.

因此,自然数就具有了两重意义:当自然数用来表示集合中元素的个数时,用的是基数意义;当自然数用来表示有序集合中元素所在的位置时,用的是序数意义.例如,让一队学生从排头开始报数,排尾学生报数“20”,这里“20”既可表示这队学生有 20 人,也可表示该生处于第 20 个位置.

1.2.2 数制与十进制计数法

自然数有无限多个,如果每个自然数都用一个独立的名称来命名,用独立的符号来表示,显然不方便也不可能.因此,历史上各民族在文化发展的初期,都创造了分组计数的方法用来计数.

一、数制

数制也称计数制,是指用一组固定的符号与统一的规则来表示数值的科学方法.在人类文化发展的过程中,各个民族都形成了独特的计数制度,如:“满十进一”的十进制,“满五进一”的五进制,满“十二进一”的十二进制,满“六十进一”的六十进制等,现在某些方面还保留着十二进制与六十进制的痕迹.

在一种进位制中,某一单位满一定个数就组成一个相邻的较高的单位,这里的一定个数就是这种进位制的底数.例如,十进制的底数是 10,二进制的底数是 2,等等.每一种进位制都可以按照位值原则来计数(所谓位值原则就是计数时,每个数字除了本身所表示的数值以外,还有位置值).由于每种进位制的底数不同,所用数字个数也不同.例如,十进制需要十个数字($0,1,2,\cdots,9$),十六进制则需要十六个数字($0,1,2,\cdots,9,A,B,C,D,E,F$),二进制只需要两个数字 0 与 1.

二进制是人类思想的产物，通常认为是由莱布尼兹发明的. 莱布尼兹在1679年写了《二进算术》论文，系统阐述了二进制. 他想象“1”代表上帝，“0”代表混沌. 上帝由混沌中创造世界万物，正如在他的计数法中用“1”与“0”表示一切数那样. 当然，也有学者认为二进制起源于中国《周易》中的伏羲六十四卦图. 由于二进制的特点是“满二进一”，写二进制数只需1与0两个数字，所以可用通电与断电两种状态表示，这样，用几组电路的通断就可表示任意二进制数，并且能进行四则运算. 因此，电子计算机中广泛采用二进制. 也正是由于二进制数的发明，电子计算机科学才得以迅猛发展.

一般地，$k(k>1)$进制的计数单位是$k^0, k^1, k^2, \cdots$，这样，k进制数就可以写成不同的计数单位上的数之和（即k的幂的和）的形式：

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_{1(k)}} = a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \cdots + a_2 k^1 + a_1 (a_n \neq 0).$$

根据上述公式，可以实现各种不同进位制之间数的换算，如把十进制数49改写成二进制数是$110\,001_2$，把二进制数$110\,111_2$改写成十进制数是55.

二、十进制计数法

计数法包括命数与计数两个方面. 在历史上各民族所创造的计数法中，最先进、最科学的应推古代中国的十进制计数法. 十进制计数法对世界数学和文化的发展具有不可估量的作用. 马克思称其为“最美妙的发明之一”，李约瑟则认为，“如果没有十进位制，就不可能出现我们现在这个统一化的世界了”.

按照十进制计数法，我国给自然数命名的方法是：自然数列前十个数，给以单独的名称，即零、一、二、三、四、五、六、七、八、九；按照“满十进一”规定计数单位，并且按照“四位一级”计数，十个一叫“十”，十个十叫“百”，十个百叫“千”，称为个级；十个千叫“万”，万以上单位不给以新的名称，而依次为十万、百万、千万，称为万级；亿级单位依次为亿、十亿、百亿、千亿，等等. 同样是十进制，西方许多国家不是四位一级，而是三位一级，三位一级的计数制度在我国的科学文献、金融统计方面经常出现.

按照十进制计数法计数，只需要十个符号就可以了. 这些符号就叫作数字（或数码）. 现在国际上通用的数字是阿拉伯数字，最早起源于印度. 用阿拉伯数字表示十进制数，采用位值原则计数，如123这个数，“2”不仅具有本身的数值，还有位置值，表示20.

关于计数法，除了上述阿拉伯数字计数外，历史上许多民族都有自身的计数方法. 如古巴比伦计数符号只有两个楔形符号，“↓”表示1，“←”表示10，计数采用六十进制，根据单位累加与位值原则相结合的方法计数，如1 853写作“←←←←←←←←↓↓↓”. 古埃及计数法采用象形符号，根据单位累加原则计数，基本

象形符号有七个，如用一朵花表示1千，一只鸟表示十万，等等. 玛雅人计数方法比较独特，采用20进制，只用三个符号，“●”表示1，用“—”表示5，用“⊙”表示0，计数根据单位累加与位值原则. 古罗马计数法在今天一些场合依然使用，基本符号共有七个：I(代表1)、V(代表5)、X(代表10)、L(代表50)、C(代表100)、D(代表500)、M(代表1,000). 这7个符号不论位置上怎样变化，它所代表的数字都是不变的. 计数时采用加减法原则，把几个罗马数字写成一列，从左到右，先写较大数字，再写较小数字，把这些数字所表示的数加在一起，就是所要表示的数，如215写成CCXV. 当一个数根据加法原则书写，需要连续写四个相同数字时，改用减法原则，先写较小数字，再写较大数字，表示相减. 这种数只有六个：IV表示4，IX表示9，XL表示40，XC表示90，CD表示400，CM表示900. 如1489写成MCDLXXXIX，49写成XLIX.

我国古代也很重视计数符号，最古老的甲骨文和钟鼎中都有计数的符号，不过难写难认，后人没有沿用. 到春秋战国时期，生产迅速发展，为适应这一需要，我们祖先创造了一种独特的计算方法——筹算. 筹算用的算筹是竹制或骨制的小棍，按规定的横竖长短顺序摆好，就可用来计数和进行运算. 随着筹算的普及，算筹的摆法也就成了计数符号. 算筹摆法有纵横两式，都能表示同样的数字. 筹算计数采用位值原则，并且严格遵循十位进制，但筹算数码中开始没有“零”，遇到“零”就空位. 数字中没有“零”，是很容易发生错误的. 所以后来有人把铜钱摆在空位上，以免弄错，这或许与“零”的出现有关. 不过多数人认为，“0”这一数学符号的发明应归功于公元6世纪的印度人. 他们最早用黑点(.)表示零，后来逐渐变成了“0”.

1.2.3 自然数的四则运算

在自然数的基数理论与序数理论的基础上，可以定义自然数的加法、减法、乘法与除法.

一、基数理论下自然数加法、减法、乘法与除法的定义

首先指出，所谓自然数 a,b 相等就是指它们所代表的有限集合元素能够一一对应，即具有相同的基数；所谓 $a<b$，是指它们代表的两个集合 A,B，满足 $A\subseteq B$，但 $A\neq B$.

1. 加法定义

设 A,B 是两个不相交的有限集合，它们的基数分别是 a,b，如果集合 A 与 B 的并集是 C，C 的基数是 c，那么 c 叫作 a 与 b 的和. 简单地说，求两个不相交的有限集合并集的基数的运算叫作加法.

由于集合的“并”运算满足交换律与结合律，所以自然数的加法运算也满足交换律与结合律.

2. 减法定义

减法通常定义为加法的逆运算. 即“已知两个数 a,b，求一个数 c，使得 c 与 b 的和等于 a，这种运算就叫减法”. 也可用集合观点直接解释减法运算：设 A 是有限集合（基数是 a），B 是 A 的一个子集（基数是 b），由所有属于 A 但不属于 B 的一切元素组成的集合 C（基数是 c），叫作 A 与 B 的差集，即 $C=A\backslash B$. 因此，求自然数 a 与 b 的差 c 的运算就是求集合 A 与 $B(B\subseteq A)$ 的差集的基数.

3. 乘法定义

乘法定义有多种方法，大部分是建立在加法定义的基础上，即定义为一种特殊的加法运算，也可以运用笛卡尔乘积直接定义.

定义 2　求 b（b 是大于 1 的整数）个相同加数 a 的和 c 的运算叫作乘法.

这一定义与当前小学教材中的定义基本一致，也容易理解. 但严格的定义还需要对 b 等于 1 或 0 时的运算做补充规定.

乘法的一种直接定义需要先定义集合的直积（笛卡尔乘积）. 所谓集合 A 与 B 的笛卡尔乘积 $A\times B$，是以 A 的一个元素为第一坐标，B 的一个元素为第二坐标的所有有序数对组成的集合，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

例如，如果 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_q\}$，则 $A\times B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),\cdots,(a_1,b_q),(a_2,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_2,b_q),\cdots,(a_p,b_1),(a_p,b_2),\cdots,(a_p,b_q)\}$. 显然，$\mathrm{card}(A\times B)=p\times q$.

定义 3　假设有限集合 A 与 B 的基数分别是 p,q，则集合 A 与 B 的笛卡尔乘积的基数就叫作 p 与 q 的积.

4. 除法定义

除法与减法类似，通常也定义为乘法的逆运算. 即“已知两个数 a,b，求一个整数 q，使得 q 与 b 的积等于 a，这种运算就叫除法”. 在集合背景下，可给予除法下述解释：自然数的除法是指一个有限集合 A（基数为 a），能够恰好分解成 q 个具有相同基数 b 的子集 B，那么 $a\div b=q$.

从自然数加、减、乘、除法的定义可以看出，减法通常定义为加法的逆运算，除法通常定义为乘法的逆运算，乘法可以视为连加运算，因此除法与减法也就存在必然的联系. 事实上，除法也可以用同数连减来说明. 具体地说，就是把被除数 a 作为被减数，除数 b 作为相同的减数，连减的最多次数 q 就是 a 除以 b 所得的商，最后的差 r 如果不是零，就属于有余数的除法运算.