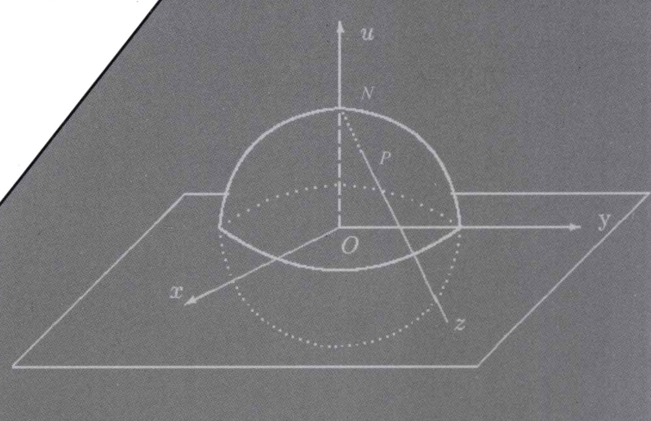
新世纪高等学校教材

数学与应用数学系列教材

FUBIAN HANSHU

复变函数论

北京师范大学数学科学学院 主 编
邓冠铁 编 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

数学与应用数学系列教材

复变函数论

FUBIAN HANSHULUN

北京师范大学数学科学学院　主　编
邓冠铁　编　著

安徽大学图书馆
藏　书
www.lib.ahu.edu.cn

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论／邓冠铁编著.—北京：北京师范大学出版社，2013.3
(新世纪高等学校教材．数学与应用数学系列教材)
ISBN 978-7-303-15899-7

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①邓…　Ⅲ.①复变函数－高等学校－教材
Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第016795号

营销中心电话　010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：11.5
字　　数：205千字
版　　次：2013年3月第1版
印　　次：2013年3月第1次印刷
定　　价：23.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　程丽娟
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：孙文凯

版权所有　侵权必究

反盗版、侵权举报电话：010-58800697
北京读者服务部电话：010-58808104
外埠邮购电话：010-58808083
本书如有印装质量问题，请与印制管理部联系调换。
印制管理部电话：010-58800825

前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部, 1922 年成立数学系, 2004 年成立北京师范大学数学科学学院. 经过近百年的风风雨雨, 数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年, 北京师范大学出版社成立, 给教材的出版提供了一个很好的契机. 北京师范大学数学科学学院教师编著的多数教材已先后在这里出版. 除《北京师范大学现代数学丛书》外, 就大学教材而言, 共有 5 种版本. 第 1 种是列出编委会的《高等学校教学用书》, 这是在 1985 年, 由我校出版社编写出版了 1 套 (17 部) 数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下, 这一计划完全实现, 满足了当时教学的需要. 第 2 种是标注"高等学校教学用书", 但未列编委会的教材. 第 3 种是《面向 21 世纪课程教材》. 第 4 种是《北京师范大学现代数学课程教材》. 第 5 种是未标注"高等学校教学用书", 但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中, 除再次印刷外, 已经有多部教材进行了修订或出版了第 2 版.

2005 年 5 月, 李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作, 由李仲来教授与北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商, 由北京师范大学数学科学学院主编 (李仲来教授负责), 准备对学院教师目前使用的, 或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版, 另有一些教材需要重新编写. 计划用几年时间, 出版数学与应用数学系列教材、数学教育主干课程系列教材、大学公共课数学系列教材、数学学科硕士研究生系列教材, 共 4 个系列的主要课程教材.

由学院组织和动员全院在职和退休教师之力量, 主编出版数学一级学科 4 个系列的 60 余部主要课程教材. 教材编写涉及面如此之广和数量之大, 持续时间之长, 这在一所高校数学院系内是为数不多的, 其数量在中国数学界列全国第一. 经过 8 年的编写, 至今已经出版了 50 余部教材, 原计划的大多数教材已经出版, 对于学院来讲, 这是一件值得庆贺的大事. 现在可以说, 数学科学学院和北京师范大学出版社基本上是干成了一件大事. 这是很难圆满办成的一件大事. 剩下的一些教材在两三年内多数可以出版. 若留下缺憾, 则需要后人去补充.

从数量上看, 按教材系列, 出版数学与应用数学系列教材 28 部、数学教育主干课程系列教材 9 部、大学公共课数学系列教材 7 部、数学学科硕士研究生系列教材 10 部. 按出版教材版次, 第 1 版 21 部、第 2 版 21 部、第 3 版 12 部. 还出版了 3 部教辅教材.

从质量上看, 6 部教材被评为普通高等教育"十一五"国家级规划教材; 7 部

教材被评为普通高等教育本科“十二五”国家级规划教材; 7 部教材被评为北京市高等教育精品教材.《师范院校数学学科 4 个系列教材建设》项目获 2012 年北京师范大学教育教学成果一等奖.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授 (数学专业) 和在职中学教师等使用和参考. 希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者, 提出宝贵的修改意见, 使其不断改进和完善. (李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院
2013-01-01

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

编著者的话

复变函数是高等学校理、工科普遍开设的一门数学基础课. 由于这门课在我校一般被安排在大学二年级第二学期开设, 所以只假定读者具备数学分析与高等代数等预备知识.

全书共分六章. 第一章通过引入复数的两种方法, 介绍了复数列、级数和辐角. 用级数定义了指数函数等初等函数, 证明了 Euler 公式, 并利用它把复数的三角表示转化成书写简单的指数形式. 把平面中的一些定义、定理和函数等变成复平面的术语. 本章的大部分定理只需了解, 其证明不要求. 第二章中把数学分析中的微分和积分直接引入到复变函数中来, 建立复变函数的微积分基本理论. 多值函数的解析分支的学习是初学者遇到的一个难点, 特别是初等多值函数的解析分支. 为了解决这一难题, 本章把多值函数看成是一些函数的集合, 组成集合的这些函数看成分支. 本章第四节对解析分支的存在性给出了严格的证明, 并用具体例子说明如何使用这些定理, 使初学者在做一些初等多值函数解析分支的习题时, 有例子可以仿照, 推理时心中有据可依. 第三章把数学分析中的级数理论引入到复变函数中来, 解析函数的零点和孤立奇点的性质是解析函数特有的性质. 第四章介绍了孤立奇点的留数理论和应用留数理论计算各种定积分, 给出了某些亚纯函数的部分分式展式的实例. 第五章介绍了保形映射的几何理论, 对分式线性映射的性质作了详细论述, 给出了若干保形映射的实例, 介绍了单连通区域的 Riemann 映射定理, 包括 Schwarz 引理等解析函数的性质, 第五章最后一节用来证明 Riemann 映射定理. 第六章介绍了解析延拓和解析函数的无穷乘积的展式, 介绍了 Γ- 函数, Beta 函数和 Riemann zeta 函数, 以及它们的无穷乘积的表示.

本书中 * 表示本节或定理的证明超出大学本科大纲要求. “□”表示“证毕”. 作者非常感谢北京师范大学数学科学学院的师生在本课程讲授和本书编写过程中所给予的支持和提出的非常有价值的意见. 此外, 作者也十分感谢国家自然科学基金和教育部博士点基金的支持, 感谢北京师范大学出版社为本书的编辑出版所做的大量工作. 限于本人学识水平, 本书中还难免存在错误和不妥之处, 恳请专家和读者不吝赐教指正.

编著者　邓冠铁 (denggt@bnu.edu.cn)

2012-12-01

符 号 表

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$	复平面
i	虚数单位
$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$	非负整数集
$\mathbb{N}^+=\{1,2,\cdots\}$	正整数集
$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathrm{Re}\ z$	复数 z 的实部
$\mathrm{Im}\ z$	复数 z 的虚部
$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$	复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数
$\mathbf{Arg}\ z$	复数 z 的辐角全体组成的集
$\mathbf{Ln}\ z$	复数 z 的对数全体组成的集
$D(a,r)$	以 a 为圆心, r 为半径的开圆盘
$\partial D(a,r)$	以 a 为圆心, r 为半径的圆周
∂E	集合 E 的边界
$\triangle_C \arg\ f(z)$	函数 $f(z)$ 沿分段光滑曲线 C的辐角增量
$\mathrm{Res}(f(z),a)$	函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 的留数
$\mathbb{C}_\infty$	扩充复平面 (或扩充复数集)

目　录

第一章　复变函数

本章通过引入复数的两种方法, 介绍了复数列、级数和辐角. 用级数定义了指数函数等初等函数, 证明了 Euler 公式, 利用它把复数的三角表示转化成书写简单的指数形式. 把平面的中一些定义、定理和函数等拓扑术语变成复平面的术语, 介绍了曲线和连通性, 对 Jordan 定理的特殊情况给出了证明. 本章的大部分定理的证明与数学分析课程中的证明类似.

§1.1　复数、复数列和级数

从一维欧氏空间 $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ 扩充到一个复数域通常有两个方法. 第一个方法是代数扩张方法, 由于二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解, 引入一个新元 i, 称为虚数单位, 它不在 $\mathbb{R}$ 中, 规定 $\mathrm{i}^2=-1$. 把形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的元称为复数, $x,y\in\mathbb{R}$, 分别称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部和虚部. 记作 $x=\operatorname{Re}z,\quad y=\operatorname{Im}z$. 当 $\operatorname{Im}z=0$ 时, $z=\operatorname{Re}z+\mathrm{i}0=x$ 是实数; 当 $\operatorname{Re}z=\operatorname{Im}z=0$ 时, $z=0+\mathrm{i}0=0$, 称复数 z 等于零; 当 $\operatorname{Re}z=0$, 且 $\operatorname{Im}z\neq 0$ 时, $z=\mathrm{i}\operatorname{Im}z$ 称为纯虚数. 复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等, 是指它们的实部与实部相等, 虚部与虚部相等. 即 $x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$ 当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$. 复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数, 用 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭, $\sqrt{x^2+y^2}$ 称为 z 的模或长度, 记为 $|z|$. 当 $a\in\mathbb{R}$ 时, $\overline{a}=a$.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法、减法分别定义为

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2);$$

乘法定义为

$$z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.1.1}$$

从而复数 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 和它的共轭复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 的乘积 $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$. 于是当 $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ 时, 记 $z^{-1}=\frac{x}{|z|^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{|z|^2}$, 有

$$z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2},\quad 和\quad zz^{-1}=z^{-1}z=1.$$

记 $z^1=z$, 当 $n\geqslant 2$, 归纳定义 $z^n=zz^{n-1}$, 当 $z\neq 0$ 时, 定义 $z^0=1$, 当 $n\geqslant 2$, 归纳定义 $z^{-n}=z^{-1}z^{-(n-1)}$. 两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0$ 的除法定义为

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}=\frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\imath(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.1.2}$$

$\frac{z_1}{z_2}$ 也可记作 $z_1\cdot z_2^{-1}$

复数的运算满足下列运算律:

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$; (交换律)

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$; $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$; (结合律)

(3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$. (分配律)

在全体复数集上引进了上述一个代数结构后, 称为复数域, 记作 $\mathbb{C}$, 它是由实数域 $\mathbb{R}$ 通过添加一个虚数单位 $\imath$ 扩张而得到的.

扩充到一个复数域的第二个方法是从一维欧氏空间扩充到二维欧氏平面, 在二维欧氏平面 $\mathbb{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ 中类似于 (1.1.1) 引入乘法运算

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1),$$

引进上述运算后, 平面 $\mathbb{R}^2$ 成为复数域 $\mathbb{C}$. 记 $\widetilde{\mathbb{R}}=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$, 则 $\widetilde{\mathbb{R}}$ 是域 $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ 的一个子域. 映射 $\widetilde{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$: $(x,0)\to x$ 是一个一一映射, 所以, 实数域 $\mathbb{R}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 把 $(x,0)$ 简写为 x. $\mathbb{C}$ 中元素 $(0,1)$ 满足

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

令 $\mathrm{i}=(0,1)$, 于是有 $\mathrm{i}^2=-1$, $(0,y)=(0,1)(y,0)=\mathrm{i}y$. 复数 (x,y) 可表示成 $(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+\imath y$, 这样复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 是由它的实部 x 和虚部 y 构成的一对实数 (x,y) 唯一确定. 作映射 $\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2:z=x+\mathrm{i}y\to(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 于是就建立了 $\mathbb{R}^2$ 平面上全体点与 $\mathbb{C}$ 上全体复数间的一一映射, 把点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 看作复数 $x+\mathrm{i}y$, 也把复数 $x+\mathrm{i}y$ 看作点. 所以复数域是平面中引入一个乘法后得到的. 以后我们对复数和平面上的点不加区别. 这样表示复数 $x+\mathrm{i}y$ 的平面称为复平面 (或 z–平面), 仍用 $\mathbb{C}$ 表示. 我们于是把平面的术语直接来描述复平面. 例如我们把复数和平面中的向量用作同义语. 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 除了用复平面 $\mathbb{C}$ 上的点来表示外, 还可以用 $\mathbb{C}$ 上的自由向量 (向量的起点可以是平面上的任意一点) 来表示. 这个自由向量在实轴和虚轴上的投影分别为 x 和 y. 如果起点是原点, 那么向量的终点的坐标与这个向量的坐标就一致. 由于一向量经过平

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

移所得到的向量表示的是同一个复数, 那么 $|z_1-z_2|$ 在几何上表示点 z_1 与点 z_2 之间的距离. 实轴的正向与非零向量 $z=x+\mathrm{i}y$ 之间的夹角称为复数 z 的辐角 (Argument), $z\neq 0$ 的辐角全体记作 $\mathbf{Arg}\,z$. 对于任一给定复数 $z\neq 0$ 的模 $|z|$ 与辐角 θ, 其实部和虚部可表示为 $\mathrm{Re}\,z=|z|\cos\theta$, $\mathrm{Im}\,z=|z|\sin\theta$, 于是如图 1,

$$z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.1.3}$$

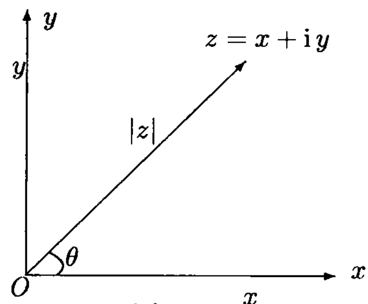


图 1

(1.1.3) 称为复数 z 的三角表示式. 对于任一给定复数 $z\neq 0$, 它的模 $|z|$ 是唯一的, 其辐角有无穷多个, 其中任意两个相差 2π 的整数倍, 在这个集合中满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的有且仅有一个, 记作 $\arg z$, 称之为 $\mathbf{Arg}\,z$ 的主值, 或称之为 z 的主辐角. 所以复数 z 的辐角全体又可表示为

$$\mathbf{Arg}\,z=\{\arg z+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}. \tag{1.1.4}$$

它是一个集合. $\mathbf{Arg}\,z$ 的主值 $\arg z$ 是由 z 唯一确定的. 例如在正、负实轴上复数辐角的主值分别为 $0, \pi$; 在上、下半虚轴上复数辐角的主值分别是 $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$; 一般主值 $\arg z$ 可按如下公式确定

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0, y\in\mathbb{R},\\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0, y\geqslant 0,\\ -\pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0, y<0,\\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0\end{cases} \tag{1.1.5}$$

当 $z=0$ 时, $\mathbf{Arg}\,z$ 无意义.

设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为两个复数集, 则定义它们的和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 为集合 $\{a+b : a\in\mathbf{A}, b\in\mathbf{B}\}$; 相减 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 为集合 $\{a-b : a\in\mathbf{A}, b\in\mathbf{B}\}$. 不难验证如下事实: 设

$z_1=|z_1|(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\neq 0$, $z_2=|z_2|(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\neq 0$, 则

$$z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

于是

$$\begin{cases}|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\\ \mathbf{Arg}\,(z_1z_2)=\mathbf{Arg}\,z_1+\mathbf{Arg}\,z_2\end{cases}$$

即两复数乘积是这样一个复数: 模是这两个复数模的乘积, 辐角是这两个复数辐角的和加上 2π 的整数倍. 从几何上看, z_1z_2 所表示的向量是把 z_2 所表示的向量沿逆时针方向旋转角度为 $\arg z_1$, 向量 z_2 的模伸长 $|z_1|$ 倍所得到的向量. 如 $\mathrm{i}z$ 就是把 z 按逆时针方向旋转角度为 $\frac{\pi}{2}$ 所得的向量 同理由

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)),$$

推知

$$\begin{cases}\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\\ \mathbf{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}=\mathbf{Arg}\,z_1-\mathbf{Arg}\,z_2,\end{cases}$$

即两复数的商是这样一个复数: 模是这两个复数模的商, 辐角是这两个复数辐角的差. 说明 z_1 所表示的向量与 z_2 所表示的向量之间的夹角全体可用 $\mathbf{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}$ 来表示.

复数 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 的模有如下几个重要不等式:

(1) $|x|=|\mathrm{Re}\ z|\leqslant|z|$,

(2) $|y|=|\mathrm{Im}\ z|\leqslant|z|$,

(3) $|z|\leqslant|\mathrm{Re}\ z|+|\mathrm{Im}\ z|$,

(4) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$(三角形两边之和大于第三边),

推广. $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$,

(5) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$ (三角形两边之差小于第三边).

例 1.1.1 求 $\mathbf{Arg}\,(-1+\mathrm{i})$ 与 $\mathbf{Arg}\,(-7-11\mathrm{i})$.

解 由 (1.1.4) 式和 (1.1.5) 式, $\arg(-1+\mathrm{i})=\pi-\frac{\pi}{4}$, $\arg(-7-11\mathrm{i})=-\pi+\arctan\frac{7}{11}$, 所以

$$\mathbf{Arg}\,(-1+\mathrm{i})=\{-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi:k\in\mathbb{Z}\};$$

$$\mathbf{Arg}\,(-7-11\mathrm{i})=\{\arctan\frac{7}{11}+(2k-1)\pi:k\in\mathbb{Z}\}.$$

例 1.1.2 设 z_1, z_2 是两个复数, 求证

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2).$$

证明

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2).\qquad\square\end{aligned}$$

同理, 可得到如下平行四边形法则:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

即平行四边形的两对角线长度的平方和等于其四边长度平方和.

例 1.1.3 设 $a_k, b_k\neq 0\,(k=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个复数, 求证

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right).\tag{1.1 6}$$

证明 对任意的 $t\in\mathbb{C}$, 有

$$|a_k-t\overline{b_k}|^2=(a_k-t\overline{b_k})\overline{(a_k-t\overline{b_k})}=(a_k-t\overline{b_k})(\overline{a_k}-\bar{t}b_k)=|a_k|^2-2\mathrm{Re}(\bar{t}a_kb_k)+|t|^2|b_k|^2.$$

对 k 求和得

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2-2\mathrm{Re}\left(\bar{t}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)+|t|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2.\tag{1.1.7}$$

当 $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2=0$ 时, 有 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$, 此时 (1.1.6) 式成立; 当 $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2\neq 0$ 时, 令 $t=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\setminus\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2$ 代入 (1.1.7) 式, 得

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2-\frac{2\mathrm{Re}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2}+\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2},$$

整理得 (1.1.6) 式. $\square$

定义 1.1.4 设 $z_n \in \mathbb{C}(n \in \mathbb{N}), \alpha \in \mathbb{C}$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|z_n - \alpha| < \varepsilon, \tag{1.1.8}$$

则称复数序列 $\{z_n\}$ 收敛于点 α. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$

定理 1.1.5 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, \alpha = a + \mathrm{i}b$, 其中 a, b 和 $x_n, y_n\,(n \in \mathbb{N})$ 为实数. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

定义 1.1.6 复数序列 $\{z_n\}$ 称为Cauchy(柯西) 序列. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n, m > N$ 时, 有 $|z_n - z_m| < \varepsilon$

定理 1.1.7 设$z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n$, 则复数序列 $\{z_n\}$ 是 Cauchy序列的充分必要条件是 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都是实Cauchy序列.

定理 1.1.8 若复数序列 $\{z_n\}$ 是Cauchy序列, 则 $\{z_n\}$ 收敛.

证明 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n \quad (n \in \mathbb{N})$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当$n, m > N$时, 有$|z_n - z_m| < \varepsilon$, 从而有 $|x_n - x_m| \leqslant |z_n - z_m| < \varepsilon$ 与 $|y_n - y_m| \leqslant |z_n - z_m| < \varepsilon$. 即 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都是实 Cauchy 序列. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, \alpha = a + \mathrm{i}b$, 由定理 1.1.5, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$. □

定义 1.1.9 对于复数项的无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots, \tag{1.1.9}$$

令 $s_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$(部分和). 若复数列 $s_n(n \in \mathbb{N})$ 以有限复数 s 为极限, 即若

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{1.1.10}$$

则称复数项无穷级数(1.1.9)收敛于 s, 且称 s 为级数(1.1.9)的和, 写成

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots;$$

若复数列 $s_n(n \in \mathbb{N})$ 无有限极限, 则称级数(1.1.9)为发散.

定理 1.1.10 设$\alpha_n = a_n + \mathrm{i}\,b_n \ (n \in \mathbb{N}), a_n$ 及 b_n 为实数, 则复级数(1.1.9) 收敛于$s = a + \mathrm{i}\,b$ $(a, b$为实数)的充要条件为: 实级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 分别收敛于 a 及 b.

定理 1.1.11 复级数(1.1.9)收敛的充要条件为: 对任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 且 p 为任意正整数时

$$|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}|<\varepsilon.$$

特别, 取 $p=1$ 则必有 $|\alpha_{n+1}|<\varepsilon$, 收敛级数的通项必趋于零, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

显然, 收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 的各项的绝对值组成的实数列 $\{|\alpha_n|\}$ 必是有界的.

注 若级数 (1.1.9) 中改变有限个项的值, 所得级数与原级数同为收敛或同为发散.

定理 1.1.12 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 收敛.

若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛; 非绝对收敛的收敛级数, 称为条件收敛.

注 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ 的各项既为非负实数, 故它是否收敛, 可依正项级数的理论判定之.

定理 1.1.13 (1)一个绝对收敛的复级数的各项可以任意重排次序, 而不改变其绝对收敛性, 亦不改变其和.

(2)两个绝对收敛的复级数 $s=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n, s'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n'$ 则其Cauchy乘积

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_0\alpha_n'+\alpha_1\alpha_{n-1}'+\cdots+\alpha_n\alpha_0')=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}' \tag{1.1.11}$$

也绝对收敛, 且其和为ss'.

证明 只证 (2). 设两个复级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n'$ 绝对收敛, 其和分别是 s 和 s', 于是两个正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n'|$ 收敛, 设其和分别是 M 和 M'. 设

$$M_m=\sum_{n=0}^{m}|\alpha_n|,\quad M_m'=\sum_{n=0}^{m}|\alpha_n'|,\quad s_m=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n,\quad s_m'=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n',$$
$$\gamma_n=\alpha_0\alpha_n'+\alpha_1\alpha_{n-1}'+\cdots+\alpha_n\alpha_0'.$$

则

$$\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\leqslant\sum_{n=0}^{m}(|\alpha_0\alpha_n'|+|\alpha_1\alpha_{n-1}'|+\cdots+|\alpha_n\alpha_0'|)\leqslant M_mM_m'\leqslant MM'.$$

于是级数 (1.1.11) 绝对收敛. 设 $T = M + 2M' + 1$, Γ_m 是级数 (1.1.11) 前 $m+1$ 项的和, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$M - M_n < \frac{\varepsilon}{T}; \quad |s_n' - s'| < \frac{\varepsilon}{T}$$

由于

$$\Gamma_m = \sum_{n=0}^{m} \gamma_n = \sum_{n+k \leqslant m} \alpha_n \alpha_k^{'} = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n s_{m-n}^{'},$$

从而当 $m > 2N+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\Gamma_m - ss'| &\leqslant |\Gamma_m - s_m s'| + |s'||s_m - s| = \left|\sum_{n=0}^{m} \alpha_n (s_{m-n}^{'} - s')\right| + |s'||s_m - s| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |\alpha_n||(s_{m-n}^{'} - s')| + \sum_{n=N+1}^{m} |\alpha_n||(s_{m-n}^{'} - s')| + |s'||s_m - s| \\ &\leqslant M_N \frac{\varepsilon}{T} + (M - M_{N+1})M' + M' \frac{\varepsilon}{T} < \varepsilon.\end{aligned}$$

于是级数 (1.1.11) 收敛且和是 ss'.

由于对任意复数 z, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad 和 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2n)!}$$

收敛, 所以如下定义是合理的.

定义 1.1.14 对任意复数 z, 定义

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

e^z, $\sin z$ 和 $\cos z$ 分别称为指数函数、正弦函数和余弦函数.

当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, 如上定义的三个函数就是通常数学分析定义的指数函数、正弦函数和余弦函数.

定理 1.1.15

(1) (Euler (欧拉) 公式) 对任意的复数 z, 有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z \tag{1.1.12}$$

(2) 对任意两个复数 z_1, z_2, 有

$$\mathrm{e}^{z_1 + z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \mathrm{e}^{z_2}. \tag{1.1.13}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com