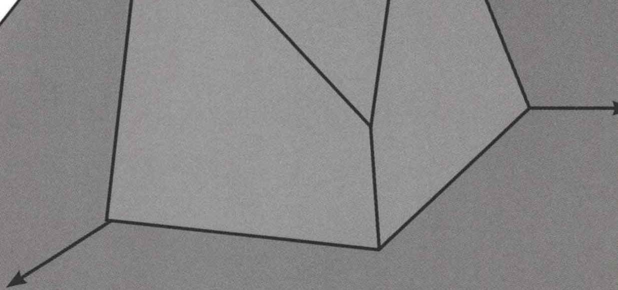
新世纪高等学校教材

数学与应用数学基础课系列教材

YUNCHOU XUE JICHU

运筹学基础

北京师范大学数学科学学院 主 编
杨 淳 编 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

数学与应用数学基础课系列教材

运筹学基础

YUNCHOUXUE JICHU

北京师范大学数学科学学院 主 编
杨 淳 编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础／杨淳编著．—北京：北京师范大学出版社，2012.8

(新世纪高等学校教材．数学与应用数学基础课系列教材)

ISBN 978-7-303-14313-9

Ⅰ．①运… Ⅱ．①杨… Ⅲ．①运筹学－高等学校－教材 Ⅳ．①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 056529 号

营销中心电话 010-58802181 58805532

北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn

电子信箱 beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn

北京新街口外大街 19 号

邮政编码：100875

印　　刷：北京东方圣雅印刷有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：170 mm × 230 mm

印　　张：18

字　　数：320 千字

版　　次：2012 年 8 月第 1 版

印　　次：2012 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：29.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　胡　宇

美术编辑：毛　佳　　装帧设计：天泽润

责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

前　言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系. 2004 年成立北京师范大学数学科学学院. 经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机. 北京师范大学数学科学学院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有 5 种版本. 第 1 种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 1985 年，由我校出版社编写出版了 1 套(17 部)数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要. 第 2 种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材. 第 3 种是面向 21 世纪课程教材. 第 4 种是北京师范大学现代数学课程教材. 第 5 种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中，除再次印刷外，已经有多部教材进行了修订或出版了第 2 版.

2005 年 5 月，李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责)，准备对学院教师目前使用的，或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版，另有一些教材需要重新编写. 计划用几年时间，出版数学及应用数学、数学教育、大学数学基础课程、数学学科硕士研究生 4 个系列的主要课程教材. 我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考. (李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院

2011 年 11 月 30 日

作者的话

运筹学是利用应用数学、计算机等工具，来研究各类有限资源的合理规划运用，并提供优化决策方案的科学，运筹学在经济、管理、财政、工程技术、军事、科学研究等诸多方面都得到了广泛的应用.

笔者在北京师范大学数学科学学院有十几年的运筹学课程教学经历. 早期的运筹学课程教学，只是单一的理论和方法的讲授. 随着计算机的发展和学院课程规划设置的不断改善和调整，运筹学课程的安排更为紧凑，讲授课时由每周 4 课时压缩到了现在的每周 3 课时，但增加了每周 2 课时的计算机实习，目的是侧重培养和锻炼学生利用计算机和运筹学知识解决实际问题的能力.

运筹学有很多分支，涉及面非常广. 现有的运筹学教材，常常涵盖了太多的内容，并不适合我们一学期 50～60 课时的教学计划. 因此，以课程的教学需求为目的，从容量和深度两方面综合考虑，笔者根据多年来讲授运筹学的经验编写了这本教材. 书中只包括了运筹学最基本的几部分内容：线性规划、目标规划、整数规划、动态规划和图与网络分析. 在内容结构和篇幅上比较紧凑，基本理论和基本概念阐述明确，避免了过于烦琐的定理证明，侧重计算机的算法实现和实际应用. 在习题的编排上注重少而精，每一个习题都是对课程相关内容的有针对性的练习. 除了针对基本概念、理论和方法的习题外，还给出了一些计算机求解与应用的习题，作为上机实习课上的练习材料.

由于受编者水平限制，本书在结构、内容等方面不可避免地存在着不妥之处，恳请使用本书的读者提出宝贵的批评与建议.

衷心感谢数学科学学院和北京师范大学出版社对本书的编写、出版的大力支持，更要特别感谢李仲来教授的鼓励与帮助.

编者

2011 年 11 月

于北京师范大学数学科学学院

目 录

绪论　运筹学简介

1. 运筹学的由来

运筹学是一门比较新的应用学科，起源于20世纪30年代末的第二次世界大战期间. 1938年，为解决防空作战的早期预警问题，对不同雷达站获取的信息需要综合分析，同时要与整个防空作战系统协调配合. 当时英国的波得塞(Bawdsey)雷达站的负责人罗伊(A. P. Rowe)提出开展对整个防空作战系统运用方面的研究. 为区别技术方面的研究，他提出了“Operational Research”一词，即作战研究. 这是“运筹学”一词最早见于文献的时间. 此后，英国和美国的军队中陆续成立了一些专门的研究小组，所研究的都是短期的战略、战术问题，例如飞机出击的时间和队形、商船护航舰队的编队与规模、潜艇的搜索识别问题、水雷的布置、反潜深水炸弹的合理爆炸深度等问题. 在美国称这种研究工作为“Operations Research”.

体现运筹学思想和方法的某些早期的先驱性研究工作，可以追溯到20世纪初期. 1914年，英国的兰彻斯特(Lanchester)用微分方程研究作战双方的兵力使用问题，称为兰彻斯特战斗方程；1917年，丹麦工程师埃尔朗(Erlang)在解决自动电话设计问题时，提出了著名的埃尔朗电话损失率公式，这是运筹学中排队论的起源；存储论的最优批量公式是在20世纪20年代初期提出的；1939年，苏联数学家康托洛维奇(Kantorovitch)在研究工业生产的资源合理利用和计划等问题时，提出了一个线性规划的数学模型，为用数学方法解决管理问题进行了开创性的工作. 这些先驱工作对以后运筹学的发展有着深远的影响.

第二次世界大战之后，运筹学从军事方面的研究逐步扩展到社会和经济的各领域，其应用研究和理论研究都得到了迅速的发展.

运筹学在20世纪50年代传入中国，其名称曾一度被翻译为“作业研究”或“运用研究”，后改译为运筹学，以概括运用与筹划两方面的内容. 运筹两字取自《史记·高祖本纪》中的“夫运筹帷幄之中，决胜千里之外”一语.

2. 运筹学的研究对象、目的和特点

运筹学的研究对象是社会、经济、生产管理、军事等活动中能用数量来表达的有关决策、管理等方面的优化问题，目的是为决策者提供更好的、有定量依据的、合理有效的资源运用决策方案. 运筹学是运用自然科学、社会科学、军事科学等相关理论、研究分析各领域的实践活动的优化决策问题的一门交叉学科.

运筹学的基本特点是考虑系统的整体优化，通过多学科的交叉与综合，运用数学的研究方法解决实际问题. 运筹学通过将复杂的应用问题表示成数学模型及定量分析求解，为决策者选择系统性的最优决策和指导应用提供定量依据. 运筹学在理论上和应用上的发展相互促进，并与计算机技术的发展密切相关.

3. 运筹学的研究步骤

运筹学运用模型方法解决实际问题，通常包括如下 6 个主要步骤.

(1) 提出与形成问题. 首先对研究的问题及系统进行分析，确定问题的目标以及限制条件，确定可控的决策变量，收集数据. 这项工作通常需要同专业人员共同讨论、研究完成.

(2) 建立模型. 模型是真实系统的抽象代表，用数学语言反映可控的决策变量、不可控变量和参数、限制条件以及优化目标的相互关系. 模型通常都需要适当的简化和设置一些假设条件. 如果根据问题可以得到一个归结为某一运筹分支的数学模型，那么可以用相应的方法求解. 有时由于问题的复杂性，可能需要建立模拟模型并使用启发式方法来解决一个决策问题.

(3) 模型的求解. 用数学方法或其他工具求解建立的模型. 模型的解从满足目标要求的角度可以分为最优解、次优解和满意解，从解的精度角度可以分为精确解和近似解. 我们的教材中主要介绍求最优解，但在实际应用中，得到满意解或足够近似的最优解同样可以满足需求. 模型的求解通常要借助于计算机，通过相应的算法来完成.

(4) 对模型和由模型求出的解进行检验与考核. 根据实际问题建立的模型及其解应该可以充分反映所研究的问题或系统的状态与行为. 检验模型的常用方法是将历史数据输入模型，比较模型得到的解和历史实际情况的符合程度. 如果符合的较好，那么可以认为模型是正确的，否则如果发现有较大误差，就要重新考察构成模型的各个因素，包括所用的数据和求解方法，进行必要的调整与修正.

(5) 建立对解的有效控制. 根据实际问题建立的模型都有一定的适用范围，超出这个范围，模型的最优解也可能失去其最优意义，因此需要通过灵敏度分析的方法，确定最优解保持稳定的模型参数的变化范围. 一旦条件参数超出这个范围，就要及时对模型和导出的解进行修正.

(6) 方案的实施. 将由模型得到并经过验证的解应用于实际问题. 这并不是一个简单的步骤，需要明确实施的方式、时机，估计实施过程中可能出现的问题并制定解决的方法等，才能达到切实的成效. 这一过程还需要与管理和具

体实施人员的沟通与合作.

上述 6 个研究步骤的关系可以用直观的示意图表示，见图 0-1.

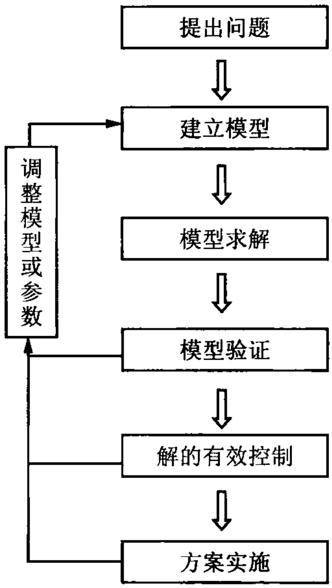


图 0-1　运筹学的工作步骤示意图

4. 运筹学的主要分支介绍

(1) 线性规划(Linear Programming)

线性规划研究的是对一组连续变化的决策变量，在关于这组变量的线性不等式或等式的限制条件下，使某一线性目标取得最大或最小的问题. 这里的限制条件称为约束条件，问题的优化目标称为目标函数. 线性规划解决的问题可以是利用有限的人力、物力、财力资源来完成最多的任务或获得最高收益，或者在完成预定目标的前提下付出最少的代价.

(2) 整数规划(Integer Programming)

许多实际问题要求部分或全部的决策变量取整数，比如人员、船只的数量等. 这类规划问题称为整数规划问题.

(3) 目标规划(Goal Programming)

目标规划是线性规划的一种特殊应用，用于处理多个目标并存的优化问题.

(4) 非线性规划(Nonlinear Programming)

非线性规划是具有非线性约束条件或目标函数的数学模型，是运筹学一个

重要分支．非线性规划的主要内容是关于最优化问题的理论与算法的研究．

(5) 动态规划(Dynamic Programming)

动态规划是研究多阶段决策过程最优化问题的一种数学方法，是最优控制和运筹学的重要数学工具．为了寻找系统最优决策，可将系统运行过程划分为若干相继的阶段，并在每个阶段都做出决策．这种决策过程就称为多阶段决策过程．多阶段决策过程的每一阶段的输出状态就是下一阶段的输入状态．某一阶段做出的最优决策，对于本阶段或者下一阶段而言未必是最有利的．多阶段决策的最优化问题必须从系统整体出发，要求各阶段选定的决策所构成的决策序列最终能使总体的目标函数达到极值．

(6) 图论(Graph Theory)

运筹学中把一些研究对象用节点表示，对象之间的关系用连线(边)表示，点、边的集合构成图．图论研究由节点和边所组成图形的数学理论和方法．运筹学中的许多问题可以转化为图论问题，使用图论的理论和方法求解．例如路网的通行能力、设施的合理布局、工序间的合理衔接搭配等．

(7) 排队论(Queueing Theory)

排队论也称为随机服务系统理论，通过研究排队服务系统的工作性能、状态和特征指标，来解决系统的最优设计和最优控制问题，并为设计新的排队系统及改进现有系统的性能提供数量依据．

(8) 存储论(Inventory Theory)

存储论研究最优存储策略的理论和方法．研究在不同需求、供货及到达等情况下，确定最优的订货时间点及订货数量，使用于订购、存储和可能发生短缺的费用的总和为最少．

(9) 对策论(Game Theory)

对策论也称为博弈论，研究具有对抗或竞争性质的现象，是关于两个或多个局中人按一定规则处于竞争状态下的决策行为的数学理论．对策论的研究为对抗各方提供有利于己的最优策略．

(10) 决策论(Decision Theory)

决策论是根据系统的状态信息和评价准则选取最优策略的数学理论，是关于不确定性决策问题的合理性分析过程及有关概念的理论．

第 1 章　线性规划与单纯形法

线性规划(Linear Programming, LP)是运筹学中的重要分支，这一分支的理论与求解方法在运筹学中发展较早，也相对成熟和完善. 线性规划在非常广泛的领域有很多成功的应用. 本章介绍线性规划的数学模型、基本概念和基本理论，以及求解线性规划问题的单纯形法.

§1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　线性规划问题的若干实例

首先通过如下问题提出线性规划问题的数学模型.

例 1-1　某化工制剂车间安排生产甲、乙两种试剂. 生产每千克甲试剂需要 3 kg 原料 A 和 1 kg 原料 B，生产每千克乙试剂需要 1 kg 原料 A、1 kg 原料 B 和 2 kg 原料 C. 生产每千克甲、乙试剂可分别获利润 200 元与 100 元. 现有原料 A，B，C 各 11 kg，5 kg，6 kg. 问应如何安排甲、乙试剂的生产，从而可以获得最高利润.

此问题为充分利用现有资源获得最大利润问题. 我们设甲、乙试剂各生产 x_1 kg，x_2 kg. 由于 A，B，C 3 种原料的消耗不能超过现有量，则需满足如下 3 个不等式

$$3x_1 + x_2 \leqslant 11,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 5,$$
$$2x_2 \leqslant 6,$$

利润可以表示为 $z = 2x_1 + x_2$，这里以百元为单位.

考虑到生产量 x_1，x_2 应是非负的，此问题为求二元函数 $z = 2x_1 + x_2$ 的条件最大值问题，可以如下表示：

$$\max z = 2x_1 + x_2,$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 11, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ 2x_2 \leqslant 6, \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{1-1}$$

模型(1-1)就是一个线性规划模型，其特点可以归纳如下：

(1) 有一组控制变量表示某一方案，称为决策变量. 此问题中的决策变量

为 x_1，x_2；

(2) 控制变量需满足若干线性的约束条件，可以是等式或不等式，此例中为 3 种原料限制及对决策变量 x_1，x_2 的非负要求；

(3) 对一个关于决策变量的线性函数求极值，此函数称为目标函数，此例中为利润.

下面我们再给出几类较为常见的线性规划问题模型.

例 1-2 资源的最优利用问题

某企业有 m 种资源用于生产 n 种产品，m 种资源的数量分别为 b_i，第 j 种产品消耗第 i 种资源的单位消耗量为 a_{ij}，第 j 种产品的单位利润为 c_j，求最大利润的生产方案.

设第 j 种产品的生产量为 x_j，则问题可以表示成

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad \text{总利润最高}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m, & \text{第 } i \text{ 种资源消耗数量不超过 } b_i \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n. \end{cases}$$

例 1-1 即为此类问题的一个具体实例，研究的是如何利用有限资源获得最大利润问题.

例 1-3 生产组织与计划问题

某工厂用机床 A_1，A_2，…，A_m 加工零件 B_1，B_2，…，B_n，A_i 机床的可使用机时为 a_i，工厂必须完成 B_j 零件的数量为 b_j，A_i 机床加工每个 B_j 零件所需机时为 c_{ij}，加工每个 B_j 零件的成本为 d_{ij}，求总成本最低的安排生产方案.

设用 A_i 机床加工 B_j 零件的数量为 x_{ij}，可以建立如下模型

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}, \text{总成本最低}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leqslant a_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m, & \text{使用第 } i \text{ 种机床的总机时不超过 } a_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n, & \text{生产第 } j \text{ 种零件的总数量不少于 } b_j \\ x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n. \end{cases}$$

此类问题研究的是利用有限的资源，在满足生产计划指标的前提下如何最大限度地降低生产成本.

例 1-4 配套产品生产问题

某工厂在 m 种机床上加工 n 种零件 B_1，B_2，…，B_n，第 i 种机床的数量为

a_i，第 i 种机床加工 B_j 零件的生产效率为每台 c_{ij} 件，n 种零件要求按配套比 $P_1:P_2:\cdots:P_n$ 生产，求成套产品数量最大的生产方案.

设用第 i 种机床加工 B_j 零件的台数为 x_{ij}，则有

$$\max z = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}}{P_j}, \qquad \text{成套产品数量最大}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i,\ i=1,2,\cdots,m, & \text{使用第 } i \text{ 种机床的总台数不超过 } a_i \\ \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}}{P_2} = \cdots = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}}{P_n}, & \text{各种零件按规定的配套比例生产} \\ x_{ij} \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

此类问题的特点是生产安排要求严格满足配套比例，同时也受到有限资源的制约，追求的是使成套产品数量达到最大.

例 1-5　合理下料问题

用某种原料毛坯加工零件 A_1，A_2，…，A_m，设在一件原料上有 B_1，B_2，…，B_n 种不同的下料方式，按 B_j 方式可加工零件 A_i 的件数为 c_{ij}，工厂必须完成零件 A_i 的数量为 a_i，求使用原料毛坯总数量最少的下料方案.

设用 B_j 方式下料的原料毛坯数量为 x_j，则有

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad \text{使用的原料总数量最少}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i,\ i=1,2,\cdots,m, & \text{加工出的第 } i \text{ 种零件数量不少于 } a_i \\ x_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

下料问题是工业生产的原料加工中比较常见的一个问题，不同的下料方式获得的各类零件的数量不同，而各类零件的需求量是需要满足的限制条件. 问题的优化目标可以是要求总用料数最省，也可以是要求剩余的余料最少.

例 1-6　配料问题

用 n 种原料 B_1，B_2，…，B_n 制成含 m 种成分 A_1，A_2，…，A_m 的某产品，每单位产品中 A_i 成分的需求量要求不低于 a_{1i}，不高于 a_{2i}. B_j 原料的单价为 b_j，每单位含 A_i 的量为 c_{ij}，求总成本最低的配料方案.

设单位产品中用原料 B_j 的量为 x_j，则有

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j, \qquad \text{总成本最低}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{1i} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \leqslant a_{2i},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m, & A_i \text{ 成分的含量符合产品的比例要求} \\ x_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \end{cases}$$

配料问题的关键是需要满足产品的成分比例要求，在此前提下再追求最低的总生产成本. 我们这里的模型没有涉及原料的资源数量，通常在生产实际中还需要引入资源限制的约束条件.

例 1-7 运输问题

某种物资从 m 个产地 A_1，A_2，…，A_m 运往 n 个销地 B_1，B_2，…，B_n，A_i 的产量为 a_i，B_j 的销量为 b_j，从 A_i 到 B_j 的单位运价为 c_{ij}，求总运费最少的运输方案.

我们设从 A_i 到 B_j 的运输量为 x_{ij}.

若 m 个产地的总产量 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ 等于 n 个销地的总销量 $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，我们称之为产销平衡的运输问题，其线性规划模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \qquad \text{总运费最省}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m, & \text{各产地的物资全部运出} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n, & \text{各销地的需求全部满足} \\ x_{ij} \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \end{cases}$$

对总产量大于总销量的情形，其线性规划模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \qquad \text{总运费最省}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m, & \text{各产地的运出量不超过产量 } a_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n, & \text{各销地的需求全部满足} \\ x_{ij} \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \end{cases}$$

对总产量小于总销量的情形，其线性规划模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \qquad \text{总运费最省}$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,2,\cdots,m, & \text{各产地的物资全部运出}\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j,\ j=1,2,\cdots,n, & \text{各销地的需求无法全部满足}\\ x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \end{cases}
$$

运输问题包括两组限制条件，即不可以超过产量限制和应该满足销量需求，结合具体问题的特点，会有不同的模型形式. 由于运输问题约束形式的特殊性，可以有专门的算法来求解此类问题，我们将在第 3 章中对此展开讨论.

通过以上例子的讨论，我们可以归纳出以 x_1，x_2，…，x_n 为决策变量的线性规划问题的一般形式：

$$
\max\ (\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\ \geqslant) b_1,\\ \cdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\ \geqslant) b_m,\\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s \geqslant 0,\\ x_{s+1},\ \cdots,\ x_t \leqslant 0,\\ x_{t+1},\ \cdots,\ x_n \text{无约束}. \end{cases} \tag{1-2}
$$

模型中针对问题的不同优化目的，对目标函数 z 可以要求最大化或最小化. 由于实际问题的不同制约条件，模型的约束要求可以是不超过($\leqslant$)、不低于($\geqslant$) 或严格满足($=$)，对问题中的决策变量，比较常见的限制是要求满足非负条件，但对有些问题，也会出现要求某些决策变量 $\leqslant 0$，或没有任何额外限制的情况.

1.1.2　两个决策变量的线性规划问题的图解法

为了导出一般线性规划问题的有关概念、解的特点等，我们首先研究只有两个决策变量的线性规划问题. 对这种简单情形，可以在以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系中画出问题的约束条件与目标函数的图形，借助于几何直观，求出线性规划问题的解. 我们还可以进一步地将两个决策变量问题的一些结论推广到一般线性规划问题.

两个变量的线性规划问题的图解法的一般步骤：

(1) 将问题的约束条件在以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系中表示，确定满足约束条件的可能的解的范围.

(2) 在图上画出目标函数对应的直线，根据问题是求最大值或最小值，标

记目标函数值增加或减少的方向.

(3) 确定最优解.

我们以例 1-1 为例说明图解法的具体过程.

例 1-8 用图解法求如下线性规划问题的最优解

$$\max z = 2x_1 + x_2, \tag{1-1.1}$$

$$(\text{LP})\quad \text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 11, & (1\text{-}1.2)\\ x_1 + x_2 \leqslant 5, & (1\text{-}1.3)\\ 2x_2 \leqslant 6, & (1\text{-}1.4)\\ x_1,\ x_2 \geqslant 0. & (1\text{-}1.5)\end{cases}$$

首先画出以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系，由于决策变量 x_1，x_2 要求满足式(1-1.5)，故只有第一象限内的点才可能满足约束.

将式(1-1.2)、式(1-1.3) 和式(1-1.4) 对应的不等式先改写成等式，则分别对应 x_1，x_2 平面上的一条直线，在图中画出这三条直线.

以式(1-1.2) 为例，直线 $3x_1 + x_2 = 11$ 将坐标平面分成两部分，位于此直线左下方的半平面内的点满足 $3x_1 + x_2 < 11$，位于此直线右上方的半平面内的点满足 $3x_1 + x_2 > 11$，则约束(1-1.2) 对应直线左下方的半平面，包括此直线上的点.

类似地画出约束(1-1.3)(1-1.4) 的对应直线，确定相应的满足约束区域，它们在第一象限内的公共部分为图 1-1 中的多边形区域 $OABCD$，即在多边形 $OABCD$ 内部及其边界上的点都满足约束(1-1.2) ~ (1-1.5). 此区域称为线性规划问题(LP) 的可行域，区域内的点(x_1，x_2) 称为一个可行解.

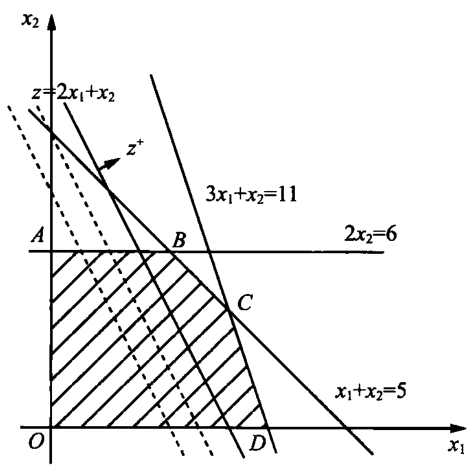


图 1-1 例 1-8 的图解法，可行域有界、有唯一最优解情形

目标函数 $z = 2x_1 + x_2$ 对应 x_1，x_2 平面上的一族平行直线，图 1-1 中画出了 3 条平行直线，从左至右分别对应 $z = 4$，5，6. 因为此问题为求目标函数的最大值，我们在 $z = 6$ 的直线上标出了 z 值增加的方向.

由图 1-1 可见，当目标函数直线向右平移到与多边形区域 $OABCD$ 的顶点 C 相交时，可以在所有可行解中达到最大值，继续向右平移可使目标值增加，但不再有满足所有约束的可行解.