普通高等教育“十一五”国家级规划教材

21世纪高等职业教育文化基础课通用教材

高等数学

MATHS

（第2版）

主编　陈笑缘

中国财政经济出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

21 世纪高等职业教育文化基础课通用教材

高等数学

（第 2 版）

陈笑缘　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/陈笑缘主编．—2版．—北京：中国财政经济出版社，2010.6
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
21世纪高等职业教育文化基础课通用教材
ISBN 978－7－5095－1250－0

Ⅰ．高…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第016829号

责任编辑：郭德成　　　责任校对：张全录
版式设计：董生萍

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：jiaoyu@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100142
发行电话：88190616　88190655（传真）
北京财经印刷厂印刷
787×960毫米　16开　16.25印张　266 000字
2010年6月第2版　2010年6月北京第1次印刷
定价：22.00元
ISBN 978－7－5095－1250－0/O・0016
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744

前言

本书为国家“十一五”规划教材，是为了满足高等职业技术教育改革发展的需要，根据教育部制定的“高职高专数学教学的基本要求”，遵循“应用为主，够用为度”的原则而修订编写。

在编写过程中，努力体现高等职业技术教育特点，以实际问题例子为引线，使抽象的概念形象化。同时，让学生体会到数学是来源于实际，又能指导实际的一种思维创造。用图形或例子解释概念、性质、定理，淡化理论推导，通俗易懂，由浅入深，富于启发。在教学过程中逐步渗透数学建模的思想，注重应用意识与创新思维能力的培养。适当介绍了 Matlab 数学软件应用、数学家小知识等，激发学生的学习兴趣，扩大知识面，发挥数学教育的功能。

修订中在保持原有教材风格基础上，根据高职学生生源多元特点，体现以下层次性：

第一目标层次，为基本要求层次，为所有学生都必须掌握的内容；

第二目标层次，对于基础较好的学生（如普高理科生）要求掌握的内容，如知识要点的加深，每块内容例子的加深，这些内容前用“+”号表示；

第三目标层次，为拓展、创新型层次，为对数学有兴趣的学生设立的内容，用“*”号表示。

本书主要内容有：一元微积分、二元函数偏导数及其应用、线性代数及其应用、概率统计初步四大模块，可供经管类各专业使用。

与本书相配套的有《高等数学学习辅导》、多媒体课件与《高等数学教师参考书》等，供学生学习与教师教学使用。

本套教材主编：陈笑缘，副主编：吕杰林、叶迎春，参与编写的人员（按章节顺序排列）：第一章：叶迎春；第二章：吕杰林；第三章：霍本瑶；

第四、五章：陈笑缘；第六章：于信；第七章：王春珊。

在编写过程中得到各编写同志所在院校的大力支持与协作，在此表示感谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2010年3月

目录

第一章
函数、极限与连续

内容提要

函数是微积分学研究的主要对象，极限和连续是微积分学研究的基本工具. 本章在简要复习函数相关知识的基础上，学习极限与连续的概念等. 为进一步学习微积分知识奠定基础.

第一节　函　　数

一、函数的概念与性质

1. 函数的概念

定义 1.1　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照某种对应法则 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x)\,,\ x\in D$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**函数**（或**因变量**）. 自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**.

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应法则 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之相

对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作

$$y_0=f(x_0)\text{或}y\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$$

全体函数值的集合，称为函数的**值域**.

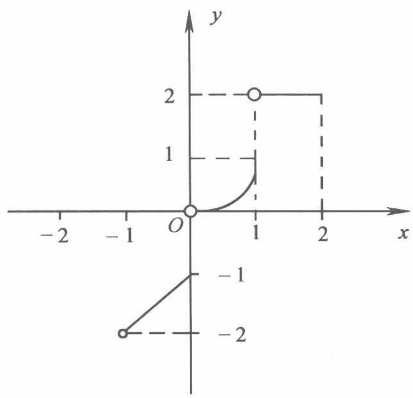
例1 （1）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(2)$，$f(-x)$；

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1<x\leqslant 0\\ x^2, & 0<x\leqslant 1\\ 2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，先作函数草图，并求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

解 （1）$f(2)=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$，

$f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（2）函数 $f(x)$ 的草图如右；



$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$，

$f(1)=1^2=1$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right)=2$.

我们在研究函数时，一定要考虑它的定义域. 当函数用解析法表示时，求函数的定义域的原则是使函数表达式有意义. 一般要考虑以下几个方面：

（1）分式，分母必须不等于零；

（2）偶次根式，被开方式必须大于等于0；

（3）对数，真数必须大于零，底必须大于零且不等于1；

（4）正切符号下的式子必须不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$；

（5）余切符号下的式子必须不等于 $k\pi(k\in Z)$；

（6）反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值必须小于等于1.

如果表达式中同时有以上几种情况，需同时考虑，并求它们的交集.

特别地，分段函数的定义域为各段自变量取值集合的并集. 如例1(2)的函数是一个分段函数，它的定义域是 $(-1,0]\cup(0,1]\cup(1,2]$，即为 $(-1,2]$.

例 2　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{3x+5}{x^2-2x}$　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2-16}$

(3) $f(x)=\dfrac{\ln(2x+4)}{\sqrt{3-x}}$　　(4) $f(x)=\arcsin\dfrac{1+x}{2}$

解　(1) 因为 $x^2-2x\neq0$，解得 $x\neq0$ 且 $x\neq2$，所以函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 因为 $x^2-16\geqslant0$，解得 $x\geqslant4$ 或 $x\leqslant-4$，所以函数的定义域为 $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

(3) 因为 $\begin{cases}3-x>0\\2x+4>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x<3\\x>-2\end{cases}$，所以函数的定义域为 $(-2,3)$.

(4) 因为 $-1\leqslant\dfrac{1+x}{2}\leqslant1$，即 $-3\leqslant x\leqslant1$，所以函数的定义域为 $[-3,1]$.

说明：(1) 函数的定义域一般用区间或集合表示.

(2) 应当指出，在实际应用问题中，除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑到变量的实际意义，一般来说，经济变量往往取正值.

(3) 在讨论函数时，经常用到邻域概念. 我们称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ **邻域**，简称点 x_0 的**邻域**. δ 为正数，称为**邻域的半径**.

(4) 函数的定义域、对应法则、值域称为函数的三要素. 当两个函数的定义域与对应法则一致时，这两个函数表示的是同一个函数. 如 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=|x|$，它们的定义域与对应法则一致，只是表示不同而已，实际是同一个函数.

2. 函数的简单性质

(1) 函数的奇偶性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，且对于任意的 $x\in D$，$-x\in D$，如果 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**；如果 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**. 既不是奇函数，又不是偶函数的函数称为**非奇非偶函数**.

由定义 1.2 知，在平面直角坐标系中，奇函数的图形关于原点对称（如图 1－1）；偶函数的图形关于 y 轴对称（如图 1－2）.

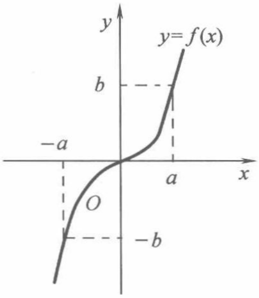


图1－1

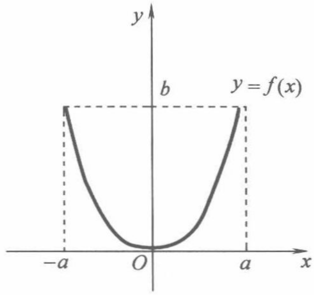


图1－2

例3 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=4x+\cos x$ ⁺(2) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

解 (1) 因为$f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x\neq f(x)$，且$f(-x)\neq -f(x)$，所以$f(x)=4x+\cos x$既非奇函数，也非偶函数.

⁺(2)因为$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，所以$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$是奇函数.

(2) 函数的单调性

定义1.3 设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义. 对于区间(a,b)内的任意两点x_1和x_2，如果当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数$y=f(x)$在(a,b)内是**单调增加的**(或**单调减少的**)，如图1－3(或图1－4)，区间(a,b)称为函数$f(x)$的单调增(或减)区间.

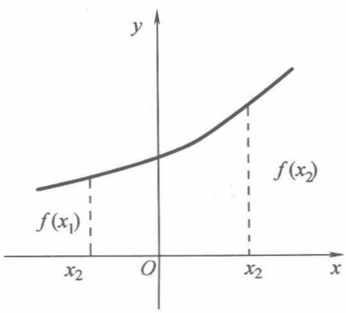


图1－3

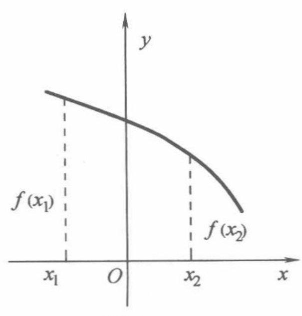


图1－4

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，所对应的区间称为单调区间.

说明：(1) 定义 1.3 中的区间(a,b)可改为其他区间.

(2) 将定义 1.3 中的$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$）可改为$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$）.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的；$[0,+\infty)$与$(-\infty,0]$分别为函数 $y=x^2$ 的单调增区间与单调减区间.

(3) 函数的周期性

定义 1.4　对于函数 $y=f(x)$，如果存在不为零的实数 T，对于每一个 $x\in D$，恒有$f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$是**周期函数**，T 称为函数$f(x)$的一个**周期**. 周期函数的周期有无穷多个，我们通常所说函数的周期指的是最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

(4) 函数的有界性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$在 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在 D 上是**有界**的.

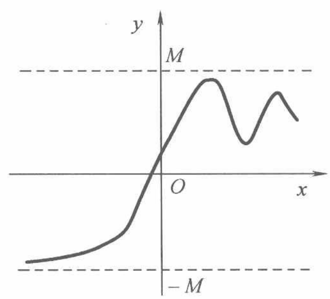


图 1-5

有界函数的图像 $y=f(x)$必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间(如图 1-5).

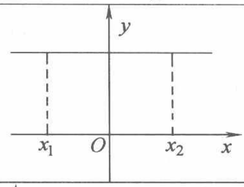
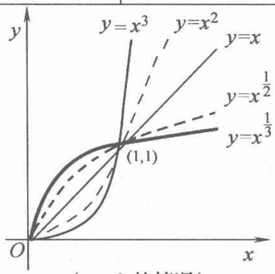
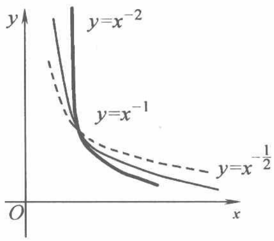
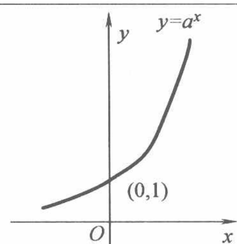
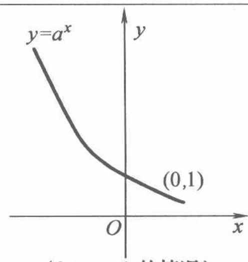
函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等是区间$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

二、初等函数

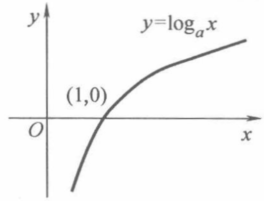
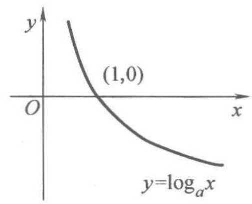
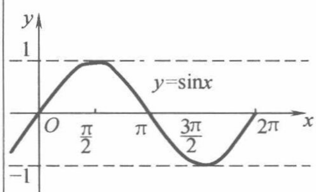
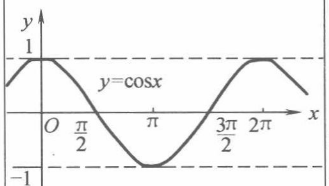
1. 基本初等函数

在中学里学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为**基本初等函数**，其主要性质与图像概括如下(见表 1-1)：

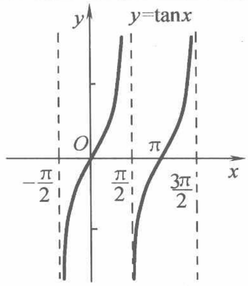
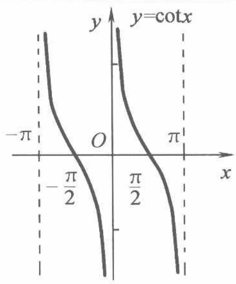
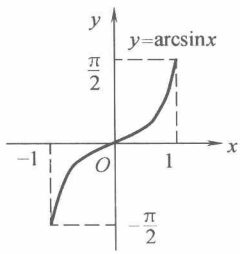
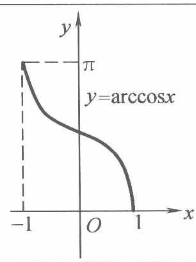
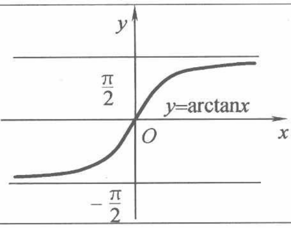
表 1-1

<table>
<tr><th>名称</th><th>表达式</th><th>定义域</th><th>图像</th><th>性质</th></tr>
<tr><td>常数函数</td><td>$y=c$
（c 为常数）</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td><td></td><td>1. 偶函数；
2. 有界.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">幂函数</td><td rowspan="2">$y=x^{\alpha}$
（α 为任意实数）</td><td rowspan="2">根据 α 值的不同，$y=x^{\alpha}$ 的定义域也不同</td><td>（$\alpha>0$ 的情况）</td><td>1. 图像都过(0, 0)和(1, 1)点；
2. 在$[0, +\infty)$内单调增加.</td></tr>
<tr><td>（$\alpha<0$ 的情况）</td><td>1. 图像都过(1, 1)点；
2. 在$(0, +\infty)$内单调减少.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">指数函数</td><td rowspan="2">$y=a^{x}$
($a>0$, $a\neq1$)</td><td rowspan="2">$(-\infty, +\infty)$</td><td>（$\alpha>0$ 的情况）</td><td>1. 图像均在 x 轴上方；
2. 图像均过(0, 1)点；
3. 单调增加.</td></tr>
<tr><td>（$0<\alpha<1$ 的情况）</td><td>1. 图像均在 x 轴上方；
2. 图像均过(0, 1)点；
3. 单调减少.</td></tr>
</table>

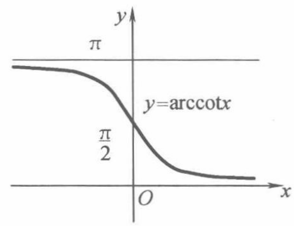
续表

名称	表达式	定义域	图像	性质
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(0, +\infty)$	 $(\alpha>0$ 的情况)	1. 图像均在 y 轴右侧； 2. 图像均过(1, 0)点； 3. 单调增加.
			 $(0<\alpha<1$ 的情况)	1. 图像均在 y 轴右侧； 2. 图像均过(1, 0)点； 3. 单调减少.
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$		1. 奇函数； 2. 周期 $T=2\pi$； 3. 有界； 4. 在区间$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in z)$上单调增加；在区间$[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in z)$上单调减少.
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$		1. 偶函数； 2. 周期 $T=2\pi$； 3. 有界； 4. 在区间$[(2k-1)\pi, 2k\pi](k\in z)$上单调增加；在区间$[2k\pi, (2k+1)\pi](k\in z)$上单调减少.

续表

名称	表达式	定义域	图像	性质
正切函数	$y=\tan x$	$\{x \mid x \neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$		1. 奇函数； 2. 周期 $T=\pi$； 3. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in z)$ 上单调增加.
余切函数	$y=\cot x$	$\{x \mid x\neq k\pi,\ k\in z\}$		1. 奇函数； 2. 周期 $T=\pi$； 3. 在区间 $(k\pi,\ (k+1)\pi)$ $(k\in z)$ 上单调减少.
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$		1. 奇函数； 2. 有界； 3. 单调增加.
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$		1. 有界； 2. 单调减少.
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,\ +\infty)$		1. 奇函数； 2. 有界； 3. 单调增加.

续表

名称	表达式	定义域	图像	性质
反余切函数	$y=\text{arccot}x$	$(-\infty, +\infty)$		1. 有界； 2. 单调减少.

2. 复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的．如某商品的销售收入 R 与商品的销售量 q 有关，而销售量 q 又与销售时间 t 有关，于是销售收入 R 通过 q 可以表示成时间 t 的函数. 对于这类函数，我们有下面的定义.

定义 1.6　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果对于自变量 x 的取值，通过 u 有唯一的 y 与之对应，则 y 通过变量 u 构成 x 的函数，称 y 为 x 的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 叫**中间变量**.

例如，由函数 $y=\cos u$，$u=x^2$ 构成了复合函数 $y=\cos x^2$.

说明：(1) 不是任意两个函数都可以构成一个复合函数的. 要构成复合函数，至少函数 $u=\varphi(x)$ 值域的一部分必须包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域中. 例如 $y=\ln u$，$u\in(0,+\infty)$ 和 $u=-1-x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 就不能复合. 这是因为对于 $u=-1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值都小于或等于 -1，于是 $y=\ln u$ 是没有意义的.

(2) 两个以上的函数也可以构成复合函数，如函数 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$，它们构成了复合函数 $y=\sin^2\sqrt{x}$.

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成，而更多的是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的，这样，复合函数的合成和分解往往是对简单函数来说的. 如函数 $y=\sqrt{x^2+\sin x}$ 可以看成由函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2+\sin x$ 复合而成的.