

高等数学

(同济六版)

全程指导

(下册)



東北大學出版社
Northeastern University Press

© 李春飞 李石涛 2012

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学全程指导. 下册 / 李春飞, 李石涛主编. — 沈阳:
东北大学出版社, 2012. 8

ISBN 978-7-5517-0201-0

I. ①高… II. ①李… ②李… III. ①高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 196454 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress. com

http: //www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市池陆广告印刷有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸: 140mm × 203mm

印 张: 10.75

字 数: 363 千字

出版时间: 2012 年 8 月第 1 版

印刷时间: 2012 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘宗玉 孟 颖

责任校对: 王延霞

封面设计: 刘江阳

责任出版: 唐敏志

ISBN 978-7-5517-0201-0

定价: 22.00 元

前 言

同济大学主编的第六版《高等数学》是目前国内公认最好的“高等数学”教材之一，并广泛使用于国内各高校。为了帮助广大学生学好同济六版《高等数学》，我们编写出这套《高等数学全程指导》。对于刚刚走入大学校门的新生来说，对大学自主学习的学习方式不太适应，加之高等数学概念的抽象和运算的繁杂，往往使他们感到力不从心。编写本书的目的恰恰在于让学生熟悉教材，尽快完成学习方法和思维方式的转变，对“高等数学”的学习进行全程指导，力求取得“用时少，成绩高”之效果。

本书以同济六版《高等数学》为蓝本，章节安排与其完全一致，可同步使用。每章均包括三部分内容，即

1. **主要内容** 包括主要定义、主要结论和结论补充三项，结论补充给出了作者由多年教学经验总结出的行之有效的计算公式。

2. **典型例题** 将所涉及的内容，尤其是重点内容进行系统归类，然后，通过相当数量的例题演示向学生介绍解题方法和运算技巧。

3. **习题全解** 对教材中的全部习题给出详细解答，有些题还给出多种解法，意在学生遇

有疑难之时助一臂之力，起到课下辅导的作用.

本书还配备了 10 套期末测试模拟试题，上学期 5 套，下学期 5 套，供学生期末考试前复习、演练使用.

本书为下册，适用于使用同济六版《高等数学（下册）》的理工科院校的本科生，对其他“高等数学”学习者也有一定的参考价值.

参加本书编写的还有刘忠礼、许凌志、张凤、王学理. 由于作者水平所限，加之时间仓促，书中难免会有疏漏和缺憾，若能得到读者的批评与同人的指教，那正是我们所热切渴望的.

作 者

2012 年 3 月

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数	1
一、主要内容	1
二、典型例题	4
三、习题全解	13
习题 8-1 向量及其线性运算	13
习题 8-2 数量积 向量积 * 混合积	18
习题 8-3 曲面及其方程	21
习题 8-4 空间曲线及其方程	25
习题 8-5 平面及其方程	28
习题 8-6 空间直线及其方程	32
总习题八 空间解析几何与向量代数	38
第九章 多元函数微分法及其应用	47
一、主要内容	47
二、典型例题	51
三、习题全解	65
习题 9-1 多元函数的基本概念	65
习题 9-2 偏导数	68
习题 9-3 全微分	72
习题 9-4 多元复合函数的求导法则	76
习题 9-5 隐函数的求导公式	81
习题 9-6 多元函数微分学的几何应用	86
习题 9-7 方向导数与梯度	92
习题 9-8 多元函数的极值及其求法	95

* 习题 9-9 二元函数的泰勒公式	101
* 习题 9-10 最小二乘法	105
总习题九 多元函数微分法及其应用	106
第十章 重积分	117
一、主要内容	117
二、典型例题	122
三、习题全解	138
习题 10-1 二重积分的概念与性质	138
习题 10-2 二重积分的计算法	141
习题 10-3 三重积分	153
习题 10-4 重积分的应用	158
* 习题 10-5 含参变量的积分	167
总习题十 重积分	171
第十一章 曲线积分与曲面积分	181
一、主要内容	181
二、典型例题	190
三、习题全解	203
习题 11-1 对弧长的曲线积分	203
习题 11-2 对坐标的曲线积分	208
习题 11-3 格林公式及其应用	213
习题 11-4 对面积的曲面积分	222
习题 11-5 对坐标的曲面积分	226
习题 11-6 高斯公式 * 通量与散度	230
习题 11-7 斯托克斯公式 * 环流量与旋度	233
总习题十一 曲线积分与曲面积分	238
第十二章 无穷级数	246
一、主要内容	246
二、典型例题	253

三、习题全解	266
习题 12-1 常数项级数的概念和性质	266
习题 12-2 常数项级数的审敛法	270
习题 12-3 幂级数	275
习题 12-4 函数展开成幂级数	278
习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用	282
* 习题 12-6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	290
习题 12-7 傅里叶级数	294
习题 12-8 一般周期函数的傅里叶级数	299
总习题十二 无穷级数	304
下学期期末测试模拟试题	314
第一套	314
第二套	317
第三套	320
第四套	323
第五套	326
下学期期末测试模拟试题参考答案	329

第八章 空间解析几何与向量代数

一、主要内容

(一) 主要定义

1. $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ 的模为 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}$.

2. $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$,

数量积(点积)为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

向量积(叉积)为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 其模为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 方向服从右手定则.

3. 混合积 $[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

(二) 主要结论

1. 设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2. 平面方程

(1) 一般式 $Ax + By + Cz + D = 0$.

(2) 点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

(3) 截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

(4) 三点式 过 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ 的平

面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

(5) 法式方程 $\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0$,

式中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为平面上点 (x, y, z) 处法向量的方向余弦, $|p|$ 为原点到平面的距离.

3. 直线方程

(1) 一般式
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

(2) 对称式
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

(3) 参数式
$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

(4) 向量式
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{l}.$$

式中
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}.$$

(5) 两点式
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4. 点到平面距离
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. 重要的二次曲面

(1) 球面
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

(2) 椭球面
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(3) 锥面
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

(4) 椭圆抛物面
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

(5) 双曲抛物面
$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p, q \text{ 异号}).$$

(6) 柱面
$$F(x, y) = 0.$$

(7) 单叶双曲面
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$(8) \text{ 双叶双曲面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

6. 夹角

(1) 两平面的夹角 θ

$$\text{设 } \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(2) 两直线的夹角 θ

$$\text{设 } L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

$$\cos\theta = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

(3) 直线与平面的夹角 θ

$$\text{设 } L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\sin\theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

(三) 结论补充

1. 非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 互相平行的充要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

2. 非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 共面的充要条件是 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

3. 两直线平行、垂直, 直线与平面平行、垂直, 两平面平行、垂直的充要条件请读者自己总结, 兹不赘述.

4. 过平面 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与平面 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 的交线的平面束方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

5. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任一点, 且直线的方向向量为 $\mathbf{s}$, 则 M_0 到直线 L 的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

$$6. \operatorname{Prj}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \operatorname{Prj} \mathbf{a} + \mu \operatorname{Prj} \mathbf{b}, \operatorname{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}.$$

7. 向量积的运算

$$(1) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

$$(2) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

$$(3) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

8. 不共线的空间三点 A, B, C 所决定的平面面积为

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 为平面内不共线的三点, 则面积为

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

9. 空间异面直线 L_1, L_2 的方向向量为 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, A, B 分别为 L_1, L_2 上两点, 则 L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d = \frac{|\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|},$$

或

$$d = \frac{|(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}.$$

二、典型例题

(一) 向量代数

【例 8-1】 设 $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 垂直, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ 垂直, 求 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

【解】 依题意有

$$(2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0, (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 0.$$

即

$$2|\mathbf{a}|^2 + 3\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 5|\mathbf{b}|^2 = 0, 2|\mathbf{a}|^2 - 7\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 15|\mathbf{b}|^2 = 0.$$

解出

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{b}|^2, |\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|.$$

则

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-|\mathbf{b}|^2}{2|\mathbf{b}||\mathbf{b}|} = -\frac{1}{2}.$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2}{3}\pi.$$

【例 8-2】 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\alpha = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ 的方向取线段长

• 4 •

$|\overrightarrow{AB}| = 34$, 求 B 点坐标.

【解】 设 $B = B(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x-2, y+1, z-7)$, 依题意有

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-7}{-12} = \lambda \quad (\lambda > 0).$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} \\ &= \sqrt{(8\lambda)^2 + (9\lambda)^2 + (-12\lambda)^2} = \sqrt{289\lambda^2}. \end{aligned}$$

令 $\sqrt{289\lambda^2} = 34$, 求得 $\lambda = 2$. 从而 $x = 18, y = 17, z = -17$. 故 B 点坐标为 $(18, 17, -17)$.

【例 8-3】 已知 p, q 和 r 两两垂直且 $|p| = 1, |q| = 2, |r| = 3$, 求 $s = p + q + r$ 的长度.

$$\begin{aligned} \text{【解法一】} \quad |s|^2 &= s \cdot s = (p + q + r) \cdot (p + q + r) \\ &= p \cdot p + q \cdot p + r \cdot p + p \cdot q + q \cdot q + r \cdot q + \\ &\quad p \cdot r + q \cdot r + r \cdot r \\ &= p \cdot p + q \cdot q + r \cdot r = |p|^2 + |q|^2 + |r|^2. \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad |s| = \sqrt{|p|^2 + |q|^2 + |r|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

【解法二】 记 p_0, q_0, r_0 分别表示与 p, q, r 方向一致的单位向量, 则

$$s = p_0 + 2q_0 + 3r_0.$$

$$\text{故} \quad |s| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

【例 8-4】 已知 $|p| = 2, |q| = 3, (p, q) = \frac{\pi}{3}$, 求以 $A = 3p - 4q$ 和

$B = p + 2q$ 为两邻边的平行四边形的周长.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad |A|^2 &= A \cdot A = (3p - 4q) \cdot (3p - 4q) \\ &= 9|p|^2 - 24p \cdot q + 16|q|^2 \\ &= 9 \times 2^2 - 24 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} + 16 \times 3^2 = 108, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B|^2 &= B \cdot B = (p + 2q) \cdot (p + 2q) \\ &= |p|^2 + 4p \cdot q + 4|q|^2 \\ &= |p|^2 + 4|q|^2 + 4|p||q|\cos(p, q) \\ &= 2^2 + 4 \cdot 3^2 + 4 \times 2 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} = 52. \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad |A| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}, |B| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

设周长为 L , 则

$$\begin{aligned} L &= 2(|A| + |B|) = 2(6\sqrt{3} + 2\sqrt{13}) \\ &= 12\sqrt{3} + 4\sqrt{13}. \end{aligned}$$

【例8-5】 用向量代数方法证明三角形的三条高线交于一点。

【证】 作 $\triangle ABC$, 如图 8-1 所示, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, AD 与 BE 交于点 H , 连接 CH 并延长交 AB 于 F . 只要证明 $CF \perp AB$ 即可。

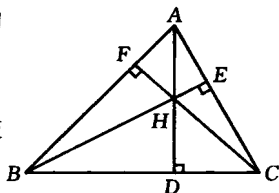


图 8-1

由于 $AD \perp BC$, 从而 $AH \perp BC$, 有 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$; 同理 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.\end{aligned}$$

故 $CH \perp AB$, 从而 $CF \perp AB$.

(二) 空间平面与直线

1. 空间平面

【例8-6】 求通过直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$, 且平行于直线 $x = y = \frac{z}{2}$ 的平面方程。

【解】 设所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$, 则

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -1),$$

而 $M_0(1, -2, -3)$ 是平面上的一点, 故所求平面方程为

$$2(x-1) + 0(y+2) - (z+3) = 0,$$

即

$$2x - z - 5 = 0.$$

【例8-7】 在由平面 $2x + y - 3z + 2 = 0$ 和平面 $5x + 5y - 4z + 3 = 0$ 所决定的平面束内, 求两个相互垂直的平面, 其中一个经过点 $(4, -3, 1)$.

【解】 由已知两平面决定的平面束方程为

$$2x + y - 3z + 2 + \lambda(5x + 5y - 4z + 3) = 0,$$

经过点 $(4, -3, 1)$ 之平面应满足条件

$$2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 + 2 + \lambda[5 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 + 3] = 0,$$

即

$$\lambda = -1.$$

故过点 $(4, -3, 1)$ 之所求平面为

$$2x + y - 3z + 2 - (5x + 5y - 4z + 3) = 0,$$

即

$$3x + 4y - z + 1 = 0.$$

另一平面也在平面束内. 故

$$(2+5\lambda)x + (1+5\lambda)y - (3+4\lambda)z + (2+3\lambda) = 0,$$

应满足条件

$$(2+5\lambda) \cdot 3 + (1+5\lambda) \cdot 4 + (-3-4\lambda) \cdot (-1) = 0,$$

即
$$\lambda = -\frac{1}{3}.$$

故所求的另一平面方程为

$$2x + y - 3z + 2 - \frac{1}{3}(5x + 5y - 4z + 3) = 0,$$

即
$$x - 2y - 5z + 3 = 0.$$

【例 8-8】 一平面通过两直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{2}$ 的公垂线 L , 且平行于向量 $s = (1, 0, -1)$ 求此平面方程.

【解】 已知两直线的方向向量为

$$s_1 = (1, 2, 1), s_2 = (1, 3, 2),$$

令 $s_3 = s_1 \times s_2$, 则 $s_3 = (1, -1, 1)$.

设所求平面的法向量为 n , 则应有 $n = s_3 \times s$, 计算可得 $n = (1, 2, 1)$.

下面求公垂线 L 上的一个点.

设此公垂线与 L_1 和 L_2 分别交于 $A(t+1, 2t-2, t+5)$ 和 $B(\lambda, 3\lambda-3, 2\lambda-1)$,

则 $\overrightarrow{AB} \parallel s_3$. 从而

$$\frac{\lambda - t - 1}{1} = \frac{3\lambda - 2t - 1}{-1} = \frac{2\lambda - t - 6}{1},$$

解出 $t = 6, \lambda = 5$. 故点 A 为 $(7, 10, 11)$.

所求平面方程为

$$(x-7) + 2(y-10) + (z-11) = 0,$$

整理得
$$x + 2y + z - 38 = 0.$$

【例 8-9】 在过直线 $L: \begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ 的所有平面中, 求一平面

Π , 使原点到 Π 的距离最长.

【解】 平面 $2x+y+z=0$ 过原点, 也过直线 L , 它不是所求的平面. 故可设过 L 的平面束方程为

$$(x+y+z+1) + \lambda(2x+y+z) = 0,$$

即
$$(1+2\lambda)x + (1+\lambda)y + (1+\lambda)z + 1 = 0.$$

原点与它的距离的平方

$$d^2 = \frac{1}{(1+2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (1+\lambda)^2}.$$

当 $(1+2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 = 6\left(\lambda + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$ 最小, 即 $\lambda = -\frac{2}{3}$

时, 距离最长. 所求平面为

$$x - y - z - 3 = 0.$$

2. 空间直线

【例 8-10】 推导两异面直线间的距离公式, 并用此公式求两直线

$$L_1: \frac{x-5}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1} \quad \text{与} \quad L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-8}{-3}$$

之间的距离.

【解】 设直线 L_1 的方向向量为 s_1 , 直线 L_2 的方向向量为 s_2 , M_1 是直线 L_1 上的点, M_2 是 L_2 上的点, 两直线 L_1, L_2 间的距离就是 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $s_1 \times s_2$ 上投影的大小, 即

$$\begin{aligned} |\text{Prj}_{s_1 \times s_2} \overrightarrow{M_1M_2}| &= |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \varphi \\ &= \left| \overrightarrow{M_1M_2} \right| \left| \frac{s_1 \times s_2}{|s_1 \times s_2|} \right| |\cos \varphi| \\ &= \left| \frac{1}{|s_1 \times s_2|} (s_1 \times s_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right| \\ &= \frac{|[s_1 s_2 \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|s_1 \times s_2|}. \end{aligned}$$

$$s_1 = (-4, 1, 1), s_2 = (2, 2, -3),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (0-5, 0-1, 8-2) = (-5, -1, 6),$$

$$[s_1 s_2 \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -25,$$

$$s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5, -10, -10),$$

$$|s_1 \times s_2| = 15,$$

所求距离为

$$d = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}.$$

【例 8-11】 设有直线 $L_1: \frac{x}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, $L_2: \begin{cases} z = 5x - 6, \\ z = 4y + 3, \end{cases} L_3:$

$\begin{cases} y = 2x - 4, \\ z = 3y + 5, \end{cases}$ 求平行于 L_1 而分别与 L_2, L_3 都相交的直线方程.

【解】 设过 L_2 且平行于 L_1 的平面方程为

$$5x - z - 6 + \lambda(4y - z + 3) = 0.$$

必有 $5 \times 4 + 4\lambda \times 1 + (-1 - \lambda) \times 1 = 0,$

得 $\lambda = -\frac{19}{3}.$

此平面即为 $15x - 76y + 16z - 75 = 0;$

同理可求得过 L_3 而平行于 L_1 的平面方程为

$$4x - 23y + 7z - 43 = 0.$$

所求直线即为

$$\begin{cases} 15x - 76y + 16z - 75 = 0, \\ 4x - 23y + 7z - 43 = 0. \end{cases}$$

【例 8-12】 在平面 $x + y + z + 1 = 0$ 内, 作直线通过已知直线 $\begin{cases} y + z + 1 = 0, \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ 与平面的交点且垂直于已知直线.

【解】 化已知直线为对称式, 有

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2i + j - k,$$

在直线上取一点 $(0, -1, 0)$, 则对称式方程为

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = -\frac{z}{1}.$$

参数式为

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = -t, \end{cases}$$

代入平面 $x + y + z + 1 = 0$, 得

$$t = 0.$$

故已知直线与平面交点为 $(0, -1, 0)$.

以 $s = 2i + j - k$ 为法向量过点 $(0, -1, 0)$, 作平面

$$2 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y + 1) - (z - 0) = 0,$$

即 $2x + y - z + 1 = 0.$

所求直线方程即为

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

【例 8-13】 坐标面在平面 $3x - y + 4z - 12 = 0$ 上截得一个 $\triangle ABC$, 从 z 轴上的一个顶点 C 作对边 AB 的垂线, 求它的方程.

【解】 把已知平面写成截距式, 有

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{3} = 1,$$

从而可知 $\triangle ABC$ 三顶点坐标为

$$A(4, 0, 0), B(0, -12, 0), C(0, 0, 3).$$

设垂线为 $\overrightarrow{CD}$, 则可令 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{AB}$, 于是

$$4(1 - \lambda)(-4) - 12\lambda(-12) + (-3) \cdot 0 = 0.$$

解出
$$\lambda = \frac{1}{10}.$$

从而
$$\overrightarrow{CD} = \left(\frac{18}{5}, -\frac{6}{5}, -3 \right).$$

垂线 CD 的方程为
$$\frac{x-0}{\frac{18}{5}} = \frac{y-0}{-\frac{6}{5}} = \frac{z-3}{-3},$$

即
$$\frac{x}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{-5}.$$

3. 点、线、面的其他问题

【例 8-14】 求点 $(1, 2, 3)$ 到直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ 的距离.

【解法一】 先求已知点在该直线上的投影. 为此先以 $\mathbf{n} = i - 3j - 2k$ 为法向量, 过点 $(1, 2, 3)$ 作平面, 有

$$(x-1) - 3(y-2) - 2(z-3) = 0, \text{ 即 } x - 3y - 2z + 11 = 0.$$

将已知直线写成参数式, 有

$$x = t, y = -3t + 4, z = -2t + 3,$$

代入平面方程得
$$t = \frac{1}{2}.$$

故
$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2}, z = 2.$$

所求距离就是点 $(1, 2, 3)$ 与点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ 间的距离

$$d = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + (3 - 2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

【解法二】 记 $M_0(1, 2, 3)$, $M(0, 4, 3)$, $\mathbf{s} = (1, -3, -2)$, 则所求距离为