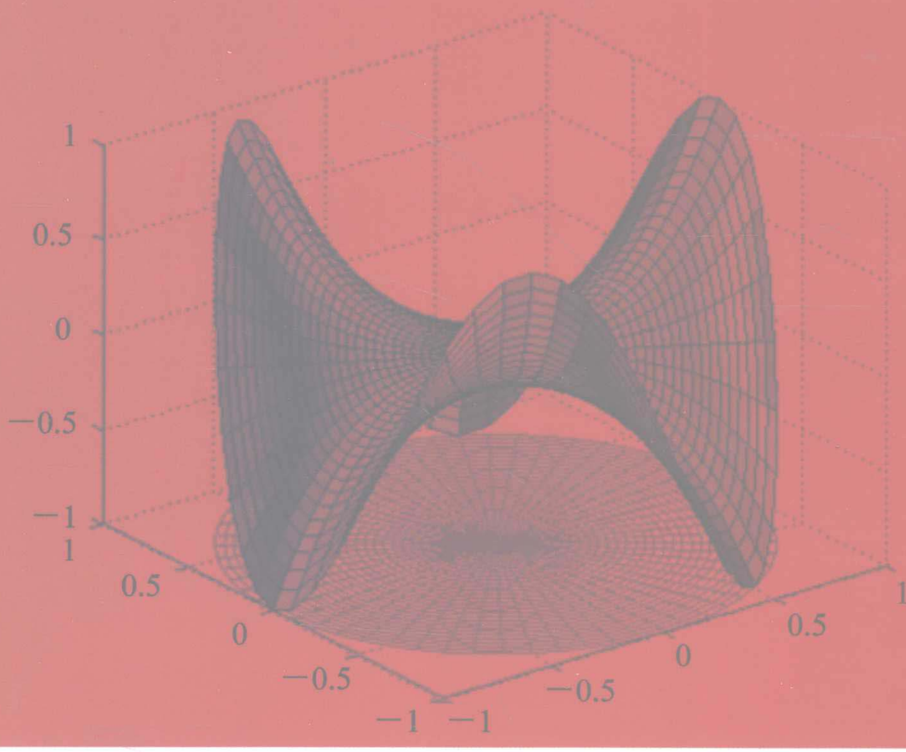
高等学校数学教材系列丛书




# 复变函数与场论简明教程

深圳大学复变函数与场论教研组 编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

# 复变函数与场论简明教程

深圳大学复变函数与场论教研组　编

西安电子科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书是在深圳大学"复变函数与场论"课程建设的需求下编写的，内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、矢量分析与场论、复变函数与场论的 MATLAB 求解等。

本书可作为高等工科院校各专业的教材。

★ 本书配有电子教案，需要者可在出版社网站下载。

**图书在版编目(CIP)数据**

**复变函数与场论简明教程/深圳大学复变函数与场论教研组编.**
—西安：西安电子科技大学出版社，2012.11
(高等学校数学教材系列丛书)
ISBN 978-7-5606-2928-5

Ⅰ.① 复… Ⅱ.① 深… Ⅲ.① 复变函数—高等学校—教材 ② 场论—高等学校—教材
Ⅳ.① O174.5 ② O412.3

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 262159 号**

策划编辑 马晓娟
责任编辑 马晓娟
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话 (029)88242885 88201467 邮　　编 710071
网　　址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com
经　　销 新华书店
印刷单位 西安文化彩印厂
版　　次 2012 年 11 月第 1 版 2012 年 11 月第 1 次印刷
开　　本 787 毫米×960 毫米 1/16 印 张 10
字　　数 199 千字
印　　数 1～3000 册
定　　价 17.00 元
ISBN 978-7-5606-2928-5/O
**XDUP 3220001-1**

# 前　言

工程数学系列课程是衔接高等数学与各工科专业课程的重要工具课，其内容涵盖线性代数、概率论与数理统计、复变函数、数理方程、矢量分析与场论等。其中，前四部分的内容可独立成体系，单独开设课程，而矢量分析与场论则由于教学内容不多，往往安排在专业课中作为专业课程的预备知识。这种安排占据了专业课程一定量的课时，且不便于学生熟练掌握该部分的内容。考虑到复变函数和场论同属于工程数学系列，且两者内容之间存在一定的联系，可将这两部分内容合并，从而建立一门新的课程——复变函数与场论。本书就是在此课程建设背景下编写的。

为帮助工科背景的读者抓住学习重点，本书在编写时偏重于基本概念和基本方法，简化了一些严格的数学证明。本书加入复变函数与场论的 MATLAB 求解内容，可帮助学生提高利用计算机求解数学问题的能力。本书内容可安排 54 学时。其中，第一章至第五章是复变函数内容，可安排 38～42 学时，第六章和第七章内容可安排 12～16 学时。

本书由廉德亮、郑能恒、王娜、李斌共同编写。其中，第一章由廉德亮编写，第二、三章由郑能恒编写，第四、五章由王娜编写，第六、七章由李斌编写。全书由李斌统稿。本书的编写还得到了西安电子科技大学出版社马晓娟老师等的大力支持，在此表示衷心感谢。

因时间仓促，加之编者水平有限，书中疏漏和欠妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者
2012 年 9 月

# 目　录

# 第一章　复数与复变函数

关于实变函数的概念我们在中学阶段已经有所认识。

对于两个实变量 $x$、$y$，如果对于 $x$ 在某一范围(或叫做集合、定义域)内的每一个确定的值，$y$ 都有确定的值与它对应，那么就称 $y$ 是 $x$ 的函数，$x$ 叫做自变量，$y$ 叫做随 $x$ 变化的函数。在数学领域中，函数是一种关系，这种关系使一个集合里(定义域)的每一个元素对应到另一个集合里(值域)的元素。

当自变量 $x$ 为复数时，对应的函数就称为复变函数，它是本课程的研究内容。复变函数与实变函数有许多类似的地方，在学习复变函数时应注意归纳和总结。

在中学阶段我们还了解了复数的一些基本概念和简单运算，本章在此基础上先引入复数的概念和它的表示方法；然后介绍其基本运算和与函数有关的两个基本要素，即区域(对应于定义域和值域)和对应法则；最后引入复变函数的极限和连续性的概念，为进一步研究解析函数理论和方法奠定基础。

## 1.1　复数及其表示式

### 1. 复数的概念

我们已经知道在实数范围内，方程 $x^2=-1$ 是无解的。由于解方程的需要，人们引进了一个虚数单位 i(或 j)，并且规定 $i^2=-1$，从而得出 i 是方程 $x^2=-1$ 的一个根。

对于任意两个实数 $x$ 和 $y$，我们称 $z=x+iy$(或写成 $z=x+yi$ 形式)为复数，其中，$x$，$y$ 分别称为 $z$ 的实部和虚部，记作 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$。

当虚部为数字时，习惯上把虚数 i 放在数字后，如 $2+3i$；当虚部为字母时，习惯上把虚数 i 放在字母前，如 $a+ib$。

当 $x=0$，$y\neq0$ 时，$z=0+iy=iy$，被称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+0i=x$，我们把它看做是实数 $x$。

从上面两个定义中不难发现：两个复数相等，必须且只需它们的实部和虚部分别相等。特别是当一个复数 $z=0$ 时，必须且只须它的实部和虚部同时等于 0。

与实数不同的是，任意两个复数不能比较大小！

**2. 复数的表示方式**

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数$(x, y)$唯一确定，如果在二维平面给定的直角坐标系上来描述复数，则全体复数集合与该平面上点的全体集合构成一一对应的关系，因此我们把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 用该平面上坐标为$(x, y)$的点来表示，这是复数的一个常用的几何表示式。

当直角坐标系用来描述复数时，相应的 $x$ 轴称为实轴，$y$ 轴称为虚轴，两轴所在的平面被称为复平面或 $z$ 平面。

不难看出，复数与复平面上的点是一一对应的，即每一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 确定复平面上一个坐标为$(x, y)$的点，反之亦然。这样一方面使我们能借助于几何语言和方法研究复变函数的问题，另一方面也为复变函数应用于实际奠定了基础。

在复平面上，复数 $z$ 不止与点$(x, y)$一一对应，它还与从原点 $O$ 指向点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应，因此复数 $z$ 也能用向量$\overrightarrow{OP}$来表示（见图 1.1），即复数的向量表示方式。向量的长度称为复数 $z$ 的模或绝对值，记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.1.1}$$

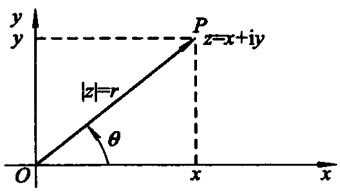



图 1.1

显然，下列各式是成立的：

$$|x| \leqslant |z|,\ |y| \leqslant |z|,\ |z| \leqslant |x| + |y|$$

当 $z\neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示 $z$ 的向量$\overrightarrow{OP}$为终边所确定的角 $\theta$ 称为 $z$ 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}\, z=\theta$。这时，有

$$\tan(\mathrm{Arg}\, z) = \frac{y}{x} \tag{1.1.2}$$

我们知道，对于任何一个不为零的复数来讲，有无穷多个辐角（见图 1.2），即 $\mathrm{Arg}\, z$ 是一个多值函数，并且辐角之间满足：如果 $\theta_1$ 是其中的一个辐角，那么

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta_1 + 2k\pi \qquad (k\ 为任意整数) \tag{1.1.3}$$

上式给出了 $z$ 的全部辐角之间的关系。

在 $z(\neq 0)$ 的辐角中，我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 $\theta_0$ 称为辐角 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值，记作 $\arg z=\theta_0$，即

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \qquad (k\text{ 为任意整数}) \tag{1.1.4}$$

当 $z=0$，即 $|z|=0$ 时，其辐角是不确定的。

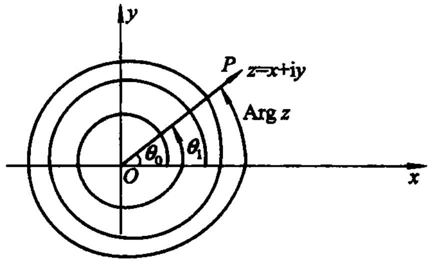



图 1.2

辐角的主值 $\arg z(z\neq 0)$ 可以由 $z$ 在不同的象限由反正切 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系来确定：

$$\arg z(z\neq 0)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & (z\text{ 在第一、四象限})\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi & (z\text{ 在第二象限})\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi & (z\text{ 在第三象限})\\ \dfrac{\pi}{2} & (z\text{ 在正虚轴上})\\ -\dfrac{\pi}{2} & (z\text{ 在负虚轴上})\\ \pi & (z\text{ 在负实轴上})\\ 0 & (z\text{ 在正实轴上})\end{cases} \tag{1.1.5}$$

其中，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$

［例 1］　求复数 $1+\mathrm{i}$ 与 $-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ 的辐角及其辐角主值。

**解**　对于 $z=1+\mathrm{i}$，$z$ 在第一象限，辐角主值 $\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，辐角 $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$（$k$ 为任意整数）。

对于 $-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$，$z$ 在第三象限，辐角主值 $\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}-\pi=\arctan\left(\dfrac{-3}{-3\sqrt{3}}\right)-\pi=-\dfrac{5}{6}\pi$，辐角 $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi=-\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi$（$k$ 为任意整数）。

根据直角坐标与极坐标的转换关系式：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，还可以把 $z$ 表示成下面

的形式：

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\ \sin\theta) \tag{1.1.6}$$

上式称为复数的三角(极坐标)表示式。其中，$r$ 为 $z$ 的模，$\theta$ 为辐角 $\mathrm{Arg}\ z$。

将欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\ \sin\theta$ 代入复数的三角表示式，我们又可以得到：

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.1.7}$$

这种表示形式称为复数的指数表示式。由于辐角的多值性，复数 $z$ 的三角表示式和指数表示式并不是唯一的。复数的各种表示法可以互相转换，以适应在讨论不同问题时的需要。

[**例 2**] 将复数 $z=1+\sin 1+\mathrm{i}\cos 1$ 化为三角表示式与指数表示式。

**解** 先求出 $z$ 的模 $r$ 和辐角主值 $\arg z$：

$$\begin{aligned} r^2 &= (1+\sin 1)^2 + \cos^2 1 = 2(1+\sin 1) \\ &= 2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right] \\ &= 4\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$r = 2\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) > 0$$

因为 $1+\sin 1>0$；$\cos 1>0$，所以 $z$ 在第一象限。

$$\begin{aligned} \arg z &= \arctan\frac{y}{x} = \arctan\left(\frac{\cos 1}{1+\sin 1}\right) \\ &= \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}\right] \\ &= \arctan\left[\frac{2\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)}{2\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)}\right] \\ &= \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

于是 $z$ 的三角表示式为

$$z = 2\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{i}\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$z$ 的指数表示式为

$$z = 2\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)}$$

一般我们把 $z$ 化为三角或指数形式时 $\theta$ 用辐角主值代替即可。

在复变函数中，我们遇到的第一个多值函数是复数 $z$ 的辐角 Arg $z$，以后遇到的一些多值函数基本上与这个多值函数有关。

## 1.2　复数的运算

### 1. 复数的四则运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加、减法定义如下：

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1.2.1}$$

上式表明两个复数相加减是实部与实部相加减，虚部与虚部相加减。显然，当 $z_1$ 与 $z_2$ 为实数(即当 $y_1=y_2=0$)时，上式与实数的运算法则一致。

利用复数 $z$ 的几何表示式比较容易理解复数加法与减法运算的几何意义。

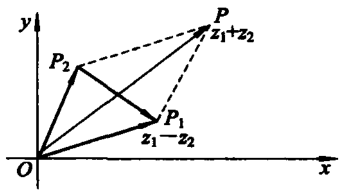



图 1.3

设复数 $z_1$、$z_2$ 分别用对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$表示，则复数的加减法与向量的加减法一致，于是在平面上以$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$为邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OP}$就表示了复数 $z_1+z_2$(见图 1.3)，对角线$\overrightarrow{P_2P_1}$就表示了复数 $z_1-z_2$。

由向量平行法则知，边 $|z_1|$、边 $|z_2|$ 和边 $|z_1-z_2|$ 构成一个三角形，其中 $|z_1-z_2|$ 表示向量$\overrightarrow{P_2P_1}$的长，也就是复平面上点 $z_1$、$z_2$ 之间的距离。事实上，

$$|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

这正是平面上两点之间的距离公式。

边 $|z_1|$、边 $|z_2|$ 和边 $|z_1+z_2|$ 也构成一个三角形。

由几何知识解释知下面两个不等式成立：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\qquad |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的乘法、除法定义如下：

$$\begin{cases} z=z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \\ z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad (z_2\neq 0) \end{cases} \tag{1.2.2}$$

同样可得其复数 $z_1$、$z_2$ 的三角表示式或指数表示式的乘法与除法的表达式。

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，那么

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \\ &=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

同样有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.2.4}$$

假设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，得到乘除的指数表达式为

$$\begin{cases} z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \\ \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \quad (r_2\neq 0) \end{cases} \tag{1.2.5}$$

即不难得到

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.2.6}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2 \\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

由于辐角的多值性，因此其乘积和商的三角表示式和指数表示式并不是唯一的，但其代数表示式是唯一的！

式(1.2.6)和式(1.2.7)表明：

(1) 两个复数乘积的模等于它们各自模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们各自辐角的和；

(2) 两个复数商的模等于它们各自模的商，两个复数商的辐角等于分子与分母辐角的差。

值得注意的是，由于辐角的多值性，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)$、$\mathrm{Arg}\,z_1$、$\mathrm{Arg}\,z_2$、$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$都是多值的，因此式(1.2.7)的两边各是无穷多个数(角度)的数集。等式(1.2.7)意味着，对于等式左边集合的任意一个数值，等式右边集合中必有一个值与之相等，反之亦然。

例如，设 $z_1=-1$，$z_2=\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=-\mathrm{i}$，从而

$$\mathrm{Arg}\,z_1=\pi+2n\pi \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\mathrm{Arg}\,z_2=\frac{\pi}{2}+2m\pi \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\mathrm{Arg}\,z_1z_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

代入等式(1.2.7)中得$\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$。要使上式成立，必须且只需 $k=m+n+1$。只要 $m$ 与 $n$ 各取一确定的值，总可选取 $k$ 的值使 $k=m+n+1$，反之也一样。若取 $m=n=0$，则取 $k=1$；若取 $k=-1$，则可取 $m=0$，$n=-2$ 或 $m=-2$，$n=0$。对于除法等式的辐角公式也应当这样来理解。

复数的运算与向量的运算有相同之处，但也有不同之处：如复数运算与向量运算有相同的加、减法运算和数乘运算；复数运算有乘、除、乘幂和方根，向量则没有；向量运算有数量积、向量积和混合积，而复数则没有。

下面结合复数 $z$ 的三角表示式或指数表示式来理解复数乘法与除法运算的几何意义。当利用向量来表示复数时，可以说表示乘积 $z_1z_2$ 的向量是从表示 $z_1$ 的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}\, z_2$，并伸缩 $r_2=|z_2|$ 倍而得到的，如图 1.4 所示。特别地，当 $r_2=1$ 时，乘法就变成了只是旋转。例如，$iz$ 相当于将 $z$ 逆时针旋转 $90°$，$-z$ 相当于将 $z$ 逆时针转 $180°$。又当 $\arg z_2=0$ 时，如 $5z$ 就变成了仅仅是伸缩，即数乘的运算。

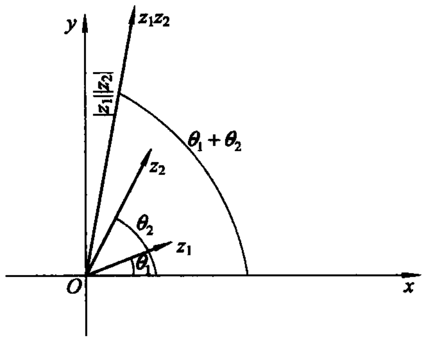



图 1.4

［**例 1**］　设 $z_1$、$z_2$ 为复平面上的任意两点，证明不等式：

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$$

**证明**　这个不等式的几何意义为以 $z_1$，$z_2$，$(z_1-z_2)$ 为边的三角形，一边的长度 $|z_1-z_2|$ 不小于两边的长度之差的绝对值($\big||z_1|-|z_2|\big|$)，证明这个不等式可利用三角不等式 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$。

因为

$$|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$$

所以

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2| \tag{1}$$

因为

$$|z_2|=|z_2-z_1+z_1|\leqslant|z_2-z_1|+|z_1|$$

所以

$$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|=|z_1-z_2| \tag{2}$$

由式(1)和式(2)得到

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$$

［**例 2**］　已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1+2i$，$z_2=3+2i$，求其第三个顶点。

**解**　如图 1.5 所示，将向量 $z_2-z_1$ 绕 $z_1$ 旋转$\frac{\pi}{3}$(或$-\frac{\pi}{3}$)，即得另一个向量，其终点就是所求的第三顶点 $z_3$。

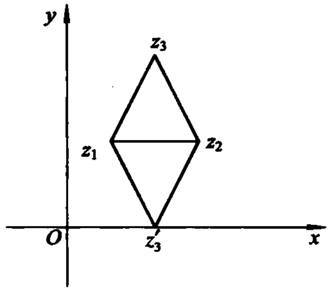



图 1.5

注意到复数 $e^{\frac{\pi}{3}i}$的模为 1，旋转角为$\frac{\pi}{3}$(或$-\frac{\pi}{3}$)，根据复数的乘法可得向量

$$z_3-z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2)=1+\sqrt{3}i$$

所以

$$z_3=z_1+(1+\sqrt{3}i)=2+(2+\sqrt{3})i$$

类似可得

$$z_3'=2+(2-\sqrt{3})i$$

与实数的情形一样，复数的四则运算也满足交换律、结合律和分配律：

$$z_1+z_2=z_2+z_1\text{；}z_1z_2=z_2z_1\qquad\text{(交换律)}$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3\text{；}z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3\qquad\text{(结合律)}$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3\qquad\text{(分配律)}$$

全体复数引进上述四则运算后称为复数域，通常用符号(**C**)表示。可以证明在实数域(**R**)内的一切代数恒等式在复数域内仍成立，如 $(z_1+z_2)(z_1-z_2)=z_1^2-z_2^2$ 但是复数域内的数是没有大小之分的。

**2. 复数的乘幂与方根**

$n$ 个相同非零有穷复数 $z$ 的乘积称为 $z$ 的 $n$ 次幂，记作 $z^n$，即 $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n个}$。

若 $z=re^{i\theta}$，则

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\qquad(n\in\mathbf{N})$$

特别地，当 $r=1$ 时，即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则得棣莫佛(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)\tag{1.2.8}$$

如果我们定义 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$，那么当 $n$ 为负整数时上式也是成立的。作为练习，由读者自己

来证明。

如果复数 $w$ 和 $z$ 满足 $w^n=z$($n$ 为大于 1 的正整数)，则称复数 $w$ 为 $z$ 的 $n$ 次方根，记作$\sqrt[n]{z}$，即 $w=\sqrt[n]{z}$。

下面求 $w=\sqrt[n]{z}$的表达式。

不妨假设 $z\neq 0$ 或$\infty$，否则 $w=0$ 或 $w=\infty$。

令 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\ \sin\theta)$，$w=\rho e^{i\varphi}=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\ \sin\varphi)$，根据棣莫弗公式(1.2.8)有

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\ \sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\ \sin\theta) \tag{1.2.9}$$

于是 $\rho^n=r$，$\cos n\varphi=\cos\theta$，$\sin n\varphi=\sin\theta$，显然，后两式成立的充要条件是

$$n\varphi=\theta+2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

由此有 $\rho=r^{\frac{1}{n}}$，$\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$，其中 $r^{1/n}$是算术根，所以

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\ \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \tag{1.2.10}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 $n$ 个相异的根：

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\ \sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\ \sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\ \sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

当 $k$ 以其他整数值代入时，这些根又重复出现。例如，当 $k=n$ 时，有

$$w_n=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+\mathrm{i}\ \sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\ \sin\frac{\theta}{n}\right)=w_0$$

在几何上，不难看出：$\sqrt[n]{z}$的 $n$ 个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点。

特别地，当 $z=1$ 时，若令

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\ \sin\frac{2\pi}{n}$$

则 1 的 $n$ 次方根分别为 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$。

［**例 3**］　求$\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^6$的值。

**解**　因为

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}}$$

所以　$$\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^6=(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}})^6=8\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{2}\mathrm{i}}=8\left(\cos\frac{5\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{2}\right)=8\mathrm{i}$$

**[例 4]**　解方程 $(1+z)^6=(1-z)^6$。

**解**　显然方程的根 $z\neq1$，所以原方程可写成

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^6=1$$

令 $w=\dfrac{1+z}{1-z}$，则 $w^6=1$。

因为 $1=\cos0+\mathrm{i}\sin0$，所以

$$\sqrt[6]{1}=\cos\frac{2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6}\qquad(k=0,1,2,3,4,5)$$

因而方程 $w^6=1$ 的根分别为 $w=1$，$\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{6}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{6}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{6\pi}{6}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{8\pi}{6}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{10\pi}{6}\mathrm{i}}$，即 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，其中 $\alpha=0$，$\frac{2\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{4\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{6\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{8\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{10\pi}{6}\mathrm{i}$，也即

即

$$w_0=(\cos0+\mathrm{i}\sin0)$$
$$w_1=\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$w_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$w_3=(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$$
$$w_4=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$w_5=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

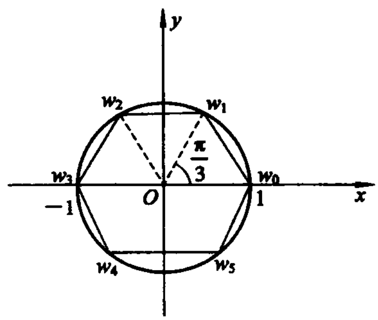


图 1.6

这六个根是内接于中心在原点、半径为 1 的圆的正六边形的六个顶点(见图 1.6)。

由

$$w=\frac{1+z}{1-z}\Rightarrow z=\frac{w-1}{w+1}$$

$$z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}=\frac{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha-1}{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha+1}$$

$$z=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\tan\frac{\alpha}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}}=\mathrm{i}\tan\frac{\alpha}{2}$$



故原方程的根为 $z=\mathrm{i}\tan\frac{\alpha}{2}$，其中 $\alpha=0$，$\frac{2\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{4\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{6\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{8\pi}{6}\mathrm{i}$，$\frac{10\pi}{6}\mathrm{i}$。

**3. 共轭复数**

我们把实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数，与 $z$ 共轭的复数记作 $\bar{z}$。如果 $z=x+\mathrm{i}y$，那么 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$。共轭复数有如下性质：

ⅰ）$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；

ⅱ）$|z|=|\bar{z}|$；$\arg z=-\arg\bar{z}$；$\bar{\bar{z}}=z$；

ⅲ）$z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

ⅳ）$z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$。

Ⅴ）若 $P(z)$ 与 $Q(z)$（$Q(z)\neq0$）为复数 $z$ 的实系数多项式，则

$$\overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)}=\frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})}$$

这些性质由读者作为练习自己去证明。

一对共轭复数 $z$ 与 $\bar{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴 $x$ 对称的（见图 1.7），因而有 $|z|=|\bar{z}|$，如果 $z$ 不在负实轴和原点上，则有 $\arg z=-\arg\bar{z}$。

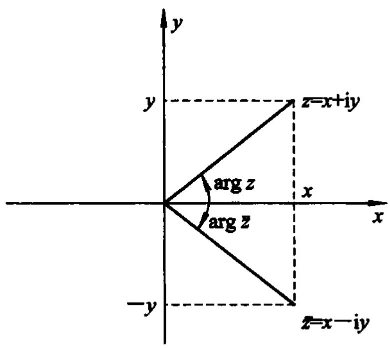



图 1.7

［例 5］ 设 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=-3-4\mathrm{i}$，求 $\frac{z_1}{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$，$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ 和 $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$。

**解** $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2\mathrm{i}}{-3-4\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}{(-3-4\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}=\frac{(-3-8)+(4-6)\mathrm{i}}{25}=-\frac{11}{25}-\frac{2}{25}\mathrm{i}$。

所以