



普通高等教育“十二五”规划教材
哈尔滨工业大学数学教学丛书
复变函数与积分变换系列教材

复变函数与积分变换

(第三版)

哈尔滨工业大学数学系 组编
包革军 邢宇明 盖云英 编



科学出版社

013027361

0174.5-43
03-3

普通高等教育“十二五”规划教材
哈尔滨工业大学数学教学丛书
复变函数与积分变换系列教材

复变函数与积分变换

(第三版)

哈尔滨工业大学数学系 组编
包革军 邢宇明 盖云英 编



科学出版社

北京

0174.5-43
03-3



北航

C1635201

1303750810

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系根据教育部数学基础课程教学指导分委员会最新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)》的精神和原则,结合多年的教学实践和研究而编写的系列教材之一.全书共8章,包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等内容.每章后进行了简明的总结,便于学生深入掌握该章知识,并且精心设计了相应梯度的、适量的习题,在书后附有参考答案.书末附有傅氏变换和拉氏变换简表,便于读者查阅使用.书中标有*号部分供读者选学使用.

本书可作为高等工科院校各专业本科生的复变函数与积分变换课程教材,也可供有关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/哈尔滨工业大学数学系组编;包革军,邢宇明,盖云英编. —3版. —北京:科学出版社,2013

普通高等教育“十二五”规划教材·哈尔滨工业大学数学教学丛书·复变函数与积分变换系列教材

ISBN 978-7-03-036913-0

I. ①复… II. ①哈… ②包… ③邢… ④盖… III. ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 IV. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 042183 号

责任编辑: 张中兴 / 责任校对: 刘亚琦
责任印制: 阎 磊 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2007 年 2 月第 二 版 印张: 22 1/2

2013 年 3 月第 三 版 2013 年 3 月第十九次印刷

字数: 434 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

哈尔滨工业大学数学教学丛书编写委员会

主 任 王 勇

委 员 (按汉语拼音排序)

包革军	董增福	盖云英	高广宏	焦光虹
李道华	尚寿亭	田波平	王希连	吴勃英
谢鸿政	杨凤林	游 宏	张 彪	张池平
张传义	张云飞			

第三版前言

培养基础扎实、勇于创新的人才,是大学教育的一个重要目标.随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出.在工科大学的教育体系中,数学课程是基础课程,在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等多方面起着特别重要的作用.

工科数学中复变函数与积分变换是理工类院校学生继工科数学分析课程之后的又一门数学基础课.通过本课程的学习,学生不仅能学到复变函数与积分变换中的基本理论及工程技术中的常用数学方法,同时还可以巩固和复习工科数学分析的基础知识,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识而奠定必要的数学基础.为此我们按照教育部关于课程改革的精神,结合多年从事同名课程的教学实践,并参照教育部数学基础课程教学指导分委员会最新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)》编写了这本《复变函数与积分变换》教材.本书可供高等工科院校电类及与电类有关的各专业使用,也可供其他专业选用,此外,还可作为工程技术人员自学复变函数与积分变换的参考书.

在本书编写过程中,我们力求突出以下几个特点:

(1) 将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起,既保证了教学质量的提高,又压缩了教学时数.完成本书的全部教学内容需要 46 学时.

(2) 重视对学生能力的培养,注意提高学生的基本素质.对基本概念的介绍尽可能联系实际,突出其物理意义;基本理论的推导深入浅出,循序渐进,适合工科专业的特点;基本方法的阐述富于启发性,使学生能举一反三、融会贯通,以期达到培养学生创新能力的目的.

(3) 为提高本书的趣味性和可读性,力求语言通俗易懂、简洁流畅.在每章中配有较多的例题,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题、解决问题的能力.在每章末精心设计了适量的习题,并在书后附有参考答案.

(4) 为使理论完善,为学生展望新知识留下窗口,我们在编写过程中,适当增加了一些超出大纲的内容,这样为进一步拓宽数学知识指出了方向.这些内容在书中标有“*”号,可供有关专业选用.

在本书编写过程中得到了哈尔滨工业大学数学系及科学出版社的大力支持,使得本书能尽快与读者见面.在此,一并向他们表示感谢!

由于编者的水平有限,书中的缺点和疏漏在所难免,恳请专家、同行和广大读者批评指正。

第三版前言

编者

2012年4月于哈尔滨工业大学

第二版前言

本书第一版自 2001 年 8 月出版以来已经历了 5 个年头. 这期间我系作为国家工科数学教学基地之一, 已于 2004 年 5 月顺利通过教育部专家组的验收. 紧接着就是为迎接教育部对我校本科教学优秀评估进行各项准备工作. 在这种形势下, 我们认为有必要对第一版进行修订. 遵照教育部制定的对本课程教学大纲的基本要求并结合教学实践及对教材改革的研究, 我们对本教材做了如下的修订.

首先对部分超出大纲的内容进行了删减, 如 3.2 节中不加假设的柯西积分定理的证明, 7.7 节相关函数, 7.9 节多维傅氏变换及 8.6 节双边拉普拉斯变换等. 考虑到复变函数与积分变换这两门课程的前后衔接, 在积分变换部分我们做了一些精简. 在复变函数部分, 考虑到学生学习的认识规律, 将 2.3 节解析函数与调和函数移到第 3 章作为 3.4 节的内容, 同时又介绍了柯西积分公式的一个应用——泊松公式. 与此同时, 在各章节补充了新的例题和习题.

在这次修订过程中, 我们广泛征求了学生和任课教师的意见, 对于一些数学术语及符号进行了统一规范. 对书中一些写得不够清楚不太恰当的地方进行了修改. 对于书后习题和答案重新进行了审核, 改正了个别的错误.

本次修订, 第 1,2,3,8 章由盖云英教授执笔, 第 4,5,6,7 章由包革军教授执笔. 陈明浩副教授、邢宇明副教授也参加了部分修订工作. 罗声政教授对本书的修订提出了许多宝贵的意见, 科学出版社、哈尔滨工业大学教务处和数学系对本书的修订提供了热情的帮助, 在此一并表示感谢.

由于编者水平有限, 书中一定还会存在不少缺点和不足, 殷切期望同行及读者批评指教.

编 者

2006 年 8 月于哈尔滨工业大学

第一版前言

培养基础扎实、勇于创新的人才,是大学教育的一个重要目标.随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出.在工科大学的教育体系中,数学课程是基础课程,在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等诸方面起着特殊重要的作用.

工程数学中复变函数与积分变换是理工院校学生继工科数学分析课程之后的又一门数学基础课.通过本课程的学习,不仅能学到复变函数与积分变换中的基本理论及工程技术中的常用数学方法,同时还可以巩固和复习工科数学分析的基础知识,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础.为此我们按照教育部关于课程改革的精神,结合多年从事同名课程的教学实践,并参照原国家教委 1993 年批准印发的工程数学复变函数课程基本要求和工程数学积分变换课程基本要求编写了这本复变函数与积分变换教材.该教材可供高等工科院校的电类及与电类有关的各专业使用,也可供其他专业选用,此外,可作为工程技术人员自学复变函数与积分变换的参考书.

在编写过程中我们力求突出以下几个特点.

1. 将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起,既保证了教学质量的提高,又压缩了教学时数.完成本教材的基本教学内容大约需要 48 学时.
2. 重视对学生能力的培养,注意提高学生的基本素质.对基本概念的介绍尽可能联系实际,突出其物理意义;基本理论的推导深入浅出,循序渐进,适合工科专业的特点;基本方法的阐述富于启发性,使学生能举一反三、融会贯通,以期达到培养学生创新能力的目的.
3. 例题和习题丰富,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题解决问题的能力.习题分为 A、B 两类,对 A 类习题读者应该独立完成,而 B 类习题是为那些学有余力的学生而准备的.
4. 为使理论完善,为学生展望新知识留下窗口,我们在编写过程中,适当增加了些超出大纲的内容,这样为进一步拓宽数学知识指出了方向.这在教材中已打上“*”号,可供有关专业选用.

参加本书编写的人员有益云英(第 1,2,3,8 章),包革军(第 4,5,6,7 章),陈明浩、邢宇明完成了本书的全部习题采集和整理工作.罗声政教授审阅了全书.本书在编

写过程中得到哈尔滨工业大学数学系的领导以及科学出版社的大力支持,以使这本书能尽快与读者见面,在此,一并表示感谢!

由于编者的水平有限,书中的缺点和疏漏在所难免,恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编者

2001年4月于哈尔滨工业大学

本书是《复变函数与积分变换系列教材》中的一本。本套系列教材是以“双语化、分层次、立体化”为特点，融中英文双语、分层次纸质化教材，同步学习辅导，中、英文版教学课件、电子教案以及习题详解于一体的创新型系列化教材，适应普通高等教育不同层次学校学生学习使用。

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系几代教师融合多年来讲授复变函数与积分变换课程的经验 and 体会，结合本学科国内外教学发展趋势编写而成的。在写作过程中，时刻注意到工科学生学习本课程的目的——在于实用，培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力。这套系列教材几经修订再版，将陆续出版以下书籍：

复变函数与积分变换（第三版）

复变函数与积分变换（英文版）（第二版）

复变函数与积分变换简明教程

复变函数与积分变换同步学习辅导（第二版）

复变函数与积分变换 PPT 电子课件（中文版）

复变函数与积分变换 PPT 电子课件（英文版）

复变函数与积分变换电子教案（中文版）

复变函数与积分变换电子教案（英文版）

复变函数与积分变换习题详解

欢迎广大读者选购本套教材！欢迎各位读者多提宝贵意见和建议。

责任编辑邮箱：zhangzhongxing@mail.sciencep.com

电话：010-64034725



目 录

第三版前言

第二版前言

第一版前言

第 1 章 复数与复变函数	1
1.1 复数运算及几何表示	1
1.1.1 复数概念及四则运算	1
1.1.2 复数的几何表示	3
1.1.3 共轭复数	6
1.1.4 乘除、乘方与开方	8
1.1.5 复球面与无穷远点	13
1.2 复平面上的点集	14
1.2.1 基本概念	14
1.2.2 区域和曲线	14
1.3 复变函数	17
1.3.1 定义与几何意义	17
1.3.2 极限与连续性	20
第 1 章小结	23
习题 1	25
第 2 章 解析函数	28
2.1 解析函数的概念	28
2.1.1 复变函数的导数	28
2.1.2 复变函数解析的概念	31
2.2 函数解析的充要条件	32
2.3 解析函数与调和函数	36
2.4 初等函数	43
2.4.1 指数函数	43
2.4.2 三角函数与双曲函数	46
2.4.3 对数函数	49

2.4.4 幂函数	51
2.4.5 反三角函数与反双曲函数	53
*2.5 解析函数的物理意义	54
2.5.1 用复变函数刻画平面向量场	54
2.5.2 平面流速场的复势	55
2.5.3 静电场的复势	57
2.5.4 平面稳定温度场	59
第2章小结	60
习题2	64
第3章 复变函数的积分	67
3.1 复变函数积分的概念	67
3.1.1 积分的定义	67
3.1.2 积分的性质	68
3.1.3 积分的存在条件与计算	69
3.2 柯西积分定理	73
3.2.1 柯西积分定理	73
3.2.2 不定积分	74
3.2.3 复合闭路定理	77
3.3 柯西积分公式	79
3.3.1 柯西积分公式	79
3.3.2 高阶导数公式	84
3.3.3 几个重要的推论	87
第3章小结	90
习题3	93
第4章 级数	96
4.1 复变函数项级数	96
4.1.1 复数序列	96
4.1.2 复数项级数	97
4.1.3 复变函数项级数	101
4.2 幂级数	105
4.2.1 幂级数的概念	105
4.2.2 幂级数的收敛圆与收敛半径	106
4.2.3 幂级数的性质	110

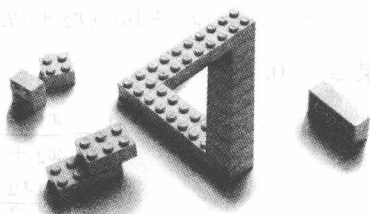
4.2.4 幂级数的运算	112
4.3 泰勒级数	116
4.3.1 泰勒 (Taylor) 展开定理	116
4.3.2 几个初等函数的幂级数展开式	118
4.4 洛朗级数	122
4.4.1 洛朗级数的概念及性质	123
4.4.2 洛朗展开定理	124
4.4.3 求解析函数的洛朗展开式的一些方法	127
第 4 章小结	130
习题 4	134
第 5 章 留数	136
5.1 孤立奇点	136
5.1.1 解析函数的孤立奇点及分类	136
5.1.2 解析函数在有限孤立奇点的性质	138
5.1.3 解析函数的零点与极点的关系	140
5.1.4 解析函数在无穷孤立奇点的性质	142
5.2 留数	144
5.2.1 留数的定义及其计算规则	144
5.2.2 留数的基本定理	148
5.3 留数在定积分计算中的应用	153
5.3.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ 积分	153
5.3.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ 的积分	155
5.3.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx (a > 0)$ 的积分	157
*5.4 辐角原理与儒歇定理	162
5.4.1 对数留数	162
5.4.2 辐角原理	165
5.4.3 儒歇定理	166
第 5 章小结	169
习题 5	173
第 6 章 保形映射	176
6.1 保形映射的概念	176
6.2 分式线性映射	179

6.3 分式线性映射的性质	185
6.4 两个重要的分式线性映射	190
6.4.1 将上半平面 $\text{Im}z > 0$ 映射成单位圆盘 $ w < 1$ 的分式线性映射	190
6.4.2 将单位圆盘 $ z < 1$ 映射为单位圆盘 $ w < 1$ 的分式线性映射	192
6.5 几个初等函数所构成的映射	194
6.5.1 幂函数 $w = z^n (n = 2, 3, \dots)$	194
6.5.2 指数函数 $w = e^z$	199
*6.5.3 儒可夫斯基函数	202
第 6 章小结	205
习题 6	207
第 7 章 傅里叶变换	210
7.1 傅里叶积分与傅里叶积分定理	211
7.2 傅里叶变换与傅里叶逆变换	217
7.3 单位脉冲函数	222
7.3.1 单位脉冲函数的概念	222
7.3.2 δ 函数的性质	226
7.4 广义傅里叶变换	229
7.5 傅里叶变换的性质	232
7.6 卷积	241
7.6.1 卷积的概念	241
7.6.2 卷积的性质	245
7.6.3 卷积在傅氏变换中的应用	249
*7.7 相关函数	251
7.7.1 互相关函数	251
7.7.2 自相关函数	255
*7.8 傅里叶变换的应用	258
7.8.1 非周期函数的频谱	258
7.8.2 傅氏变换在求解方程中的应用举例	261
*7.9 多维傅里叶变换	262
7.9.1 多维傅氏变换的概念	263
7.9.2 多维傅氏变换的性质	265
第 7 章小结	267
习题 7	271

第 8 章 拉普拉斯变换	275
8.1 拉普拉斯变换的概念	275
8.1.1 拉氏变换的定义	275
8.1.2 拉氏变换的存在定理	277
8.2 拉普拉斯变换的性质 (一)	285
8.3 拉普拉斯变换的性质 (二)	294
8.3.1 初值和终值定理	294
8.3.2 卷积定理	297
8.4 拉普拉斯逆变换	301
8.5 拉普拉斯变换在解方程中的应用	307
第 8 章小结	312
习题 8	315
参考文献	319
习题答案	320
附录	332
附录 I 傅氏变换简表	332
附录 II 拉氏变换简表	338

第1章

复数与复变函数



在本章里,我们先介绍复数系统的代数和几何结构,然后引进复变量的函数——复变函数,进而介绍它的极限和连续性.

1.1 复数运算及几何表示

1.1.1 复数概念及四则运算

为了便于以后讨论,在这里回顾有关复数的基本定义及结论.

设 x, y 为两实数, 称形如

$$z = x + iy \quad (\text{或 } x + yi)$$

的数为复数, 这里 i 为虚单位, 具有性质 $i^2 = -1$. x 及 y 分别称为 z 的实部与虚部, 常记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

虚部为零的复数为实数, 简记为 $x + i0 = x$. 因此, 全体实数是复数的一部分. 特别记 $0 + i0 = 0$, 即当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零. 实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数. 如果两复数的实部和虚部分别相等, 则称两复数相等.

设

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

定义两复数 z_1, z_2 的四则运算法则是

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.1.1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (1.1.2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (1.1.3)$$

如果 $z_2 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

从式 (1.1.1)~ 式 (1.1.4) 即知复数经过四则运算得到的仍旧是复数. 又从式 (1.1.1) 和式 (1.1.2) 以及实部与虚部的定义得出

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re}z_1 \pm \operatorname{Re}z_2$$

$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im}z_1 \pm \operatorname{Im}z_2 \quad (1.1.5)$$

例 1.1.1 化简 $i^3, \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$.

解

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} &= \frac{i^2 + (1-i)^2}{(1-i)i} = \frac{-1-2i}{1+i} \\ &= \frac{(-1-2i)(1-i)}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

例 1.1.2 计算

$$(1) \frac{2+3i}{2-3i}, \quad (2) \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{\sqrt{3}i-1}.$$

解 (1)

$$\frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+12i-9}{4+9} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$$

(2)

$$\frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{\sqrt{3}i-1} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{i(\sqrt{3}+i)} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i} + \frac{3i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}i$$

例 1.1.3 已知 $x + yi = (2x - 1) + y^2i$, 求 $z = x + yi$.

解 比较等式两端的实部与虚部, 得

$$x = 2x - 1, \quad x = 1$$

$$y = y^2, \quad y = 0 \quad \text{或} \quad y = 1$$

由此解得

$$z = 1 \quad \text{或} \quad z = 1 + i$$