王根强 著

神经网络稳态解与差分方程周期解

Steady State Solutions of Neural Networks and Periodic Solutions of Difference Equations

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

神经网络稳态解与差分方程周期解

Steady State Solutions of Neural Networks and Periodic Solutions of Difference Equations

王根强 著

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国 · 广州

图书在版编目（CIP）数据

神经网络稳态解与差分方程周期解/王根强著．—广州：暨南大学出版社，2012.9
ISBN 978-7-5668-0255-2

Ⅰ.①神…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①人工神经网络—计算—研究②差分方程—周期解—研究
Ⅳ.①TP183　②O241.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 155364 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司

开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：13.75
字　数：326 千
版　次：2012 年 9 月第 1 版
印　次：2012 年 9 月第 1 次

定　价：33.00 元

本书由广东技术师范学院资助出版

序　言

众所周知，微分方程能较为精确地描述事物的运动规律，因此它一直是人们研究实际问题的重要数学模型. 早在微分方程发展的古典时期，由于力学、物理学、几何学等的需要，数学家曾把注意力主要集中在求微分方程的通解上，后来又发展了解的性态研究. 差分方程被看作是微分方程的离散化形式，在电子计算机科学高度发展的今天，差分方程为微分方程的实际应用提供了有力的工具. 但由于差分方程是离散时间的模型，故若离散化的角度不同，同一个微分方程可能离散化成不同的差分方程. 原来微分方程所具有的解的形态，相应的差分方程的解也不一定能够保持. 再者，差分方程属于离散数学的范畴，而微分方程属于连续数学的范畴，离散数学的基本原则却不能完全被连续数学所代替，它有着自己的理论基础. 因此对差分方程的解的定性和定量的研究是很有必要的.

近十多年来，差分方程的周期及边值问题的研究引起了国内外人们的关注，出现了许多很好的成果. 特别是我国相当部分的年轻学者参与了这一方面的研究，他们将原来研究微分方程的一些经典分析工具，拓展性地用到差分方程的周期及边值问题的研究中去，取得了令人瞩目的成果，这里不一一列举. 但是，据我了解，目前国内还没有出版以差分方程的周期及边值问题为主线的专著. 人工神经网络作为仿真模型是涉及神经科学、思维科学、人工智能、应用数学和计算机科学等多个领域的交叉学科，它的方法和理论已被人们广泛应用到自然科学、工程技术和管理等各个领域. 大部分神经网络模型是以微分系统或差分系统的形式出现的. 对模型定性研究时必须先求出稳态解（即与时间无关的解）. 但由于神经网络模型中的控制函数往往是神经元的状态值（先验的）非线性函数，有些甚至是不连续的，所以讨论神经网络稳态解往往是一件十分烦琐的事情. 现阶段国内外，虽然发表了一些关于神经网络模型稳态解的求法或存在性研究的一些成果，但尚未形成理论体系.

广东技术师范学院年轻学者王根强教授，以他近十年来从事数位神经网络的稳态解问题与差分方程的周期及边值问题两方面的研究，和他的合作者们在国内和国际有关学术刊物上发表的一些文章为主要素材，将以微分方程或差分方程为模型的神经网络的稳态解的问题与差分方程的周期及边值问题的解的问题，从理论角度将它们归结到相关的非线性代数系统的解的问题，并将素材加以系统化，以神经网络的稳态解系统（非线性代数系统为背景）为主线，写成此书. 其内容主要包括四个方面：一、介绍了某些可精确求稳态解的（特别是带有不连续控制函数）神经网络，利用线性代数、组合分析排除和差分递推求差分方程周期解等方法，给出了这些神经网络模型稳态解的明确表达式；二、通过研究差分方程的非平凡周期解的分岔问题，说明非线性代数系统随着未知量的个数的变化和某些系数的变化，非平凡解的存在性和非平凡解的特征会引起变化，从而导致相关的神经网络模型非平凡稳态解也出现分岔现象，这对于神经网络模型的设计和解的定性研究有一定的意义；三、介绍利用迭合度理论，不动点理论和临界点理论来分别研究与神经网络稳态解的

问题和差分方程的周期及边值问题相关的两类非线性代数系统，建立解的存在性定理，并从这些存在性定理导出神经网络模型的稳态解和差分方程的周期及边值问题分别应有的结果；四、简要介绍利用偏差分方程作为工具，研究神经网络模型的“双周期解”和“神经网络模型行波解”的一些结论.

本书的写作思想和内容有显著的特色. 我推荐本书以专著的形式正式出版，并以此为本专著的序言. 相信它的出版对相关专业的高年级本科生和研究生的学习研究以及对从事相关专业的科技人员的参考有一定的帮助.

燕居让
2012 年 5 月 1 日
于山西大学

前　言

离散数学与连续数学是描述、刻画和表达现实世界物质运动的两种有力的工具. 从数学的角度来说，连续与离散的某些结果是可以互通的. 但是，离散数学的基本原则却不能完全被连续数学所代替，它有着自己的理论基础.

经典的差分方程作为数列的递推式子，在计算数学中起着一定的作用. 在电子计算机科学高度发展的今天，离散数学自然是计算机、信息系统、工程控制和社会经济等学科的理论基础之一，而差分方程（描述离散时间的系统）是离散数学中的一类重要模型. 差分方程可以看成微分方程的离散化. 我们不能仅仅局限于对差分方程的迭代计算，而很有必要对差分方程的解的性态进行研究. 对差分方程的周期及边值问题的研究也凸显重要.

人工神经网络作为仿真模型是涉及神经科学、思维科学、人工智能、应用数学和计算机科学等多个领域的交叉学科. 人工神经网络特有的非线性适应性信息处理能力，克服了传统人工智能方法对于直觉，如模式、语音识别、非结构化信息处理方面的缺陷，使之在神经专家系统、模式识别、智能控制、组合优化、预测等领域得到成功应用. 人工神经网络与其他传统方法相结合，将推动人工智能和信息处理技术不断地发展. 现在神经网络理论已广泛应用到自然科学、工程技术和管理等各个领域. 大部分神经网络模型是以微分系统或差分系统的形式出现的. 对模型定性研究必须先求出稳态解（即与时间无关的解）. 但由于神经网络模型中的控制函数往往是神经元的状态值（先验的）非线性函数，有些甚至是不连续的，所以讨论神经网络稳态解往往是一件十分烦琐的事情.

大部分神经网络的稳态解问题与差分方程的周期及边值问题有着密切的内在联系，抽象出诸问题的共性，将它们放在一起进行研究，可获事半功倍的效果. 通常研究差分方程周期及边值问题的方法，可以用来讨论神经网络的稳态解的问题. 特别是神经网络中，有些带有各种各样的以神经元的状态值（先验的）为变量的非线性不连续控制函数，这给差分方程的周期及边值问题带来新的且富有挑战性的任务. 本专著正是基于此目的而作.

本专著所用的素材是笔者近十年来从事数位神经网络稳态解的问题与差分方程的周期及边值问题两方面的研究，和笔者的合作者们在有关杂志上发表的一些文章（包括笔者一些尚未发表的近作）. 为了完整性，也引用了其他学者几篇文章中的好的结论.

由于神经网络稳态解的问题与差分方程的周期及边值问题在理论上可以统一到非线性代数系统解的问题上来，故本专著的写作主要以神经网络稳态解的问题为主要线索来展开. 本专著的内容共分为七章：在第一章中，为了方便部分初学者，我们给出了有关差分、周期数列、矩阵、神经网络稳态解和差分周期及边值问题等有关概念和性质，并指出神经网络稳态解、差分周期及边值问题和非线性代数系统之间的关系；第二章主要介绍某些可精确求稳态解的神经网络，利用线性代数、组合分析排除和差分递推等方法给出了这些神经网络模型稳态解的明确表达式；在第三章中，为了给设计神经网络人员提供参考，我们主要介绍两类神经网络稳态解的分岔问题，说明神经元数目的调整和模型参数的微小

变化，有时会影响到稳态解的特性和存在性；本专著的第四章到第六章，主要介绍利用迭合度理论，不动点理论和临界点理论来分别研究与神经网络稳态解的问题和差分方程的周期及边值问题相关的两类非线性代数系统，建立解的存在性定理，并举例说明它们的应用；在第七章中，主要简介数位神经网络周期行波解的概念，并给出一个数位神经网络 6 - 周期行波解的明确表达式.

本专著的写作得到了广东省自然基金项目（批准号：9151008002000012）的资助，本书的出版得到广东技术师范学院专著出版基金的资助.

在本专著的初稿完成后，梁海华老师（博士）、已毕业的研究生梁超平和温坤文为本书的校对修改和打印提供了不少的帮助. 黑龙江大学任洪善教授在本专著的初稿完成后，详细审查了初稿并提出很多宝贵的修改意见. 我对他们的帮助一一表示感谢.

在这里，我要感谢郑穗生教授，是他引领我进入差分方程的研究领域. 本书所采用的素材，相当一部分是来自和他合作并以我为第一作者的已发表的论文. 我对郑穗生教授的指导和帮助，表示由衷的敬意！

我特别要提到的是燕居让教授，自 1985 年以来，他对我一直热忱地进行引领、指导和帮助. 在本专著的初稿完成后，燕教授还花时间详细审查了初稿并提出很多宝贵的修改意见. 在本专著出版之际，他欣然挥毫，特为此书作序，是对我的莫大鼓舞和鞭策，我发自肺腑地向燕教授表示万分的感谢和敬意！

王根强

2012 年 5 月

于广州华南师范大学高校教师村

目录

第一章 预备知识

本章将介绍一些相关的基本概念和定理，为以后各章做准备．第一节主要介绍差分与求和的一些性质；第二节介绍周期数列的概念和性质；第三节介绍相关的矩阵知识；第四节论述神经网络稳态解与差分周期及边值问题和非线性代数系统的关系．

先引进几个记号：分别以 $\mathbf{C}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{Z}$ 表示复数集、实数集和整数集；设 $G\subseteq\mathbf{R}$，用记号 $\mathbf{Z}G$ 表示集合 $\mathbf{Z}\cap G$. 于是，自然数集 $\mathbf{N}=\mathbf{Z}[0,+\infty)$，而正整数集 $\mathbf{N}_+=\mathbf{Z}(0,+\infty)$.

§ 1.1 差分与求和的性质

这一节简单介绍数列的一些差分与求和的性质．读者如需要更进一步了解相关内容，可参见差分方程的专著，如本章参考文献 2 和 26 等．

定义 1.1 给定数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}G}$，若 n，$n+1\in\mathbf{Z}G$，则

$$\Delta x_n=x_{n+1}-x_n$$

称为数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}G}$ 在 n 的向前差分，Δ 称为向前差分算子；若 $n-1$，$n\in\mathbf{Z}G$，则

$$\nabla x_n=x_n-x_{n-1}$$

称为数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}G}$ 在 n 的向后差分，∇ 称为向后差分算子．

显然，若 n，$n+1\in\mathbf{Z}G$，则 $\Delta x_n=\nabla x_{n+1}$.

定义 1.2 给定数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}G}$. 若 n，$n+1\in\mathbf{Z}G$，则

$$Ex_n=x_{n+1}$$

称为数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}G}$ 在 n 的位移，E 称为位移算子．

用 I 表示恒等算子，即对于数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}G}$，有

$$Ix_n=x_n,\quad n\in\mathbf{Z}G.$$

易知差分算子 Δ 与位移算子 E 都是线性算子且它们具有如下关系：

(1) $\Delta=E-I$;

(2) $E\Delta=\Delta E$.

通常，单下标数列的差分也叫做常差分，常差分知识是学习偏差分的基础．下面给出偏差分的定义：

定义 1.3 设集合 D 是 $\mathbf{Z}^2$ 的子集，给定双下标数列 $x=\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in D}$，若 (i,j)，$(i+1,j)\in D$，则

$$\Delta_1 x_{i,j} = x_{i+1,j} - x_{i,j}$$
叫做数列 x 在点$(i,\ j)$ 处对第一个下标的一阶偏差分；若$(i,\ j)$，$(i,\ j+1)\ \in D$，则
$$\Delta_2 x_{i,j} = x_{i,j+1} - x_{i,j}$$
叫做数列 x 在点$(i,\ j)$ 处对第二个下标的一阶偏差分.

类似地，可定义高阶偏差分的概念．如数列 $x=\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in D}$在点$(i,\ j)$ 处对第一个下标的 $n(\geqslant 2)$ 阶偏差分为
$$\Delta_1^n x_{i,j} = \Delta_1(\Delta_1^{n-1} x_{i,j})\ ;$$
对第二个下标的 n 阶偏差分为
$$\Delta_2^n x_{i,j} = \Delta_2(\Delta_2^{n-1} x_{i,j})\ .$$
先对第一个下标后对第二个下标的二阶偏差分为
$$\Delta_2(\Delta_1 x_{i,j})\ ;$$
而先对第二个下标后对第一个下标的二阶偏差分为
$$\Delta_1(\Delta_2 x_{i,j})\ .$$
可以证明：若$(i,\ j)$，$(i+1,\ j)$，$(i,\ j+1)$，$(i+1,\ j+1)\ \in D$,则
$$\Delta_2(\Delta_1 x_{i,j})\ =\ \Delta_1(\Delta_2 x_{i,j}),$$
即二阶混合偏差分与顺序无关.

类似地，高阶混合偏差分也与顺序无关.

我们通常用符号 $\Delta_{\lambda,u}^{\lambda+u} x_{i,j}$(这里 λ 与 u 为正整数）表示数列 $x=\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in D}$在（$i,\ j$）处对第一个下标求 λ 次，而对第二个下标求 u 次的 $\lambda+u$ 阶偏差分.

类似地，对于多下标数列也可定义偏差分的概念.

数列$\{x_n\}$的向前(向后)差分有一些性质与一元函数右（左）导数的性质既类似又有区别.

定理 1.1 设数列$\{x_n\}_{n\in \mathbf{Z}G}$，$\{y_n\}_{n\in \mathbf{Z}G}$，若 n，$n+1\in \mathbf{Z}G$，则
$$\Delta(x_n y_n) = y_{n+1}\Delta x_n + x_n \Delta y_n.$$
进而，当 $y_n y_{n+1}\neq 0$ 时，有
$$\Delta\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{y_n \Delta x_n - x_n \Delta y_n}{y_n y_{n+1}}.$$

定理 1.2（Leibniz 定理） 设数列$\{x_n\}_{n\in D}$，$\{y_n\}_{n\in D}$. 若$\{n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots,\ n+k\}\subseteq D$，则
$$\Delta^k(x_n y_n) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (\Delta^{k-i} x_n)(E^{k-i}\Delta^i y_n).$$
定理 1.1 和定理 1.2 可直接由差分的定义推出.

对于函数有微分中值定理，而对于数列的差分没有类似的中值定理，但有差分中值不等式.

定理 1.3（Rolle 中值不等式） 设数列 $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$，这里 $\Gamma=\mathbf{Z}[n,n+k]$，$k\geqslant 2$ 且 $k\in \mathbf{Z}$，若 $x_n=x_{n+k}$，则存在 $\zeta\in\ \mathbf{Z}(n,n+k)$，使得
$$(\Delta x_\zeta)(\nabla x_\zeta)\ \leqslant 0.$$
证明： 因数列 $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$在集合 Γ 必有最大值与最小值，又 $x_n=x_{n+k}$，故数列 $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$在集合 Γ 的最大值与最小值必有一个可在 $\mathbf{Z}(n,n+k)$ 中的点取得．不妨设最大值在点

$\zeta\in\mathbf{Z}(n,\ n+k)$取得，则有$\Delta x_\zeta\leqslant 0$，$\nabla x_\zeta\geqslant 0$. 证毕.

定理 1.4（Lagrange 中值不等式） 设数列$\{x_i\}_{i\in\Gamma}$，这里$\Gamma=\mathbf{Z}[n,n+k]$，$k\geqslant 2$且$k\in\mathbf{Z}$，则存在$\zeta\in\mathbf{Z}(n,\ n+k)$，使得

$$\min\{\nabla x_\zeta,\ \Delta x_\zeta\}\leqslant\frac{1}{k}\ (x_{n+k}-x_n)\ \leqslant\max\{\nabla x_\zeta,\ \Delta x_\zeta\}.$$

证明：设

$$\frac{1}{k}\ (x_{n+k}-x_n)\ =\lambda,$$

则有$x_{n+k}-\lambda(n+k)\ =x_n-n\lambda$. 令

$$y_i=x_i-i\lambda,\ i\in\Gamma,$$

可知$y_n=y_{n+k}$. 由定理 1.3，知存在一个$\zeta\in\mathbf{Z}(n,\ n+k)$，使得

$$(\Delta y_\zeta)(\nabla y_\zeta)\leqslant 0,$$

即

$$(\Delta x_\zeta-\lambda)(\nabla x_\zeta-\lambda)\ \leqslant 0.$$

这推出结论成立. 证毕.

定理 1.5（Cauchy 中值不等式） 设数列$\{x_i\}_{i\in\Gamma}$和$\{y_i\}_{i\in\Gamma}$，这里$\Gamma=\mathbf{Z}[n,n+k]$ $k\geqslant 2$且$k\in\mathbf{Z}$. 若在$\mathbf{Z}[n,\ n+k)$上，Δy_t都非零且不变号，则存在一点$\zeta\in\ \mathbf{Z}(n,n+k)$，使得

$$\min\left\{\frac{\Delta x_\zeta}{\Delta y_\zeta},\ \frac{\nabla x_\zeta}{\nabla y_\zeta}\right\}\leqslant\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}\leqslant\max\left\{\frac{\Delta x_\zeta}{\Delta y_\zeta},\ \frac{\nabla x_\zeta}{\nabla y_\zeta}\right\}.$$

定理 1.5 的证法与定理 1.4 的证法类似.

数列的差分求和性质有一些与函数的定积分的性质相类似. 例如

定理 1.6 设数列$\{x_i\}_{i\in\Gamma}$，这里$\Gamma=\mathbf{Z}[n,n+k]$（k为正整数），则

$$\sum_{i=0}^{k-1}\Delta x_{n+i}=x_{n+k}-x_n=x_{n+i}\big|_0^k.$$

定理 1.6 与函数定积分的 Newton - Leibniz 法则相仿.

定理 1.7（Abel 分部求和公式） 设a，$b\in\mathbf{Z}$且$b>a$，u和v都是定义在$\mathbf{Z}[a,b+1]$上的实函数,则有如下的分部求和公式:

$$\sum_{i=a}^{b}u(i+1)\Delta v(i)\ =u(i)v(i)\big|_a^{b+1}-\sum_{i=a}^{b}v(i)\Delta u\ (i).$$

定理 1.7 的作用与函数定积分的分部积分公式相仿.

下面简单介绍二阶常系数线性差分方程的通解的求法.

设二阶常系数线性齐次差分方程

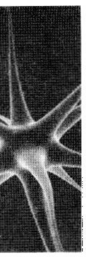
$$a_0y_{n+2}+a_1y_{n+1}+a_2y_n=0,\ n\in\mathbf{Z},\tag{1.1}$$

其中$a_i(i=0,1,2)$都是实常数且$a_0\neq 0$.

与二阶常系数线性齐次微分方程类似，(1.1) 的通解可以由两个线性无关的特解的线性组合来给出，即 (1.1) 的通解可表示为两项之和. 它可以用以下方法得到:

设 (1.1) 的特征方程

$$a_0r^2+a_1r+a_2=0\tag{1.2}$$



的两个根已求出.

若（1.2）有两个不同实根 r_1，r_2，则（1.1）的通解的表达式为

$$y_n = c_1 r_1{}^n + c_2 r_2{}^n,\quad n \in \mathbf{Z}.$$

若（1.2）有重实根 $r_1 = r_2 = r$，则（1.1）的通解的表达式为

$$y_n = (c_1 + c_2 n)\ r^n,\quad n \in \mathbf{Z}.$$

若（1.2）有一对共轭复根 r_1，r_2，即 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，则（1.1）的通解的表达式为

$$y_n = r^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta),\quad n \in \mathbf{Z}.$$

其中 $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$，$\tan\theta = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

对于一般的高阶常系数线性齐次差分方程的通解问题也有类似的结果，尚不赘述.

再考虑与（1.1）相应的非齐次差分方程

$$a_0 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = b_n,\quad n \in \mathbf{Z}, \tag{1.3}$$

其中数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是给定的实数列，(1.3) 的通解是它本身的一个特解再加上（1.1）的通解.

这里只给出 b_n 分别由下面表中的五种情况相应（1.3）的特解的形式，其中待定常数可通过将特解的形式代入（1.3）来确定.

b_n	特解的形式
a^n	ca^n，c 待定
$\sin an$ 或 $\cos an$	$c\sin an + d\cos an, c$，d 待定
n^k	$c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \cdots + c_{k+1} n^k$，$c_i (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1)$ 待定
$n^k a^n$	$a^n (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \cdots + c_{k+1} n^k)$，$c_i (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1)$ 待定
$\lambda^n \sin an$ 或 $\lambda^n \cos an$	$\lambda^n (c\sin an + d\cos an)$，$c$，$d$ 待定

关于高维的线性差分系统的解的性质，将在后面有关章节用到时才作具体的介绍和推导. 这里暂不介绍.

§1.2　周期数列的概念和性质

定义 1.4　给定向量 $\boldsymbol{u} = (u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_\omega)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^\omega$，若所有 $u_k \neq 0$，则称向量 $\boldsymbol{u}$ 是弃零的；若所有 $u_k > 0(u_k \geqslant 0)$，则称向量 $\boldsymbol{u}$ 是正（非负）的，并记为 $\boldsymbol{u} > 0(\boldsymbol{u} \geqslant 0)$；若所有 $u_k < 0(u_k \leqslant 0)$，则称向量 $\boldsymbol{u}$ 是负（非正）的，并记为 $\boldsymbol{u} < 0(\boldsymbol{u} \leqslant 0)$.

注： 对向量 $\boldsymbol{v}$（或矩阵 $\boldsymbol{A}$）本文常用符号 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）表示向量 $\boldsymbol{v}$（或矩阵 $\boldsymbol{A}$）的转置.

定义 1.5　设向量 $\boldsymbol{u} = (u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_\omega)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^\omega$ 是弃零的，若对任意 $k \in \mathbf{Z}[1,\ \omega-1]$ 使得 $u_k u_{k+1} < 0$，则称矩阵 $\boldsymbol{u}$ 是全振动；若向量 $\boldsymbol{u}$ 不是全振动，但有限数列 u_1，u_2，$\cdots$，

u_ω 按从左到右的次序符号变化 k 次，则称向量 $\boldsymbol{u}$ 是 k – 偏振动．例如在 $\mathbf{R}^4$ 中，$(++--)^{\mathrm{T}}$，$(--++)^{\mathrm{T}}$，$(+++-)^{\mathrm{T}}$，$(---+)^{\mathrm{T}}$，$(+---)^{\mathrm{T}}$，$(-+++)^{\mathrm{T}}$，都是 1 – 偏振动的；而 $(+--+)^{\mathrm{T}}$，$(--+-)^{\mathrm{T}}$，$(++-+)^{\mathrm{T}}$，$(-++-)^{\mathrm{T}}$，$(+-++)^{\mathrm{T}}$，$(-+--)^{\mathrm{T}}$，都是 2 – 偏振动的．

定义 1.6 给定实数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\Gamma}$（这里 Γ 表示 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{N}$），若对任意 $n_0\in\Gamma$，存在 $n_1\geqslant n_0$ 使得 $u_{n_1}u_{n_1+1}\leqslant 0$，则称数列 $\boldsymbol{u}$ 是振动的；若所有 $u_k\neq 0$，则称数列 $\boldsymbol{u}$ 是弃零的；若所有 $u_k>0(u_k\geqslant 0)$，则称数列 $\boldsymbol{u}$ 是正（非负）的，并记为 $\boldsymbol{u}>0(\boldsymbol{u}\geqslant 0)$；若所有 $u_k<0(u_k\leqslant 0)$，则称数列 $\boldsymbol{u}$ 是负（非正）的，并记为 $\boldsymbol{u}<0(\boldsymbol{u}\leqslant 0)$；若对所有 $k\in\Gamma$ 都有 $u_k u_{k+1}<0$，则称数列 $\boldsymbol{u}$ 是全振动的．

定义 1.7 给定（实或复）数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\Gamma}$（这里集合 Γ 表示 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{N}$），若存在某个正整数 η，使得对任意的 $k\in\Gamma$ 都有 $u_{k+\eta}=u_k$，则称 η 是数列 $\boldsymbol{u}$ 的一个周期或数列 $\boldsymbol{u}$ 是 η – 周期的；如果某个正整数 ω，它是数列 u 的所有周期中的最小者，则称 ω 是数列 $\boldsymbol{u}$ 的最小正周期，并称数列 u 具最小正周期 ω；若数列 u 具最小正周期 ω，则对任意 $\alpha\in\Gamma$，有限数列

$$\boldsymbol{u}(\alpha,\omega)=(u_\alpha,\ u_{\alpha+1},\ \cdots,\ u_{\alpha+\omega-1})$$

称为数列 $\boldsymbol{u}$ 的一个循环（或一个圈）．特别是当 ω 略去不会引起混淆时，可将 $\boldsymbol{u}(\alpha,\omega)$ 简记为数列 $\boldsymbol{u}^{[\alpha]}$.

注： 我们知道，一个周期函数不一定有最小正周期，但任一周期数列 $u=\{u_k\}_{k\in\Gamma}$ 都具最小正周期．

定义 1.8 给定一个有限（实或复）数列

$$\bar{\boldsymbol{u}}=\left(\bar{u}_1,\ \bar{u}_1,\ \cdots,\ \bar{u}_\omega\right)\text{或}\ \bar{\boldsymbol{u}}=\left(\bar{u}_1,\ \bar{u}_1,\ \cdots,\ \bar{u}_\omega\right)^{\mathrm{T}},$$

而数列 $u=\{u_k\}_{k\in\Gamma}$（这里 Γ 表示 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{N}$），使得对任意 $k\in\Gamma$，都有

$$u_k=\bar{u}_{k\ \mathrm{mod}\omega},$$

则称数列 $\boldsymbol{u}$ 是 $\bar{\boldsymbol{u}}$（在 Γ 上）的 ω – 周期延拓；若数列 $\boldsymbol{u}$ 是 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的 ω – 周期延拓，u_k 是 $\boldsymbol{u}$ 中的项，$\bar{u}_s$ 是 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 中的项且 $k\equiv s\ \mathrm{mod}\omega$，则称 $\bar{u}_s$ 是 u_k 关于数列 $\boldsymbol{u}$ 的 ω – 周期回归或简称 $\bar{u}_s$ 是 u_k 的 ω – 周期回归．

下面介绍 Wang 和 Cheng 在本章参考文献 25 中给出的有关周期数列的最佳不等式，它在寻找差分方程周期解的先验界时是很有用的．

设 l_ω（这里正整数 $\omega\geqslant 2$）是所有形如 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\Gamma}$（这里 Γ 表示 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{N}$）的 ω – 周期实数列构成的集．

定理 1.8 对任意数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\Gamma}\in l_\omega$，有

$$\max_{0\leqslant s,i\leqslant\omega-1}|u_s-u_i|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta u_k|,$$

其中 $\dfrac{1}{2}$ 是最佳常数．

证明： 设数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\Gamma}\in l_\omega$ 和任意 s，$i\in\mathbf{Z}[0,\omega-1]$．不失一般性，可以假设 $s\in\mathbf{Z}[i+1,\ i+\omega-1]$，则

$$u_s=u_i+\sum_{k=i}^{s-1}\Delta u_k \tag{1.4}$$

第一章 预备知识

和

$$u_i=u_{i+\omega}=u_s+\sum_{k=s}^{i+\omega-1}\Delta u_k. \tag{1.5}$$

由（1.4）和（1.5），得

$$u_s=u_i+\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=i}^{s-1}\Delta u_k-\sum_{k=s}^{i+\omega-1}\Delta u_k\right\}.$$

因此，对任意 $s\in\mathbf{Z}[i+1,i+\omega-1]$ 有

$$|u_s-u_i|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=i}^{i+\omega-1}|\Delta u_k|=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta u_k|.$$

所以定理的结论式成立.

再证明：若常数 $\beta<\frac{1}{2}$，则存在数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\boldsymbol{\Gamma}}\in l_\omega$，使得

$$\max_{0\leqslant s,i\leqslant\omega-1}|u_s-u_i|>\beta\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta u_k|. \tag{1.6}$$

事实上，令

$$u_k=\begin{cases}k, & k\in\mathbf{Z}[0,\ \omega-1],\\ u_{k\bmod\omega}, & k\in\boldsymbol{\Gamma}\setminus\mathbf{Z}[0,\ \omega-1],\end{cases} \tag{1.7}$$

则 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\Gamma}\in l_\omega$ 且

$$\max_{0\leqslant s,i\leqslant\omega-1}|u_s-u_i|=\omega-1. \tag{1.8}$$

而

$$\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta u_k|=2(\omega-1). \tag{1.9}$$

由（1.8）和（1.9），可得

$$\beta\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta u_k|=2\beta\ (\omega-1)\ <\max_{0\leqslant s,i\leqslant\omega-1}|u_s-u_i|,$$

即存在如（1.7）所定义的数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\boldsymbol{\Gamma}}\in l_\omega$，使得（1.6）成立. 证得定理的结论式右边的 $\frac{1}{2}$ 是最佳常数. 证毕.

推论 1.1 对任意数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\boldsymbol{\Gamma}}\in l_\omega$，有

$$\max_{0\leqslant s,i\leqslant\omega-1}|\Delta u_k|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta^2u_k|.$$

证明： 由于数列 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\boldsymbol{\Gamma}}\in l_\omega$，所以 $\{\Delta u_k\}_{k\in\boldsymbol{\Gamma}}\in l_\omega$. 故由定理 1.8，知对任意 s，$i\in\mathbf{Z}[0,\ \omega-1]$，

$$\Delta u_s\leqslant\Delta u_i+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta^2u_k|. \tag{1.10}$$

令 $u_a=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant\omega-1}u_k$，$u_b=\min\limits_{0\leqslant k\leqslant\omega-1}u_k$，$|\Delta u_c|=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant\omega-1}|\Delta u_k|$，$a$，$b$，$c\in\mathbf{Z}[0,\omega-1]$，则 $\Delta u_a\leqslant0$ 和 $\Delta u_b\geqslant0$. 若 $\Delta u_c=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant\omega-1}|\Delta u_k|$，则由（1.10），有

$$\max_{0\leqslant k\leqslant\omega-1}|\Delta u_k|=\Delta u_c\leqslant\Delta u_a+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta^2u_k|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta^2u_k|. \tag{1.11}$$

若 $-\Delta u_c=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant\omega-1}|\Delta u_k|$，则由（1.10），有

$$\max_{0\leqslant k\leqslant \omega-1}|\Delta u_k| = -\Delta u_c \leqslant -\Delta u_b + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta^2 u_k| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\omega-1}|\Delta^2 u_k|. \tag{1.12}$$

联合（1.11）和（1.12），知结论成立．证毕．

§1.3 一些有用的矩阵知识

首先引进矩阵范数和矩阵测度的概念（参见本章参考文献 1 和 23）：

设 $|\cdot|_p$ 是线性空间 $\mathbf{C}^n$ 中通常引入的标准 p 范数，对每个 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义

$$\|\boldsymbol{A}\|_p = \sup_{|x|_p\neq 0}\frac{|\boldsymbol{A}x|_p}{|x|_p}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应于向量范数 $|\cdot|_p$ 的范数．相应于 $\|\cdot\|_p$ 的矩阵测度是函数 μ_p：$\mathbf{C}^{n\times n}\to\mathbf{R}$，它使得

$$\mu_p(\boldsymbol{A}) = \lim_{k\to+\infty} k\left(\left\|I+\frac{1}{k}\boldsymbol{A}\right\|_p - 1\right). \tag{1.13}$$

矩阵测度 μ_p 有如下性质：

（i）对每个 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，（1.13）右边的极限存在；

（ii）对 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$-\|\boldsymbol{A}\|_p\leqslant -\mu_p(-\boldsymbol{A})\leqslant \mu_p(\boldsymbol{A})\leqslant \|\boldsymbol{A}\|_p$；

（iii）对 $\alpha\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\mu_p(\alpha\boldsymbol{A})=\alpha\mu_p(\boldsymbol{A})$；

（iv）对 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，

$\max\{\mu_p(\boldsymbol{A})-\mu_p(-\boldsymbol{B}), -\mu_p(-\boldsymbol{A})+\mu_p(\boldsymbol{B})\}\leqslant \mu_p(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant \mu_p(\boldsymbol{A})+\mu_p(\boldsymbol{B})$；

（v）μ_p 是凸的，即 $\alpha\in[0,1]$ 和 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，

$$\mu_p(\alpha\boldsymbol{A}+(1-\alpha)\boldsymbol{B})\leqslant \alpha\mu_p(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)\mu_p(\boldsymbol{B});$$

（vi）$-\mu_p(-\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{Re}\lambda\leqslant \mu_p(\boldsymbol{A})$，这里 λ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．

例 1.1 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则

$|\boldsymbol{x}|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_j|a_{ij}|$，$\mu_\infty(\boldsymbol{A}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}+\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$；

$|\boldsymbol{x}|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_i|a_{ij}|$，$\mu_1(\boldsymbol{A}) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{a_{jj}+\sum_{i\neq j}|a_{ij}|\}$；

$|\boldsymbol{x}|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$，$\|\boldsymbol{A}\|_2 = (\rho(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}))^{\frac{1}{2}}$，$\mu_2(\boldsymbol{A}) = \lambda_{\max}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right\}$.

这里矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置，ρ 表示谱半径．

关注实循环矩阵的特征值的问题．设实（或复）循环矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

定理 1.9（参见本章参考文献 3 和 20） 设复循环矩阵 $\boldsymbol{A}$ 由（1.14）所给出，则矩阵 $\boldsymbol{A}$

的 n 个特征值为 $\lambda_k=f(\varepsilon^k)$，$k=0,1,\cdots,n-1$，其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，$\mathrm{i}^2=-1$，而 $f(x)=\sum_{j=1}^{n}a_jx^{j-1}$.

例 1.2 设 $n\geqslant3$，而矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdots&0&-1\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\-1&0&0&\cdots&-1&2\end{pmatrix}_{n\times n},$$

则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_k=2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)$，$k=0,1,\cdots,n-1$.

接着，关注一些矩阵的特征值和逆矩阵.

定理 1.10（参见本章参考文献 2） 设 $n\geqslant2$ 和 $ac>0$，则实三对角矩阵

$$\boldsymbol{C}_n=\begin{pmatrix}b&c&0&\cdots&0&0&0\\a&b&c&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b&c\\0&0&0&\cdots&0&a&b\end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.15}$$

的特征值为

$$\lambda_k=b+2\left(\sqrt{ac}\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)\mathrm{sgn}(c),\ k=1,2,\cdots,n,$$

相应的特征向量为

$$\boldsymbol{v}_k=\left(\sin\frac{k\pi}{n+1},\ \left(\frac{c}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{2k\pi}{n+1},\ \cdots,\ \left(\frac{c}{a}\right)^{-\frac{(n-1)}{2}}\sin\frac{nk\pi}{n+1}\right)^{\mathrm{T}},\ k=1,2,\cdots,n.$$

而当 $ac=0$ 时，$\boldsymbol{C}_n$ 的所有特征值都等于 b.

我们讨论当 $ac<0$ 时，由（1.15）给出的实三对角矩阵 $\boldsymbol{C}_n$ 的特征值问题.

定理 1.11 设 $n\geqslant2$ 和 $ac<0$，则由（1.15）给出的实三对角矩阵 $\boldsymbol{C}_n$ 的全部特征值为

$$\lambda_k=b-q_k=b+\mathrm{i}2\sqrt{\frac{-a}{c}}\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k=1,2,\cdots,n,$$

而 λ_k 相应的特征向量的第 j 分量为

$$x_j^{(k)}=2\sqrt{\frac{-a}{c}}\exp\left(\frac{kj\pi}{2}\right)\cos\frac{kj\pi}{n+1},\ j=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$.

证明： 设 λ 是 $\boldsymbol{C}_n$ 的特征值，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为相应的特征向量，令

$$q=b-\lambda,$$

问题转化为差分边值问题

$$cx_{j+1}+qx_j+ax_{j-1}=0,\ j=1,2,\cdots,n,$$