集合、对应浅识

中学数学教学参考资料之十

湘潭地区教师辅导站

一九七九年三月

目　　录

集合、应对等概念，是近代数学的基本概念。许多重要的近代数学，如实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等都是建立在集合的基础上的。尽早让学生接触并逐步了解集合、对应等基本思想，就可使学生清楚认识和牢固掌握集合、对应等基本概念，从而为以后学习近代数学提供有利的条件。

中学传统数学研究的领域是数和图形，即数的集合和点的集合。集合、对应等思想与中学数学有密切的联系，在学习数学知识中渗透集合、对应的基本思想和方法，不仅可以使学生较早地掌握一些现代数学中的最基本的观点和方法，而且可以巩固和加深对传统数学知识的理解，有利于发展学生的思维能力。

数学几乎已经进入人类所从事斗争的每个领域。数学研究的对象已经不限于数的集合和点的集合，而且已经扩展到任何事物的集合，如函数的集合、细胞的集合、语言元素的集合、心理对象的集合，……。一开始就在数学中渗透集合等近代数学的基本思想，让学生尽早地接触、了解和掌握一些近代数学知识，不论对学生毕业后从事生产劳动，还是进一步学习，都有十分重要的意义。

§.1 集合的基本概念

一、集合和集合的元素

什么叫集合呢？要想把“集合”是什么说得很清楚，并不容易。不过“集合”这个概念对我们来说，并不是陌生的。例如，今年某县应届高中毕业生组成一个集体，就是一个集合；某电影院的坐位椅子的全体，也是一个集合；某公社的拖拉机的全体是一个集合；100以内的偶数也组成一个集合，等等。因此，我们可以这样描述集合：在一定范围内，具有某种特定性质的确定对象所组成的集体，称为集合，简称为集。值得注意的是，作为一个集合，首先要具有一定的范围，如上述例中的“某县”、“某电影院”、“某公社”、“100以内”等就是给定的范围；其次，要具有某种特定性质的确定对象，如上述例中的“应届高中毕业生”、“坐位椅子”、“拖拉机”、“偶数”等就是给出的具有某种特定性质的确定对象。集合中这种具有某种特定性质的确定的对象就叫做这个集合的元素，简称为元。集合的元素可以是人、物、事、数……。

在三大革命实践中，我们常常需要考虑各种各样事物组成的集合。例如，在今天分析世界革命形势时，就要考虑世界上的国家全体构成的集合，第一世界国家的全体构成的集合，第二世界国家的全体构成的集合，第三世界国家的全体构成的集合，……；某公社党委在分析一年的生产形势时就要考察本公社农业学大寨先进集体（或先进个人）的全体构成的集合，该公社粮食亩产超1000斤的生产队的全体构成的集合，……；一个学校在清理校产时，要考察每一个教室里的课桌的全体构成的集合，……；在学习数学时，有时，要考察20以内（或100以内）的自然数的全体构成的集合，一个确定的方程的实数根的全体构成的集合，一个确定数的约数（或倍数）的全体构成的集合，有时还要考察自然数（或有理数或实数或复数）的全体构成的集合，以及直线（或平面）上的点的全体构成的集合，等等。

通常，我们把以数作为元素的集合，叫做数的集合，简称数集；把以点作为元素的集合，叫做点的集合，简称点集。点集在几何上的术语叫做图形。

轨迹是几何学中的一个重要课题。所谓合于一定条件的点的轨迹，从集合的观点来看，就是合于一定条件的点的集合。例：在平面内

1.到定点的距离等于定长的点集；

2.与两定点等距离的点集；

3.纵横坐标相等的点集；

4.到两定点的距离之和等于定长的点集，

这些点集，都是轨迹。

二、集合的元素与集合的从属关系

通过上面对集合的描述，我们可以看到，集合一方面是指具有某种特定性质的确定对象的全体，而不是指其中的个别对象。例如“自然数组成的集合”，是指所有的自然数，而不是指其中的某个或几个数字，另一方面，对于一个集合来说，任何对象或是这个集合的元素，或不是这个集合的元素，两者不可能同时并存，集合是由组成它的元素所完全确定的。

习惯上，我们用大写字母A、B、C、X、Y、……表示集合；用小写字母a、b、c、x、g，……表示集合的元素。

如果某对象a是集合A的一个元素，则我们说“a属于A”，或说“a在A中”，并记作$a\in A$，读作a属于A。这样，“地球∈行星”就表示地球与行星集合的关系；同样，中国∈第三世界”，就表示我国与第三世界所有国家的关系。

如果某对象b不是集合A的元素，则我们说“b不属于A”，或说“b不在A中”，并记作$b\overline{\in}A$，读作b不属于A，这样，“苏联$\overline{\in}$第三世界”就表示苏联这个社会帝国主义国家不属于第三世界国家，也就是表明了苏联

与第三世界国家的关系。同样，如果方程$x^2-1=0$的实数根（即1和-1）组成集合M，则$\sqrt{2}\overline{\in}M$，即表示$\sqrt{2}$不属于方程$x^2-1=0$的实数根的集合，也即$\sqrt{2}$不是该方程的实数根。

一个集合，只有当它的从属关系十分明确，对于任意一个已知的事物，我们能准确地分辨出它是不是属于这个集合，这样的集合才算是确定了的，否则就不成其为集合。例如说“与某直线距离最近的点的集合”，这个界限就不明确，我们无法判定哪些点属于哪些点不属于这个范畴，所以这不能算集合；同样，如果说“一切很小的正数的集合”，也是不确定的，也不能成其为集合。

三、集合的表示法

一个集合是由组成它的元素完全确定的，因此，解决集合的表示方法问题，要从怎样清晰地给出集合的元素上去考虑。通常表示集合的方法有如下两种：

1.列举法： 所谓列举法就是把集合中的元素一一列举出来，并且把一一列举它的元素用括号｛　｝括起来。如方程$n^2-1=0$的实数根的集合，可记作｛1，-1｝或｛-1，1｝；第一世界的国家的集合可记作｛苏联，美国｝或｛美国，苏联｝。

〔**例1**〕表示20以内所有质数的集合。

解　20以内质数的全体是：2，3，5，7，11，13，

17，19，

若用A表示20以内所有质数的集合，则：

A＝{ 2 ， 3 ， 5 ， 7 ，11，13，17，19 }

显然，{ 3 ， 2 ， 7 ， 5 ，17，19,13,11 }、{ 19，17，13，11， 7 ， 5 ， 3 ， 2 }、{ 2 ， 3 ， 5 ，7 ,11，13，17，19} 等均表示同一个集合A。

〔**例 2** 〕表示12的约数的全体构成的集合。

解 12的约数的全体是：1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 6 ，12。

若用B表示12的约数的全体构成的集合，则

B＝{ 1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 6 ，12}。

显然，{ 1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 6 ，12}、{ 2 ， 1 ， 4 ， 3 ， 6 ，12}、{ 2 ， 1 ， 4 ， 3 ， 6 ，12} 等均表示同一集合B。

有时，我们也可以如右图那样直观地表示集合，如B＝{ 1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 6 ，12}，这样直观地表示集合，其本质与上面一样，都是要把集合的元素一一列举出来。

一一列举出集合的所有元素，只在集合具有相当少的元素的情况下适用，对于具有相当多的元素的集合（例如由 1 到10^{10}的所有整数的集合），显然，把所有的元素都列举出来就麻烦了！而对于具有无限多个元素的集合（如自然数的全体的集合；不等式 $x+3>0$ 的解的集合），要一一列举它们

图 1

的所有元素，显然是不可能的！不过，我们发现，有的集合，尽管它的元素个数相当多，甚至无限，但它的元素有一定的次序，按照某个规律可以不断列举，此时，我们可以用记号“……”来表示那些按某个规律可以不断列举出来的元素。如1到10^{10}的所有整数的集合，就可以表示成：$\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 10^{10}-1, 10^{10}\}$；而所有自然数组成的集合，就可以记作：$\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$。记法的不同之处在于前者表示集合元素是有限的，按照给定的规律列举集合的元素，倒数第二个元素是$10^{10}-1$，最后一个元素是10^{10}；后者表示集合的元素是无限的，只能按照给定的规律列举集合的元素，但无法列举出最后的一个元素来。

2.描述法：所谓描述法就是用描述出集合元素的公共特征的方法来表示这个集合。例如，可以把“12的约数的全体构成的集合”表示为：{ a |a是12的约数 }，括号内记号“|”前记上元素的形状，记号“|”后记上元素的特征性质。

〔**例3**〕用描述法表示圆心在直角坐标系原点的单位圆上所有的点的集合。

解 设单位圆上点的坐标为(x, y)，则圆心在原点单位圆的方程为$x^2+y^2=1$，

∴ 该集合可表示为：$A=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$，

〔**例 4**〕表示一切形状是$a+b\sqrt{2}$、且其中a、b是有理数的实数所组成的集合。

解 设该集合为R_0。则

$$R_0=\{a+b\sqrt{2}\mid a、b为有理数\}.$$

〔**例 5**〕表示所有使$f(x)$的值大于a的数x的全体所组成的集合。

解 设该集合为B，则

$B=\{x\mid f(x)>a\}$.

用描述法表示集合，有时也可以在{ }内用文字来描述元素的范围与特性，如例3、例4中所说的集合可分别表示为A={圆心在原点的单位圆上所有点}、R_0={形如$a+b\sqrt{2}$、且a、b为有理数的所有实数}。

比较列举法和描述法，可以看出，列举法的好处是可以具体看清集合的元素；描述法则刻划出了集合元素的共同特征性质，究竟采用哪一种表示方法为宜，要根据具体问题来确定。比如，有的集合的元素是不能按照某个规律列出来的，如实数集合，不能用列举法表示，但可用描述法记为R={a|a为一切实数}或{一切实数}。又如暂时只知道元素性质的集合也只好采用描述法表示，例如二次方程$x^2-5x+4=0$所有的根作成一个集合，我们用B表示，写成：$B=\{x\mid x^2-5x+4=0\}$，在没有求出这个方程的根以前，只好这样表示；求出这个方程的根以后，B也

可以用列举法表示：B = { 1 ， 4 }（一个方程的所有解作成的集合叫做这个方程的解集合）。

有了集合的表示方法，就为今后讨论、研究集合有关问题提供了方便。

四、有限集、无限集、单位集、空集和全集

我们清楚地看到，一个集合完全由组成这个集合的元素来确定，而组成集合的元素有的是有限个，有的是无限个，因此，集合通常分为有限集与无限集两大类。就是说，一个集合所具有的元素的个数是有限的就叫做有限集合，否则就叫做无限集合。例如“100以内的偶数集合”就是有限集合，而“数轴上所有点的集合”是无限集合。

除上述有限集和无限集外，还有三种特殊的情形：

一种是仅有一个元素的集合，叫做单位集合。（也叫单元素集合）例如方程 $x+4=0$ 的实数根组成的集合，就只有一个元素，即 -4，这个集合就是单位集合，记为 $\{-4\}$。

一种是在某特定的环境中，一个元素也没有的集合。例如，在实数范围内方程 $x^2+1=0$ 没有实数根，那末该方程的实数根的集合就一个元素也没有。又如某学校在开学时准备对新生进行摸底测验，计划语、数两科成绩在120分以上的编成快、中班，120分以下的编成慢班，测验结果，全部新生两科成绩都在120分以上，那么慢班学生一

个也没有，则由慢班学生全体构成的集合便一个元素也没有。为了研究问题的需要，把不含有任何元素的集合叫空集合（或叫零集合），常用 0 表示（或用φ表示）。根据空集的概念，式x∈0表明对于世界上任何事物来说，这样的x都是不存在的。

还有一种是包括世界上一切事物（一切研究的对象）的集合，叫做全集合，常用I表示（或用U表示）。根据全集的概念，x∈1表明对于世界上任何事物x来说，都是存在的。

值得注意的是，A＝｛ 0 ｝和A＝ 0 是不同的，前者表示集A有一个元素——数 0 ，是单位集，而后者表示集A是不具有任何元素的空集；同样，B＝｛ 1 ｝表示具有一个元素——数 1 的单位集合，而B＝ 1 表示具有任何元素的全集，两者不能混淆。

五、集合间的包含关系

我们知道，有理数（或实数）间可以比较大小，那么，集合与集合之间是否也可以“比较大小”呢？举个例子来说，如果A表示某校所有女学生的集合，B表示该校全体学生的集合，显然集A的每个元素都属于集B，也就是说集A与集B也可以进行“大小比较”，两个集合间这种“大小”关系，称为包含关系。象这样，一个集合A的每一个元素都属于另一个集合B，就称为集A包含于集B，

或集B包含集A，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，（读作"A包含于B"或"B包含A"）例如，设$A=\{a|a$为全部有理数$\}$，$B=\{b|b$为全部实数$\}$，则$A\subseteq B$或$B\supseteq A$；又如$C=\{c|c$为任意的矩形$\}$，$D=\{d|d$为任意的平行四边形$\}$，则$C\subseteq D$或$D\supseteq C$。

两个量的大小比较，只能在同类量的情况下才能进行，比如，我们不能在3本书与5尺布之间比较大小，而得出3本书$\angle$5尺布。相类似地，两个集合间的包含关系是对它们的元素有相同的基本特征性质（或具有相同的结合规律）而言的，比如若A是某班48个学生构成的集合，B是某班50张课桌构成的集合，我们就不能说$A\subseteq B$。

最后，我们还必须指出：区别从属关系"$\in$"和包含关系"$\subseteq$"是很有必要的，从属关系是指集合的元素与集合本身的关系，在从属关系的一边（左边）写有集合的一个元素，而在另一边（右边）则写着一个集合；但包含关系是表示集合之间的关系，它的每一边都是集合。同样，掌握从属与包含关系两者的内在联系也是重要的。

六、子集、母集和相等的集合

我们已经知道，若集A的每一个元素都是集B的元素，就叫做集B包含集A，且记作$B\supseteq A$，这时，我们又称集A是集B的子集合（简称子集），集B是集A的母集合（简称母集）。

若集A的每个元素都属于集B，而集B的每个元素也都属于集A，那么组成A、B两个集合的元素完全相同，叫做集A和集B相等（或全同），记作$A=B$，显然，这时$A\subseteq B$，$B\supseteq A$，例如，若$A=\{-1,4\}$，$B=\{x|x^2+3x-4=0\}$，则$A=B$。

轨迹定理的一般格式是“合于条件C的点的轨迹是图形F”。把它的辞句分析一下，总是前后两半，前半

合于条件C的点的轨迹。

是一个点集M。定理对M只说明了它的元素（点）具有何种性质，没有说其形。后半

图形F，

也是一个点集N。定理对N只说其形，不谈它的元素（点）具有何性质。定理的意义就是

$M=N$。

故要证轨迹定理，就是要证明两个点集M和N相等（全同）。所以应依前面所述两方面来证明：既证$M\subseteq N$，又证$N\subseteq M$。

若集A的每个元素都属于B，但并非B的每个元素都属于A（即B中确有不属于A的元素存在），也就是说A含于B，但B异于A，则称A为B的真子集，B为A的真母集，记作$A\subset B$或$B\supset A$。例如，我们可以判断：方程$x-2=0$的根的集合是方程$x^2-4=0$的根的集合的真子集，而方程$|x|-2=0$的根的集合和方程$x^2-4=0$的根的集

合相等。

与数量大小比较相类似，集合的包含关系和相等关系也具有传递性：在A、B、C三集中，若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$；若$A=B$、$B=C$，则$A=C$。

练　习　一

1.设A为全部正数的集合，B为全部负数的集合，指出下列各数中哪些属于集合A？哪些属于集合B？

$$-16,\ 0.004,\ +\frac{7}{8},\ -\frac{1}{2},\ 9651,\ -3.6,25.8,$$

$$-4,\ \frac{3}{5},0.$$

2.判断下列对象是否能构成集合：

1)10以内的奇数；2)5的倍数；3)一些单项式；

4)平面上与某点靠近的点。

3.设A为整式的集合，B为分式的集合，指出下列代数式中哪些属于A，哪些属于B？

$$-5x,\ \frac{3}{5}xy^2,\ \ \frac{1}{2}x+3y,\ x^2-1,\frac{3x}{y+2},\ \frac{2+y}{3},$$

$$1-\frac{1}{x}.$$

4.如果C为全部有理数的集合，D为全部实数的集合，试在0到1之间说出既属于集合C又属于集合D的5个

元素；再在-1到0之间说出不属于集合C但属于集合D的5个元素，最后，你能指出属于集合D但不属于集合C的元素吗？

5．用集合的表示法表示集合：

集　合	集合的元素
A	在1到40之间的、8的一切整倍数
B	在1到40之间的、6与8的一切公倍数
C	在1到100之间的、6与8的一切公倍数
D	不等式$3x+2\geqslant 5$的实数解
E	合数30的一切质因数
F	合数42的一切质因数
G	30与42的最大公约数的一切质因数
H	30与42的最小公倍数的一切因质数
M	不小于-10且不大于+10的一切实数
N	使代数式$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$有意义的所有x的值

6．用"包含"或"相等"的符号表示集A与B、A与C、A与D间的关系：

1）A＝｛1与9之间的偶数｝、B＝｛2，4，6｝、C＝｛2，4，6，8｝、D＝｛2，4，6， 8，10，……}；

2）A＝{1，2，3，4，5，……}、B＝{整数}、C＝{正整数}、D＝{1，2，3，4，5，6，7}。

7．下面各对集合（或集合与元素）之间有什么关系？

1）{菱形}与{正方形}；2）{π}与{无理数}；3）{矩形}与{长方形}；4）0与{0}；5）a与{a}；6）1与{1}；7）$\{x \mid x^2-2x-3=0\}$与$\{x \mid x-3=0\}$；8）$\{x \mid x^2-2x-3=0\}$与{x | x－3＝0和x＋1＝0}；9）$\{x \mid |x|-1=0\}$与$\{x \mid x-1=0\}$；10）$\{a \mid 0<a<+\infty\}$与$\{a \mid 0\leqslant a<+\infty\}$。

§.2 集合的基本运算

集合运算中有补、并、交、差、对称差、等。但基本的是补、并、交；其它几种运算，都可以化为补、并、交的运算，可以说是补、并、交的混合运算。在本节中，我们只讨论集合的基本运算——补、并、交以及它们的一些性质。