普通高等教育"十二五"规划教材

光电信息科学与工程类专业规划教材

光电信息物理基础

(第2版)

沈为民 胡茂海 段子刚 周盛华 编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材
光电信息科学与工程类专业规划教材

光电信息物理基础

（第2版）

沈为民　胡茂海　段子刚　周盛华　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书主要有三部分内容。一是电磁理论:包括矢量分析、电磁现象的普遍规律及基本方程、电磁场的波动性、电磁波的辐射、平面电磁波在绝缘介质和导电介质中的传播,以及电磁波的反射折射问题等;二是量子理论:包括热辐射、光量子、波粒二象性、氢原子光谱及玻尔理论、波函数与薛定谔方程、力学量与算符、微扰理论、光的吸收和发射等;三是固体光电基础:包括晶体结构与晶体结合、晶格振动、能带论基础及固体的导电性、本征半导体和杂质半导体、半导体中的载流子及其运动、PN 结、半导体中的光学与光电现象等。

本书可作为高等学校光电信息工程、光信息科学与技术、电子科学与技术、电子信息科学与技术等光学类、电子类本科专业的教材,也可供有关专业的本科生、研究生和从事光电技术、电子技术的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

光电信息物理基础/沈为民等编著. —2 版. —北京:电子工业出版社,2013.4
光电信息科学与工程类专业规划教材
ISBN 978-7-121-19756-7

Ⅰ. ①光… Ⅱ. ①沈… Ⅲ. ①光电子技术-信息技术-高等学校-教材 Ⅳ. ①TN2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 045027 号

责任编辑:韩同平
特约编辑:张庆杰
印　　刷:北京中新伟业印刷有限公司
装　　订:北京中新伟业印刷有限公司
出版发行:电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编:100036
开　　本:787×1092　印张:13.25　字数:350 千字
印　　次:2013 年 4 月第 1 次印刷
印　　数:2 000 册　定价:39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前　言

过去很长时间，光学和电子学都曾作为物理学的一个分支，随着物理学的发展而不断完善。如今，光学工程和电子科学与技术都已成为独立的学科，但它们与物理学间的深刻联系不可分割。对于光学类、电子类专业的学生来说，没有扎实的基础物理知识，要想在专业领域有一番作为是很困难的。

电磁理论和量子理论是物理学的核心内容，也是光学和电子学的重要理论基础，而集成电路、光通信、光电信息等许多应用领域的飞速发展离不开以二极管、半导体激光器等为代表的固体器件，所以学习电磁理论和量子理论，以及固体物理与半导体物理知识，对于光学类、电子类专业学生来说是十分重要的。然而，电磁理论、量子理论、固体物理和半导体物理等内容很多，目前多数高校分几门课程开设，所需学时很多。我们课程内容改革的思路是，突出理论主线，在知识叙述保持连贯的前提下，尽量简化内容。教材编写力求内容精简、重点突出、概念清晰、通俗易懂。

本书共分三篇9章。

第一篇为电磁理论，第1章介绍矢量分析及场论，包括场、梯度、散度、旋度、正交曲线坐标系、δ函数；第2章介绍电磁现象的描述及基本方程，包括静电场、稳恒磁场、时变电磁场、麦克斯韦方程组、电磁场的边值关系、电磁场的能量和能流；第3章介绍电磁场的波动性，包括电磁场的波动方程、单色电磁波、非单色波与介质色散、电磁场的动量、电磁波的辐射；第4章介绍平面电磁波的传播，包括绝缘介质与导电介质中的单色平面波及反射和折射问题、全反射及消逝波与导引波等。

第二篇为量子理论，第5章介绍量子理论的实验基础，包括黑体辐射、光电效应、康普顿散射、氢原子光谱、电子衍射等著名实验及理论解释；第6章简单介绍量子力学的理论体系，包括波函数与薛定谔方程、力学量与算符、微扰理论、光的吸收和发射等。

第三篇为固体光电基础，第7章简单介绍固体物理知识，包括晶体结构与晶体结合、晶格振动、能带论基础及固体的导电性；第8章简单介绍半导体物理知识，包括本征半导体和杂质半导体、半导体中的载流子及其运动、连续性方程、PN结；第9章介绍半导体中的光学与光电现象，包括固体光学常数及测量方法、光吸收、光电导、光伏效应、半导体发光等。

每章末都附有习题。由于各校安排本课程的学时及教学要求不同，书中打“*”号内容可以不讲或简单讲述。

本书第一篇电磁理论由胡茂海负责编写，第二篇量子理论由段子刚负责编写，第三篇固体光电基础由沈为民负责编写，全书由沈为民统稿，周盛华参与部分章节编写和资料整理工作。深圳大学李景镇教授对全书进行了认真审稿，并提出许多宝贵建议，在此深表谢意。

由于编者的水平与经验有限，书中难免存在缺点和错误，殷切希望读者批评指正。

沈为民的电子邮箱：swm@ cjlu. edu. cn

编著者

反侵权盗版声明

举报电话：(010)88254396；(010)88258888
传　　真：(010)88254397
E-mail：dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路173信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036

目　　录

第一篇　电 磁 理 论

第二篇　量 子 理 论

第三篇　固体光电基础

第一篇　电 磁 理 论

第 1 章　数 学 基 础

我们所要讨论的电磁场是与空间和时间相关的一种抽象的矢量场。矢量分析是研究电磁场理论的重要数学工具,应用矢量分析的方法,可以使电磁场的基本定律、公式以简洁的形式表述出来,且与坐标的选择无关。因此本章主要介绍有关数学基础知识。

1.1　矢量代数和矢量函数

1. 矢量

物理学中有两类量最常用:一类是仅需用数值和单位(合称量值)表示其大小的量,叫标量,如长度、时间、质量、温度、能量等都是标量;另一类是既需用量值表示其大小,又需要指明方向的量,叫矢量,如力、速度、加速度、动量、角动量等都是矢量。我们在这里用带箭头的字母(例如$\vec{A}$、$\vec{B}$等)或黑斜体字母(如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$ 等)表示矢量。矢量的大小又称矢量的模,并用 A 或 $|\vec{A}|$ 表示。

2. 矢量加减运算

两矢量相加可按图 1.1-1 的方法求和。由此可见相加的结果与相加的顺序无关,从而矢量加法服从交换律

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C} \tag{1.1-1}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1.1-2}$$

当有三个矢量相加时,容易看出,矢量加法服从结合律

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \tag{1.1-3}$$

两矢量相减时,如 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,可先取 $\boldsymbol{B}$ 的负矢量,即和 $\boldsymbol{B}$ 大小相同方向相反的矢量 $-\boldsymbol{B}$,然后和 $\boldsymbol{A}$ 相加,如图 1.1-2 所示。

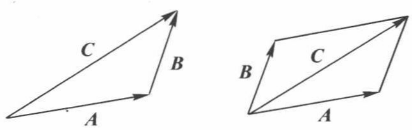

图 1.1-1　矢量相加

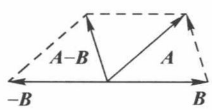

图 1.1-2 矢量相减

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{1.1-4}$$

3. 单位矢量和分矢量

一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 乘以一个正标量 m 得到一个新矢量，它与 $\boldsymbol{A}$ 同方向，但大小为 A 的 m 倍，即 $m\boldsymbol{A}$。单位矢量是大小为 1 的矢量，如 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量表示为 $\boldsymbol{A}^0$。这样，一个矢量可以用该矢量方向上的单位矢量和该矢量的大小相乘得到，即

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{A}^0 \tag{1.1-5}$$

任一矢量可以分解为几个矢量，它们的和就是这个矢量。特别是可以分解为沿坐标轴的互相垂直的分量。例如，在笛卡儿坐标系（直角坐标系）中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z \tag{1.1-6}$$

式中，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 为坐标轴方向的单位矢量。

4. 两矢量的标量积

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 的标量积（也称点乘）记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$。标量积是一个标量，有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{1.1-7}$$

式中，θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矢量的夹角。

若将矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矢量用直角坐标系方法表示，则有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.1-8}$$

两矢量的标量积满足交换律和分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.1-9}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.1-10}$$

5. 两矢量的矢量积

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积（也称叉乘）记为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。矢量积是一个矢量，它的大小等于 $AB\sin\theta$（θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 的夹角），此值也就是以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为边的平行四边形面积；其方向垂直于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 所决定的平面，并且满足右手螺旋定则。如图 1.1-3 所示。

两矢量的矢量积不服从交换律，但满足分配律

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1.1-11}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \tag{1.1-12}$$

若将矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 用直角坐标系方法表示，则有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.1-13}$$

6. 三矢量相乘

三矢量相乘有三种形式，即

(1) 第一种是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$，这只是一个标量 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 和矢量 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，乘积是和矢量 $\boldsymbol{A}$ 同一个方向的矢量。

(2) 第二种是所谓的三重标量积，如 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$，它表示要先求矢量积，然后求标量积，其结果为一个标量，即为平行六面体的体积。如图 1.1-4 所示。故有

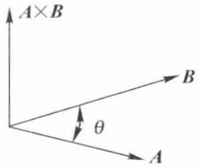

图 1.1-3　矢量叉乘

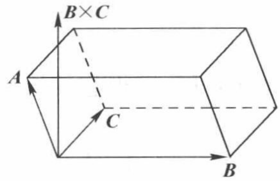

图 1.1-4　矢量三重标量积

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{1.1-14}$$

(3) 第三种是所谓的三重矢量积，即 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，括号表示需要先进行运算。其具有如下性质

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1-15}$$

7. 矢量函数与矢量线

(1) 标量函数与矢量函数

具有确定数值的标量可以是空间坐标（如直角坐标系中的 x、y、z）和时间 t 的函数，我们称为 $f(x,y,z;t)$ 标量函数。

而有确定方向的物理量的矢量，一般都是一个或几个（标量）变量的函数，称 $\boldsymbol{F}(x,y,z;t)$ 为矢量函数。例如：

$$\boldsymbol{F}(x,y,z;t)=\boldsymbol{e}_xF_x(x,y,z;t)+\boldsymbol{e}_yF_y(x,y,z;t)+\boldsymbol{e}_zF_z(x,y,z;t) \tag{1.1-16}$$

一个矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z;t)$ 对应三个标量函数 $F_x(x,y,z;t)$、$F_y(x,y,z;t)$、$F_z(x,y,z;t)$。

如果 f 或 $\boldsymbol{F}$ 的物理状态与时间无关，则它代表静态场；如果是时间的函数，则称为动态场或时变场。

描述物理状态空间分布的标量函数 $f(x,y,z;t)$ 和矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z;t)$，在时间是一定值的情况下，它们是唯一的，它们的数值和方向与所选择的坐标系无关。即使进行坐标系变换，它们也保持不变。这就是矢量和矢量场的不变特性。例如矢量大小与坐标无关，即有

$$F^2=F_x^2+F_y^2+F_z^2=F_\rho^2+F_\varphi^2+F_z^2=F_r^2+F_\theta^2+F_\varphi^2 \tag{1.1-17}$$

大小和方向都保持不变的矢量称为常矢，如 $\boldsymbol{a}_x$；反之称为变矢，如 $\boldsymbol{a}_\varphi$。

矢量函数对时间和空间坐标变量的微分，仍然是一个矢量。

(2) 矢量线（力线）

为了形象地描述矢量场在空间的分布状态，引入矢量线概念。矢量线上的每一点的切线方向都代表该点的矢量场方向。矢量场中的每一点均有唯一的一条矢量线通过。所以矢量线充满了整个矢量所在空间。

电力线、磁力线就是电场和磁场中的矢量线。

由矢量线定义可知，其上任一点的切向长度元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与该点矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的方向平行，于是

$$\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{1.1-18}$$

直角坐标系中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_xA_x+\boldsymbol{e}_yA_y+\boldsymbol{e}_zA_z$$

由

$$\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\end{vmatrix}=0$$

可得
$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z} \tag{1.1-19}$$
这就是矢量线的微分方程,求得它的通解可绘出矢量线。

1.2　场、梯度、散度和旋度

1. 场

如果在一个空间区域中,某个物理量在其中每一点都取确定值,就称这个空间区域存在该物理量的场。如果这个物理量是标量,就称这个场是**标量场**;若这个物理量为矢量,则称这个场是**矢量场**。例如温度场、电势场是标量场,电场、磁场是矢量场。

2. 标量场的方向导数和梯度

由上述标量场的定义可知,标量场中分布在各点的物理量 u 是场中点坐标的单值函数,即
$$u=u(\boldsymbol{r}) \tag{1.2-1}$$
这里,$\boldsymbol{r}$ 代表三个空间坐标(x,y,z)。若给定了函数 u 的具体形式,标量 u 在场中的分布就完全确定了。在研究标量场时,常常还需要知道 u 在场中各点沿各个方向的变化情况,u 在场中的变化情况往往具有更重要的物理意义。例如,若 u 为电势 φ,φ 在场中各点的变化就决定了各点的电场强度。若 u 是温度,u 在各点的变化就决定了这些点上热传导进行的方向和速度。为了讨论场在空间各点的变化,首先引入方向导数的概念。

(1) 方向导数

在场中取一点 M_0,由 M_0 点引射线 l,其方向由方向余弦$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$确定。在 l 上取另一点 M(见图 1.2-1)。记 $\Delta u=u(M)-u(M_0)$,$\rho=\overline{M_0M}$,定义 u 在 M_0 点沿 l 的方向导数为
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\overline{MM_0}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho} \tag{1.2-2}$$
方向导数描述 u 在 M_0 点沿 l 方向的变化率。

设函数 u 在 M_0 点可微,方向导数在直角坐标系下可表示为
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.2-3}$$
式中,$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$为函数 u 在该点的偏导数;$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向余弦。

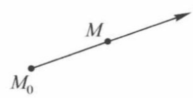

图 1.2-1　方向导数

(2) 梯度

一般来说,在场中一点沿着不同的方向 l,标量场 u 有不同的方向导数,如果在标量场 u 中定义一个矢量 $\boldsymbol{G}$:
$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.2-4}$$
式中,$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 是沿直角坐标系坐标轴 x,y,z 方向的单位矢量。在场中任意点,矢量 $\boldsymbol{G}$ 是唯一的。记沿 l 方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_l$,由式(1.2-3)得
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_l=G\cos\theta \tag{1.2-5}$$

θ 是矢量 $\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_l$ 的夹角。式(1.2-5)表明 $\boldsymbol{G}$ 具有这样的意义:它在任意方向的投影就给出沿这个方向 u 的方向导数。因此,矢量 $\boldsymbol{G}$ 的方向就是 u 变化率最大的方向,其模就是变化率的最大值。式(1.2-4) 中 $\boldsymbol{G}$ 称为**标量场** u 的**梯度**。记为 grad $u=\boldsymbol{G}$。引进矢量微分算子(del 算子)

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\tag{1.2-6}$$

则梯度可以记为

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}\tag{1.2-7}$$

【例 1-1】 已知标量场 $\varphi(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$,求空间一点 $P(1,1,1)$ 的梯度和沿 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_y$ 方向的方向导数。

解: 首先由

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right|_P=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right|_P=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_P=\left.\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right|_P=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

根据梯度公式(1.2-7),得标量场 φ 在 P 点的梯度为

$$\left.\nabla\varphi\right|_P=\left.\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right|_P=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$$

$\boldsymbol{l}$ 的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$$

由方向导数与梯度之间的关系式(1.2-5)可知,沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的方向导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{e}_l=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)\cdot\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

3. 矢量场的通量和散度

在研究矢量场时,为形象起见常引进矢量线来描述矢量场。矢量线上每一点的切线方向即为该点矢量场的方向,每一点矢量场的大小由过该点且与该点矢量场垂直的单位面积上穿过的矢量线条数表示。矢量线的疏密分布形象地反映了矢量场强度的分布。有两种不同的矢量场:一种矢量场,它的矢量线从场中一点发出,终止在另外一点上或无穷远处,这类矢量场称为纵场;另一种矢量场,其矢量线没有起点及终点,是无头无尾的闭合回线,这类矢量场称为横场。**横场和纵场具有完全不同的物理意义和数学性质。**

(1) 矢量场的通量

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿场中任一有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的积分

$$\Psi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\tag{1.2-8}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过面 $\boldsymbol{S}$ 的通量。当式(1.2-8)中的 $\boldsymbol{S}$ 为一小闭合曲面时,取曲面正法向由内向外,记 $\boldsymbol{S}$ 包围的空间区域为 Ω,其体积为 ΔV。由于横场矢量线是闭合曲线,横场对任何闭曲面的通量为零,仅纵场对式(1.2-8)的积分贡献才可以是非零的。当式(1.2-8)中 Ψ 为正值时,表明有纵场矢量

线从 Ω 中发出,Ω 中有纵场源;若 Ψ 为负,表明有纵场线终止在 Ω 中,Ω 中有吸收矢量线的汇。如果把汇看做是负源,穿过闭合曲面 S 的通量 Ψ 不为零,就表明 Ω 中存在纵场源。

在直角坐标系中矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$A = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z \tag{1.2-9}$$

式中,A_x,A_y,A_z 是矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿坐标轴的三个分量。

又在直角坐标系中有向面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{e}_x \cos(\boldsymbol{n},x) + \boldsymbol{e}_y \cos(\boldsymbol{n},y) + \boldsymbol{e}_z \cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}\sigma \tag{1.2-10}$$

式中,$\cos(\boldsymbol{n},x)$,$\cos(\boldsymbol{n},y)$,$\cos(\boldsymbol{n},z)$ 为有向面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 外法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦,$\mathrm{d}\sigma$ 为面元面积。

故矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过任一小闭合有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的通量在直角坐标系中可表示为

$$\Psi = \oint_S [A_x \cos(\boldsymbol{n},x) + A_y \cos(\boldsymbol{n},y) + A_z \cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}\sigma \tag{1.2-11}$$

根据数学中的高斯积分公式,式(1.2-11)变为

$$\Psi = \oint_S A \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}\tau \tag{1.2-12}$$

利用积分中值定理,式(1.2-12)变为

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Bigg|_{M_0} \cdot \Delta v \tag{1.2-13}$$

式中,M_0 为闭合曲面 S 所围区域 Ω 中的一点,Ω 的体积为 Δv。

(2) 矢量场的散度

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中取一点 M_0,作一包围 M_0 点的闭合有向曲面 $\boldsymbol{S}$,设 $\boldsymbol{S}$ 包围的空间区域为 Ω,体积为 Δv。以 $\Delta\Psi$ 记为穿过 $\boldsymbol{S}$ 的通量,当 Ω 以任意方式缩向 M_0 时,极限值

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\Delta v} \tag{1.2-14}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M_0 点的散度,记为 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}$。由此可见,矢量场中任一点的散度,就表示纵场中该点的源强度。

由式(1.2-13)和式(1.2-14)可知,在直角坐标系中,一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度可表示为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.2-15}$$

引用 del 算子,即式(1.2-6),矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度可简记为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.2-16}$$

(3) 高斯散度定理

在矢量分析中,一个重要的定理是

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}\tau$$

称为高斯定理。它的意义是:任一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度的体积分等于该矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过该限定体积的闭合面的总通量。

【例 1-2】 已知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z$,计算该矢量场的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$。

解: 由直角坐标系中的散度公式,即式(1.2-15)有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

4. 矢量场的环量、环量面密度和旋度

(1) 环量

设有矢量场 $\boldsymbol{A}$,称 $\boldsymbol{A}$ 沿场中任一有向闭曲线 L 的积分,即

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.2-17}$$

为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿 L 的环量。可以证明纵场对任意闭合回路的环量恒为零,只有横场才有不为零的环量。为了理解环量的物理意义,在这里我们取 $\boldsymbol{A}$ 为磁场 $\boldsymbol{H}$,根据安培环路定理,式(1.2-17)的积分就表示通过有向闭合曲线 L 所围一曲面的电流强度。电流是激发磁场的源,若 Γ 不为零,则表明 L 所围区域中横场 $\boldsymbol{A}$ 的源不为零。这在后面的章节中将详细说明。

在直角坐标系中有向线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{e}_x\cos(\boldsymbol{n},x) + \boldsymbol{e}_y\cos(\boldsymbol{n},y) + \boldsymbol{e}_z\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}l \tag{1.2-18}$$

式中,$\cos(\boldsymbol{n},x)$,$\cos(\boldsymbol{n},y)$,$\cos(\boldsymbol{n},z)$ 为有向线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向余弦,$\mathrm{d}l$ 为线元的长度。

故 $\boldsymbol{A}$ 沿 L 的环量在直角坐标系中可以写为

$$\Gamma = \oint_L A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z \tag{1.2-19}$$

(2) 环量面密度

为了描述横场中任意一点源的强度,我们首先引进环量面密度的概念。取矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中一点 M_0,在 M_0 点取定方向 $\boldsymbol{n}$,过 M_0 点作一微小曲面 ΔS,以 $\boldsymbol{n}$ 为其在 M_0 点的法向矢量,取 ΔL 为 ΔS 的周界,ΔL 绕行方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋关系。则可定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿 ΔL 的环量与面积 ΔS 之比,在 ΔL 缩向 M_0 点情况下的极限,即

$$\mu_n = \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} \tag{1.2-20}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 在 M_0 点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度。

下面我们给出直角坐标系中环量面密度的计算公式。利用斯托克斯公式,$\boldsymbol{A}$ 沿 L 的环量可写成

$$\Gamma = \int_S\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},x) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},y) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},z)\right]\mathrm{d}\sigma \tag{1.2-21}$$

注意:此处 $\cos(\boldsymbol{n},x)$,$\cos(\boldsymbol{n},y)$,$\cos(\boldsymbol{n},z)$ 为有向闭合曲线围成的有向面元外法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦。

利用积分中值定理,式(1.2-21)变为

$$\Gamma = \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},x) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},y) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},z)\right]\Bigg|_{M_0}\cdot\Delta S \tag{1.2-22}$$

式中,M_0 为微小曲面 ΔS 上的一点。

由式(1.2-20)可知,M_0 点环量面密度应为

$$\mu_n = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},x) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},y) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},z) \tag{1.2-23}$$

(3) 旋度

显然环量面密度的大小依赖于方向 $\boldsymbol{n}$,故环量面密度不能描述横场中各点的源强度。如果我们定义矢量

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{1.2-24}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 在场中任一点具有一个确定的值。定义 $\boldsymbol{R}$ 为矢量场的旋度,记为 rot $\boldsymbol{A}$。可见旋度在任意方向上的投影就给出了沿该方向的环量面密度。从而旋度方向就是环量面密度取最大值的方向,R 就是环量面密度的最大值。

引用 del 算子,矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可简记为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1.2-25}$$

(4) 斯托克斯定理

对于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 所在的空间中,任意一个以 C 为周界的曲面 S,存在着如下关系

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.2-26}$$

其意义是:矢量场旋度的面积分,等于该矢量沿包围此曲面的闭合路径的线积分。它同散度定理一样,是场论中的重要定理,在后面的讨论中,经常要用到这种积分变换关系。

*5. 亥姆霍兹定理

前面我们介绍了矢量分析中的一些基本概念和运算方法。其中矢量场的散度、旋度和标量场的梯度都是场性质的重要度量。换言之,一个矢量场所具有的性质,可完全由它的散度和旋度来表明;一个标量场的性质则完全可以由它的梯度来表明。亥姆霍兹定理就是对矢量场性质的总结说明。在阐述亥姆霍兹定理之前,先介绍两个零恒等式,它们分别表明梯度矢量和旋度的一个重要性质,并对场的分析、引入辅助位函数起着重要作用。

(1) 两个零恒等式

① 恒等式Ⅰ与无旋场

梯度矢量的一个重要性质就是:任何标量场的梯度的旋度恒等于零。即

$$\nabla\times(\nabla u)\equiv 0 \tag{1.2-27}$$

恒等式Ⅰ的逆定理也成立,即如果一个矢量的旋度为零,则该矢量可以表示为一个标量场的梯度。

将逆定理应用于电磁场理论中,可以引入辅助位函数,以方便求解场矢量。例如静电场,因 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,可引入标量电位函数 $\boldsymbol{\Phi}$,令

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\boldsymbol{\Phi} \tag{1.2-28}$$

式中,负号表明 $\boldsymbol{E}$ 矢量沿 $\boldsymbol{\Phi}$ 减小的方向。

如果矢量场所在的全部空间中,场的旋度处处为零,即 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$,则这种场不可能存在旋涡源,因此称为无旋场。

无旋场,也称位场、保守场。因无旋场中,$\boldsymbol{F}=\nabla u$,由斯托克斯定理:

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_S\nabla\times(\nabla u)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0 \tag{1.2-29}$$

可见场力 $\boldsymbol{F}$ 沿闭合曲线路径做功等于零，场能无变化，故称保守场。

如图1.2-2所示，$\boldsymbol{F}$ 沿闭合路径的积分又可分为两线段积分之和：

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{P_2}^{P_1}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

于是

$$\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.2-30}$$

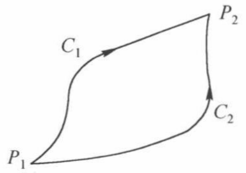

图1.2-2　位场的线积分

可见，线积分与路径无关，只与始末位置有关，这样的场称为位场。静电场就是这样的场。

② 恒等式Ⅱ与无散场

旋度的一个重要性质是：任何矢量场的旋度的散度恒等于零。即

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{1.2-31}$$

恒等式Ⅱ的逆定理是：如果一个矢量场的散度为零，则它可表示为另一个矢量的旋度。

该定理应用于电磁场研究中，可引入辅助矢量位（即矢势），有利于场矢量的求解。例如恒定磁场，因 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，可引入矢量磁位 $\boldsymbol{A}$，令

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.2-32}$$

如果矢量场所在的全部空间中，场的散度处处为零，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，则这种场中不可能存在通量源，因而称为无散场，或无源场。恒定磁场就是这样的场。

由散度定理可知，无散场 $\boldsymbol{F}$ 穿过任何闭合曲面 S 的通量都等于零，即

$$\oint\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.2-33}$$

【例1-3】　已知 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}_x(3y-C_1z)+\boldsymbol{e}_y(C_2x-2z)-\boldsymbol{e}_z(C_3y+z)$

（1）如果 $\boldsymbol{F}$ 是无旋的，试确定常数 C_1、C_2、C_3；

（2）将 C_i 代入，判断 $\boldsymbol{F}$ 能否表示为一个矢量的旋度。

解：（1）因为 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，即

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y-C_1z & C_2x-2z & -C_3y-z \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{e}_x(-C_3+2)+\boldsymbol{e}_y(-C_1)+\boldsymbol{e}_z(C_2-3)=0$$

所以 $C_1=0$，$C_2=3$，$C_3=2$。

（2）只有当 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$ 时，才可使 $\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，因此须计算 $\boldsymbol{F}$ 的散度看是否为零。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = -1\neq 0$$

可见 $\boldsymbol{F}$ 不能表示为一个矢量的旋度，本题中 $\boldsymbol{F}$ 属有源无旋场。

（2）亥姆霍兹定理

可以证明，在有限的区域 V 内，任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件（即限定区域 V 的闭合曲面 S 上的矢量场的分布）唯一地确定，这就是亥姆霍兹定理。

该定理可以从下述两个方面来理解。先看矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在空间的变化率。$\boldsymbol{F}$ 的散度，反映了 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的分量沿这个坐标的变化率；而 $\boldsymbol{F}$ 的旋度，则反映了这些分量沿其他坐标的变化率，两者结合起来，即给定了 $\boldsymbol{F}$ 的所有分量沿空间各个坐标的变化率。依照积分方法，原则上可以确定这个矢量函数 $\boldsymbol{F}$，最多相差一个常矢量。但当边界上的场矢量值给出时，这个矢量也可以确定。于是该矢量唯一确定。对于无界空间，$\boldsymbol{F}$ 仅由它的散度和旋度确定。这时，我们