◎邓　凯　编著

Mathematics Olympiad

# 初中数学竞赛
# 核心思想分类解析

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

# 初中数学竞赛
# 核心思想分类解析

邓 凯 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学竞赛核心思想分类解析 / 邓凯编著. —杭州:浙江大学出版社,2013.2
ISBN 978-7-308-11101-0

Ⅰ.①初… Ⅱ.①邓… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 022563 号

**初中数学竞赛核心思想分类解析**
邓　凯　编著

**责任编辑**　夏晓冬
**封面设计**　刘依群
**出版发行**　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址: http://www.zjupress.com)
**排　　版**　杭州星云光电图文制作工作室
**印　　刷**　杭州日报报业集团盛元印务有限公司
**开　　本**　787mm×1092mm　1/16
**印　　张**　12
**字　　数**　307 千
**版 印 次**　2013 年 2 月第 1 版　2013 年 2 月第 1 次印刷
**书　　号**　ISBN 978-7-308-11101-0
**定　　价**　25.00 元

# 目 录

# 第一讲　式的计算与变形

## 本讲核心明晰
BENJIANGHEXINMINGXI

本讲的主要内容是"式的计算","非负数的性质","绝对值的几何意义"等实数的概念与性质.

本讲的主要题型是"代数式求值".

本讲考查的主要数学思想有:"消元思想","降次思想"和"整体思想"等思想.其中,运用整体思想代入解题时,往往包含有消元思想和降次思想,因此,归类举例时不单独列举.

本讲考查的主要解题方法有:"恒等变形法","代入法"等方法.

## 真题分类解析
ZHENGTIFENLEIJIEXI

### 第一类　"整体思想"类问题

"整体思想"在代数式的化简与求值、解方程(组)、几何解证等方面都有广泛的应用.整体代入,整体运算,整体设元,整体处理,几何中的补形等都是整体思想在解数学问题中的具体运用.

**【例1】**　(2011年初中数学竞赛题1)设$a=\sqrt{7}-1$,则代数式$3a^3+12a^2-6a-12$的值为　(　　)

A. 24　　B. 25　　C. $4\sqrt{7}+10$　　D. $4\sqrt{7}+12$

**【解】**　原式$=3a^3+6a^2+3a+6a^2-9a-12$

$=3a(a^2+2a+1)+6a^2+12a+6-21a-18$

$=3a(a+1)^2+6(a^2+2a+1)-21a-18$

$=3a(a+1)^2+6(a+1)^2-21a-18.$

当$a=\sqrt{7}-1$时,$a+1=\sqrt{7}$.

原式$=3(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}-1+1)^2+6(\sqrt{7}-1+1)^2-21(\sqrt{7}-1)-18$

$=21(\sqrt{7}-1)+42-21(\sqrt{7}-1)-18=24$.故答案选A.

**【点评】**　由$a=\sqrt{7}-1$,可得$a+1=\sqrt{7}$,因此本题在化简时,即构造$(a+1)$这个整体,从而减少计算的复杂程度.

**【例2】**　(2011年初中数学联赛题1)已知$a+b=2$,$\frac{(1-a)^2}{b}+\frac{(1-b)^2}{a}=-4$,则$ab$的值为　(　　)

A. 1　　B. $-1$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

**【解】** 由$\frac{(1-a)^2}{b}+\frac{(1-b)^2}{a}=-4$可得$a(1-a)^2+b(1-b)^2=-4ab$，

即$(a+b)-2(a^2+b^2)+a^3+b^3+4ab=0$，

即$2-2(a^2+b^2)+2(a^2-ab+b^2)+4ab=0$，即$2-2ab+4ab=0$，所以$ab=-1$.

故答案选B.

**【点评】** 由题意，$a+b=2$，本题在化简时，运用了完全平方公式及立方和公式，保持$(a+b)$这个整体，通过消元和降次，从而直接得到所求的结果.

**【例3】** （2010年初中数学联赛题1）若$a,b,c$均为整数且满足$(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$，则$|a-b|+|b-c|+|c-a|$的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

**【解】** 因为$a,b,c$均为整数，所以$a-b$和$a-c$均为整数，

从而由$(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$可得$\begin{cases}|a-b|=1,\\|a-c|=0\end{cases}$或$\begin{cases}|a-b|=0,\\|a-c|=1.\end{cases}$

若$\begin{cases}|a-b|=1,\\|a-c|=0,\end{cases}$则$a=c$，

从而$|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-b|+|b-a|+|a-a|=2|a-b|=2$.

若$\begin{cases}|a-b|=0,\\|a-c|=1,\end{cases}$则$a=b$，

从而$|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-a|+|a-c|+|c-a|=2|a-c|=2$.

因此，$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2$. 故答案选B.

**【点评】** 视$(a-b)$和$(a-c)$为整体，是破解这道题的关键.

## 第二类　“恒等变形”类问题

“恒等变形”就是根据“等式的性质”对已知等式按自己的解题意图进行变形处理，从而将已知等式转化成解题所需要的形式. 在代数式求值中，常常要用到恒等变形的方法.

**【例4】** （2012年初中数学竞赛题6乙）如果$a,b,c$是正数，且满足$a+b+c=9$，$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{9}$，那么$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$的值为________.

**【解】** 在$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{9}$两边乘以$a+b+c=9$得

$3+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=10$，即$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=7$. 故答案填7.

**【点评】** 根据所求代数式及已知式的特点，在$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{9}$两边同时乘以$a+b+c=9$进行恒等变形是解决本题的关键.

**【例5】** （2012年初中数学联赛题7）已知互不相等的实数$a,b,c$满足$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=t$，则$t=$________.

**【解】** 由$a+\frac{1}{b}=t$得$b=\frac{1}{t-a}$，代入$b+\frac{1}{c}=t$得$\frac{1}{t-a}+\frac{1}{c}=t$，

整理得 $ct^2-(ac+1)t+(a-c)=0$　①

又由 $c+\frac{1}{a}=t$ 可得 $ac+1=at$，代入①式得 $ct^2-at^2+(a-c)=0$，

即 $(c-a)(t^2-1)=0$，又 $c\neq a$，所以 $t^2-1=0$，所以 $t=\pm1$.

验证可知：$b=\frac{1}{1-a}$，$c=\frac{a-1}{a}$ 时 $t=1$；$b=-\frac{1}{1+a}$，$c=-\frac{a+1}{a}$ 时 $t=-1$. 因此，$t=\pm1$.

故答案填 $\pm1$.

**【点评】** 根据已知等式消去 $b$，得到关于 $t$ 的一元二次方程是解决本题的突破口，然后再对方程变形，由已知条件求出 $t$ 的值. 多次进行恒等变形和代换是本题的特点.

**【例 6】** （2012 年初中数学联赛题 10）已知实数 $a,b,c$ 满足 $abc=-1$，$a+b+c=4$，$\frac{a}{a^2-3a-1}+\frac{b}{b^2-3b-1}+\frac{c}{c^2-3c-1}=\frac{4}{9}$，则 $a^2+b^2+c^2=$________.

**【解】** 因为 $a^2-3a-1=a^2-3a+abc=a(bc+a-3)=a(bc-b-c+1)=a(b-1)(c-1)$，所以 $\frac{a}{a^2-3a-1}=\frac{1}{(b-1)(c-1)}$.

同理可得 $\frac{b}{b^2-3b-1}=\frac{1}{(a-1)(c-1)}$，$\frac{c}{c^2-3c-1}=\frac{1}{(a-1)(b-1)}$.

结合 $\frac{a}{a^2-3a-1}+\frac{b}{b^2-3b-1}+\frac{c}{c^2-3c-1}=\frac{4}{9}$，

可得 $\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(b-1)}=\frac{4}{9}$，

所以 $\frac{4}{9}(a-1)(b-1)(c-1)=(a-1)+(b-1)+(c-1)$.

结合 $abc=-1$，$a+b+c=4$，可得 $ab+bc+ac=-\frac{1}{4}$.

因此，$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=\frac{33}{2}$.

实际上，满足条件的 $a,b,c$ 可以分别为 $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},4$. 故答案填 $\frac{33}{2}$.

**【点评】** 充分利用已知等式进行恒等变形是解决本题的关键，也是本题的价值体现. 其中，化简 $a^2-3a-1=a^2-3a+abc=a(bc+a-3)=a(bc-b-c+1)=a(b-1)(c-1)$ 的思想值得细细体会.

**【例 7】** （2011 年初中数学竞赛题 4）若 $x>1$，$y>0$，且满足 $xy=x^y$，$\frac{x}{y}=x^{3y}$，则 $x+y$ 的值为　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{11}{2}$

**【解】** 由题设可知 $y=x^{y-1}$，于是 $x=yx^{3y}=x^{4y-1}$，所以 $4y-1=1$.

解得 $y=\frac{1}{2}$，从而 $x=4$. 于是 $x+y=\frac{9}{2}$. 故答案选 C.

**【点评】** 题中含有两个字母，用含 $x$ 的式子表示 $y$，即由题设得 $y=x^{y-1}$ 是解决本题的关键，这里主要运用了“代入法”.

**【例 8】** (2010 年初中数学竞赛题 1)若$\frac{a}{b}=20$，$\frac{b}{c}=10$，则$\frac{a+b}{b+c}$的值为 ( )

A. $\frac{11}{21}$ B. $\frac{21}{11}$ C. $\frac{110}{21}$ D. $\frac{210}{11}$

**【解】** 由题设得$\frac{a+b}{b+c}=\frac{\frac{a}{b}+1}{1+\frac{c}{b}}=\frac{20+1}{1+\frac{1}{10}}=\frac{210}{11}$. 故答案选 D.

**【点评】** 本题的解决运用了恒等变形的思想，即通过恒等变形把“所求代数式”化成“已知代数式”的形式，从而直接代入可求得答案.

**【例 9】** (2011 年初中数学联赛题 6)已知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}$，则$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}$的值为 ( )

A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

**【解】** 由已知等式得$\frac{xy+zx}{x+y+z}=2$，$\frac{yz+xy}{x+y+z}=3$，$\frac{zx+yz}{x+y+z}=4$，所以$\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}=\frac{9}{2}$.

于是，$\frac{yz}{x+y+z}=\frac{5}{2}$，$\frac{zx}{x+y+z}=\frac{3}{2}$，$\frac{xy}{x+y+z}=\frac{1}{2}$. 所以$\frac{y}{x}=\frac{5}{3}$，$\frac{z}{y}=3$，$\frac{y}{x}=\frac{5}{3}$，即 $z=3y=5x$.

代入$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2}$，得$\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{5}{3}x+5x}=\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{23}{10}$.

所以$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=\frac{2}{x}+\frac{3}{\frac{5}{3}x}+\frac{4}{5x}=\frac{23}{5x}=2$，答案选 C.

**【点评】** 本题连续多次运用恒等变形，最终把“已知式”化成“未知式”的形式.

**【例 10】** (2007 年初中数学联赛 1)已知 $x,y,z$ 满足$\frac{2}{x}=\frac{3}{y-z}=\frac{5}{z+x}$，则$\frac{5x-y}{y+2z}$的值为 ( )

A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

**【解】** 由$\frac{2}{x}=\frac{3}{y-z}=\frac{5}{z+x}$得 $y=3x$，$z=\frac{3}{2}x$，所以$\frac{5x-y}{y+2z}=\frac{5x-3x}{3x+3x}=\frac{1}{3}$，故选 B.

**【点评】** 本题运用了消元思想，由已知分别用含 $x$ 的式子表示 $y$ 和 $z$，然后代入所求式，约去 $x$ 即可得到答案.

**【例 11】** (2007 年初中数学联赛 2)当 $x$ 分别取值$\frac{1}{2007}$，$\frac{1}{2006}$，$\frac{1}{2005}$，…，$\frac{1}{2}$，1，2，…，2005，2006，2007 时，计算代数式$\frac{1-x^2}{1+x^2}$的值，将所得的结果相加，其和等于 ( )

A. $-1$ B. 1 C. 0 D. 2007

**【解】** 因为$\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1-n^2}{1+n^2}=\frac{n^2-1}{n^2+1}+\frac{1-n^2}{1+n^2}=0$，即当 $x$ 分别取值$\frac{1}{n}$，$n$($n$ 为正整

数)时,计算所得的代数式的值之和为 0;而当 $x=1$ 时,$\frac{1-1^2}{1+1^2}=0$. 因此,当 $x$ 分别取值 $\frac{1}{2007}$, $\frac{1}{2006}$, $\frac{1}{2005}$, $\cdots$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, $\cdots$, 2005, 2006, 2007 时,计算所得各代数式的值之和为 0. 故选 C.

**【点评】** 观察发现,此题的计算必含规律,而且,由试题的结构可以猜想 $x$ 的值互为倒数时,代数式的值的和的关系,所以,尝试计算两个 $x$ 的值互为倒数时,代数式的值,从中发现规律.

### 第三类 "非负数"类问题

求解某些代数式化简求值类题时,利用"非负数"的性质往往能找到解题的突破口. 常见的非负数有三类,一类是数或式的绝对值;还有一类是数或式的完全偶次方;再还有一类是数或式的偶次方根.

**【例 12】** (2009 年初中数学竞赛 1)已知非零实数 $a$, $b$ 满足 $|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$, 则 $a+b$ 等于 ( )

A. $-1$　　B. 0　　C. 1　　D. 2

**【解】** 由题设知 $a\geqslant3$, 所以, 题设的等式为 $|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}=0$, 于是 $a=3$, $b=-2$, 从而 $a+b=1$. 故答案选 C.

**【点评】** 利用"非负数"的性质得到 $a\geqslant3$ 是解决本题的关键. 由此,可以把原等式转化为"非负数之和等于 0"的形式,从而求得 $a$, $b$ 的值.

**【例 13】** (2012 年初中数学竞赛 1 甲)如果实数 $a$, $b$, $c$ 在数轴上的位置如图,那么代数式 $\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$ 可以化简为 ( )

A. $2c-a$　　B. $2a-2b$

C. $-a$　　D. $a$

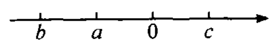

图 1-1

**【解】** 由实数 $a$, $b$, $c$ 在数轴上的位置可知 $b<a<0<c$, 且 $|b|>c$,

所以 $\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|=-a+(a+b)+(c-a)-(b+c)=-a$.

故答案选 C.

**【点评】** 本题主要考查二次根式的化简以及绝对值的意义.

**【例 14】** (2010 年初中数学联赛题 2)若实数 $a$, $b$, $c$ 满足等式 $2\sqrt{a}+3|b|=6$, $4\sqrt{a}-9|b|=6c$, 则 $c$ 可能取的最大值为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

**【解】** 由两个已知等式进行"加减消元法"可得 $\sqrt{a}=\frac{3}{5}(c+3)$, $|b|=\frac{2}{5}(2-c)$,

由 $|b|\geqslant0$, 得 $c\leqslant2$. 当 $c=2$ 时, 可得 $a=9$, $b=0$, 满足已知等式.

所以 $c$ 可能取的最大值为 2. 答案选 C.

**【点评】** 本题主要考查了"方程思想".

**【例 15】** (2005 年初中数学竞赛 2)若 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$ ($x$, $y$ 是实数), 则 $M$ 的值一定是 ( )

A. 正数　　B. 负数　　C. 零　　D. 整数

**【解】** 因为 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13=2(x-2y)^2+(x-2)^2+(y+3)^2\geqslant0$

且 $x-2y$，$x-2$，$y+3$ 这三个数不能同时为 0，所以 $M>0$. 故答案选 A.

**【点评】** 将原式"配方"成完全平方的形式是解决本题的关键.

**真题练习**
ZHENGTILIANXI

1.（2011 年初中数学竞赛副题 1）设 $a=\sqrt{7}-1$，则代数式 $a^2+2a-12$ 的值为（　　）

A. $-6$　　B. $24$　　C. $4\sqrt{7}+10$　　D. $4\sqrt{7}+12$

2.（2010 年初中数学竞赛 6）已知 $a=\sqrt{5}-1$，则 $2a^3+7a^2-2a-12$ 的值等于________.

3.（2011 年初中数学竞赛天津卷 1）设 $x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$，则代数式 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $-1$　　D. 2

4.（2011 年初中数学竞赛天津卷 2）已知 $x,y,z$ 为实数，且满足 $x+2y-5z=3$，$x-2y-z=-5$，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{1}{11}$　　B. 0　　C. 5　　D. $\dfrac{54}{11}$

5.（2008 年初中数学联赛 7）设 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $\dfrac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^3-a}=$________.

6.（2008 年初中数学联赛 6）已知实数 $x,y$ 满足 $(x-\sqrt{x^2-2008})(y-\sqrt{y^2-2008})=2008$，则 $3x^2-2y^2+3x-3y-2007$ 的值为（　　）

A. $-2008$　　B. 2008　　C. $-1$　　D. 1

7.（2007 年初中数学联赛 1）设 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，$a$ 是 $x$ 的小数部分，$b$ 是 $-x$ 的小数部分，则 $a^3+b^3+3ab=$________.

8.（2006 年初中数学竞赛 2）已知 $m=1+\sqrt{2}$，$n=1-\sqrt{2}$，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 $a$ 的值等于（　　）

A. $-5$　　B. 5　　C. $-9$　　D. 9

9.（2006 年初中数学竞赛 6）已知 $a,b,c$ 为整数，且 $a+b=2006$，$c-a=2005$. 若 $a<b$，则 $a+b+c$ 的最大值为________.

10.（2004 年初中数学竞赛 8）已知实数 $a,b,x,y$ 满足 $a+b=x+y=2$，$ax+by=5$，则 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=$________.

11.（2004 年初中数学联赛 12）已知实数 $a,b,c,d$ 互不相等，且 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=x$，试求 $x$ 的值.

12.（2002 年全国初中数学竞赛试题 1）设 $a<b<0$，$a^2+b^2=4ab$，则 $\dfrac{a+b}{a-b}$ 的值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. 2　　D. 3

13.（2002 年全国初中数学竞赛试题 2）已知 $a=1999x+2000$，$b=1999x+2001$，$c=1999x+2002$，则多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

14.(2003 年全国初中数学竞赛试题 1)若 $4x-3y-6z=0$, $x+2y-7z=0(xyz\neq 0)$,则 $\frac{5x^2+2y^2-z^2}{2x^2-3y^2-10z^2}$ 的值等于　　(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{19}{2}$　　C. $-15$　　D. $-13$

15.(2003 年全国初中数学竞赛试题 7)若实数 $x,y,z$ 满足 $x+\frac{1}{y}=4$, $y+\frac{1}{z}=1$, $z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$,则 $xyz$ 的值为________.

16.(2012 年全国初中数学竞赛天津赛区初赛 6)若 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-2$,则 $x^2-\frac{1}{x^2}$ 的值为________.

17.(2012 年全国初中数学竞赛河南预赛 7)若 $m-n=2$,则 $2m^2-4mn+2n^2-1$ 的值为________.

18.(2008 年全国初中数学竞赛浙江省初赛试题 1)已知 $x+y=x^{-1}+y^{-1}\neq 0$,则 $xy$ 的值为　　(　　)

A. $-1$　　B. 0　　C. 1　　D. 21

# 第二讲　数的计算与推理

## 本讲核心明晰
BENJIANGHEXINGMINGXI

本讲的主要内容是“数的计算”,包括有理数的计算,无理数的计算等,还有“算法”,“估算”等内容.

本讲的主要题型是“数的计算”与“数的比较”.

本讲考查的主要数学思想有“构造思想”和“整体思想”等思想.

本讲考查的主要解题方法有“递推法”,“放缩法”,“裂项相消法”,“倒序相加法”,“作差比较法”等方法.

## 真题分类解析
ZHENGTIFENLEIJIEXI

### 第一类　“算法”类问题

“算法”在初中范围内,主要是考查对给定的数按给定的程序进行各种计算.当然,也可能与代数式求值,解方程以及解不等式综合起来考查.

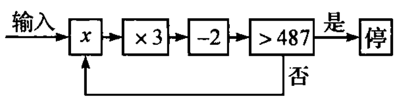


图 2-1

**【例 1】**　(2012 年初中数学竞赛 6 甲)按如图 2-1 的程序进行操作,规定:程序运行从“输入一个值 $x$”到“结果是否>487?”为一次操作.如果操作进行四次才停止,那么 $x$ 的取值范围是________.

**【解】**　前四次操作的结果分别为

$3x-2,3(3x-2)-2=9x-8,3(9x-8)-2=27x-26,3(27x-26)-2=81x-80.$

由已知得 $\begin{cases}27x-26\leqslant 487,\\81x-80>487.\end{cases}$

解得 $7<x\leqslant 19$.

容易验证,当 $7<x\leqslant 19$ 时,$3x-2\leqslant 487$,$9x-8\leqslant 487$,故 $x$ 的取值范围是 $7<x\leqslant 19$.

故答案填 $7<x\leqslant 19$.

**【点评】**　本题与一般的“算法”类问题不同,一般的“算法”类问题是给定一个算法,代入具体的数值直接计算,而本题是设置一定的要求,求输入值的取值范围,本质是考查“不等式”的解法,但根据题意,合理列出不等式才是解决本题的关键.

### 第二类　“有理数的计算”类问题

竞赛题中“有理数的计算”主要是与“数列”的知识联系起来考查,通常会用到裂项相消法,错位相减法以及放缩法等技巧.

**【例 2】**　(2011 年初中数学竞赛 5)设 $S=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{2011^3}$,则 $4S$ 的整数部分等于　　　　　　　　　　　　(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【解】 当 $k=2,3,\cdots,2011$ 时，因为 $\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k(k^2-1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right]$，

所以 $1<S=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{2011^3}<1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2011\times2012}\right)<\frac{5}{4}$.

于是有 $4<4S<5$，故 $4S$ 的整数部分等于4. 故答案选 A.

【点评】 本题利用了解决不等式问题的“放缩法”，从而对和式 $S$ 进行了两端“紧逼”，从而确定 $S$ 值的范围.

【例 3】 (2012 年初中数学竞赛副题 8)设 $a_n=\frac{2^n}{2^{2n+1}-2^{n+1}-2^n+1}$ ($n$ 为正整数)，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2012}$ 的值________1.(填“$>$”，“$=$”或“$<$”)

【解】 由 $a_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，得

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2012}=\left(1-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2012}-1}-\frac{1}{2^{2013}-1}\right)$$

$=1-\frac{1}{2^{2013}-1}<1$. 故答案填 $<$.

【点评】 本题运用“构造法”将 $\frac{2^n}{2^{2n+1}-2^{n+1}-2^n+1}$ 变形为 $\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$，然后利用裂项相消法，从而求得答案.

【例 4】 (2007 年初中数学竞赛 10)已知对于任意正整数 $n$，都有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$，则 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}=$________.

【解】 当 $n\geqslant2$ 时，有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$，

相应的，$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^3$，

两式相减，得 $a_n=3n^2-3n+1$，

所以 $\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{3n(n-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，$n=2,3,4,\cdots$，

因此 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{33}{100}$. 故答案填 $\frac{33}{100}$.

【点评】 本题运用了“构造法”，求得了 $\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{3n(n-1)}$，然后利用裂项相消法，从而求得答案.

【例 5】 (2005 年初中数学竞赛 5)设 $a,b$ 是正整数，且满足 $56\leqslant a+b\leqslant59$，$0.9<\frac{a}{b}<0.91$，则 $b^2-a^2$ 等于　　(　　)

A. 171　　B. 177　　C. 180　　D. 182

【解】 由题设得 $0.9b+b<59$，$0.91b+b>56$，所以 $29<b<32$. 因此 $b=30,31$.

当 $b=30$ 时，由 $0.9b<a<0.91b$，得 $27<a<28$，这样的正整数 $a$ 不存在.

当 $b=31$ 时，由 $0.9b<a<0.91b$，得 $27<a<29$，所以 $a=28$.

所以 $b^2-a^2=177$. 答案选 B.

【点评】 本题利用两个不等式给出了 $a,b$ 的范围，通过将不等式变形，可以确定具体的范围，然后取整数并验证，从而求出具体的数值及答案.

### 第三类 “无理数的计算”类问题

“无理数的计算”通常考查的是二次根式的变形，包括多重根号的化简以及分母有理化、分子有理化等思想方法.

【例 6】 (2005 年初中数学联赛 1)化简 $\dfrac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$ 的结果是 ( )

A. 无理数　　B. 真分数　　C. 奇数　　D. 偶数

【解】 $\dfrac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$

$=\dfrac{1}{4+\sqrt{50+2\sqrt{450}+9}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{50-2\sqrt{800}+16}}$

$=\dfrac{1}{4+5\sqrt{2}+3}+\dfrac{1}{3-5\sqrt{2}+4}=\dfrac{1}{7+5\sqrt{2}}+\dfrac{1}{7-5\sqrt{2}}=\dfrac{7-5\sqrt{2}+7+5\sqrt{2}}{49-50}=-14.$

所以答案选 D.

【点评】 对于含有“多重根号”的式子，通常都是将根号的式子变形为“完全平方式”，逐步“脱根号”.

【例 7】 (2005 年初中数学联赛 8) $\sqrt{7x^2+9x+13}+\sqrt{7x^2-5x+13}=7x$，则 $x=$_____.

【解】 将原等式左边分子有理化，得：$\dfrac{14x}{\sqrt{7x^2+9x+13}-\sqrt{7x^2-5x+13}}=7x$，

$\because x\neq 0$，$\therefore \sqrt{7x^2+9x+13}-\sqrt{7x^2-5x+13}=2$，即 $\sqrt{7x^2+9x+13}=\sqrt{7x^2-5x+13}+2$

两边平方化简得：$7x-2=2\sqrt{7x^2-5x+13}$.

再平方化简得：$21x^2-8x-48=0$，解之得 $x=\dfrac{12}{7}$ 或 $x=-\dfrac{4}{3}$（舍去）.

【点评】 题中的两个根式形式大体相同，而且是和的形式，因此考虑利用分子有理化的技巧.

【例 8】 (2012 年初中数学联赛 1)已知 $a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-2$，那么 $a,b,c$ 的大小关系是 ( )

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

【解】 因为 $\dfrac{1}{a}=\sqrt{2}+1$，$\dfrac{1}{b}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，所以 $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，故 $b<a$.

又 $c-a=(\sqrt{6}-2)-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{6}-(\sqrt{2}+1)$，

而 $(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}+1)^2=3-2\sqrt{2}>0$，

所以 $\sqrt{6}>\sqrt{2}+1$，故 $c>a$. 因此 $b<a<c$，答案选 C.

【点评】 本题主要考查的是二次根式分母有理化以及实数的大小比较. 对于三个数大小的比较，通常都是先比较其中两个数的大小，再用第三个数与前两个数中的一个比较，从而即可排序.

### 第四类　"数的比较"类问题

"数的比较"问题出现在竞赛题中，通常都是与不等式的变形与放缩联系在一起的，当然，掌握作差法、作商法等常见比较数的大小的方法也很重要.

**【例 9】** (2005 年初中数学竞赛 4)设 $A=48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$，则与 $A$ 最接近的正整数为　　(　　)

A. 18　　B. 20　　C. 24　　D. 25

**【解】** 对于正整数 $n\geqslant3$，有 $\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以

$$A=48\times\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{98}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{102}\right)\right]$$

$$=12\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)$$

$$=25-12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right)$$

因为 $12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right)<12\times\frac{4}{99}<\frac{1}{2}$，所以与 $A$ 最接近的正整数为 25.

故答案选 D.

**【点评】** 对于像本题中具有相同形式的算式，通常都是对其"通项"进行变形，达到"裂项相消"的目的，对最后的结果利用"放缩法"取最值的方法值得细心体会.

**【例 10】** (2005 年初中数学联赛 3)设 $r\geqslant4$，$a=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}$，$b=\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}$，$c=\frac{1}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}$，则下列各式一定成立的是　　(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

**【解法一】** 用特殊值法，取 $r=4$，则有

$$a=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20},b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{5-2\sqrt{5}}{10}=\frac{2(5-2\sqrt{5})}{20}\approx\frac{1.056}{20},$$

$$c=\frac{1}{4(2+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{5}-2}{4}=\frac{5(\sqrt{5}-2)}{20}\approx\frac{1.18}{20}.$$

$\therefore c>b>a$，答案选 D.

**【解法二】** $\because r\geqslant4$，$\therefore\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{r+1}}<1$，

$$\therefore a=\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{r+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}\right)<\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}=b,$$

$$c=\frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{r}>\frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{\sqrt{r}\sqrt{r+1}}=\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}=b.$$

$\therefore a<b<c$，答案选 D.

**【点评】** 对于选择和填空题，像本题这样的形式，通常都可以利用特殊值法求结果，而解法二提供了"不等式的放缩法"示范，其中的奥妙值得体会.

## 真题练习
ZHENGTILIANXI

1.(2011 年初中数学竞赛 2)对于任意实数 $a,b,c,d$,定义有序实数对$(a,b)$与$(c,d)$之间的运算"△"为:$(a,b)\triangle(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$.如果对于任意实数 $u,v$,都有$(u,v)\triangle(x,y)=(u,v)$,那么$(x,y)$为 ( )

A. $(0,1)$ B. $(1,0)$ C. $(-1,0)$ D. $(0,-1)$

2.(2009 年初中数学联赛 9)如果实数 $a,b$ 满足条件 $a^2+b^2=1$,$|1-2a+b|+2a+1=b^2-a^2$,则 $a+b=$________.

3.(2006 年初中数学竞赛 9)已知 $0<a<1$,且满足 $\left[a+\frac{1}{30}\right]+\left[a+\frac{2}{30}\right]+\cdots+\left[a+\frac{29}{30}\right]=18$,则$[10a]$的值等于________.($[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数)

4.(2012 年初中数学竞赛 1 乙)如果 $a=-2+\sqrt{2}$,那么 $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+a}}$的值为 ( )

A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

5.(2003 年初中数学联赛 1)$2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$的值为 ( )

A. $5-4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}-1$ C. 5 D. 1

6.(2005 年初中数学联赛 7)不超过 100 的自然数中,将凡是 3 或 5 的倍数的数相加,其和为________.

7.(2005 年初中数学联赛 9)若实数 $x,y$ 满足 $\frac{x}{3^3+4^3}+\frac{y}{3^3+6^3}=1$,$\frac{x}{5^3+4^3}+\frac{y}{5^3+6^3}=1$,则 $x+y=$________.

8.(2003 年全国初中数学竞赛试题 6)已知 $x=1+\sqrt{3}$,那么$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=$____.

9.(俄罗斯中学生数学奥林匹克第 25 届第Ⅳ阶段八年级 2)在正整数 $A$ 的右边添上 3 个数字,组成一个新数,这个新数等于从 1 到 $A$ 的所有正整数之和,求 $A$.

10.(俄罗斯中学生数学奥林匹克第 25 届第Ⅳ阶段九年级 1)沿圆周按顺序依次写下从 1 至 $N(N>2)$的正整数,同时每对相邻的两个数,按十进制数表示法,它们至少有 1 个数字相同,求 $N$ 的最小值.

11.(2012年全国初中数学竞赛海南初赛试卷3)实数$a=2012^3-2012$,下列各数中不能整除$a$的是(　　)

A. 2013　　B. 2012　　C. 2011　　D. 2010

12.(2011年初中数学联赛2)已知$a=\sqrt{3}-1$,则$a^{2012}+2a^{2011}-2a^{2010}$的值为________.

13.(2010年全国初中数学竞赛天津初赛1)计算$\frac{2010^2-2009^2}{2010^2-2009\times2011+2\times2009}$的值为(　　)

A. 1　　B. $-1$　　C. 2009　　D. 2010

14.(2000年初中数学竞赛7)已知:$a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$,那么$\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}=$________.

15.(2010年全国初中数学竞赛天津初赛9)有$n$个连续的自然数$1,2,3,\cdots,n$,若去掉其中的一个数$x$后,剩下的数的平均数是16,则满足条件的$n$和$x$的值分别是____________.

16.(2011年全国初中数学联赛江西省初赛试题1)化简$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$的结果是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

17.(2011年全国初中数学联赛江西省初赛试题2)化简$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$的结果是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $-2$