

# 混沌函数投影 同步理论及其 保密通信应用

杜洪越 ◇ 编著

HUNDUN HANSHU TOUYING TONGBU LILUN JIQI BAOMI TONGXIN YINGYONG

# 混沌函数投影

同步理论及其  
保密通信应用

杜洪越 ◇ 编著

HUNDUN HANSHU TONGYU TONGBU LIANJI CHUWUJI YOUNGQIN JIYU



## 图书在版编目(CIP)数据

混沌函数投影同步理论及其保密通信应用 / 杜洪越  
编著. -- 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社, 2012. 10  
ISBN 978 - 7 - 81129 - 540 - 5

I. ①混… II. ①杜… III. ①混沌理论 - 应用 - 保密  
通信 IV. ①TN918. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 221179 号

混沌函数投影同步理论及其保密通信应用  
HUNDUN HANSHU TOUYING TONGBU LILUN JIQI BAOMI TONGXIN YINGYONG  
杜洪越 编著

---

责任编辑 李 丽 肖嘉慧  
出版发行 黑龙江大学出版社  
地 址 哈尔滨市南岗区学府路 74 号  
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司  
开 本 720 × 1000 1/16  
印 张 18.5  
字 数 249 千  
版 次 2012 年 10 月第 1 版  
印 次 2012 年 10 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978 - 7 - 81129 - 540 - 5  
定 价 48.00 元

---

本书如有印装错误请与本社联系更换。

版权所有 侵权必究

# 前　　言

混沌是当今前沿的研究课题,是指在确定性的动态系统中出现的一种貌似无规则的、随机的运动,是非线性动态系统所特有的一种运动形式。混沌揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性,反映了世界上无序和有序之间、确定性与随机性之间的辩证统一关系。它是继相对论、量子论之后的又一重大科学发现,是 20 世纪物理学三大成就之一。最近 30 年来,混沌理论的研究得到了迅猛的发展,混沌科学更是与其他科学互相渗透,已成为一门覆盖面广、跨学科大、综合性强的学科,其涉及数学、力学、物理学等自然科学与社会科学领域,揭开了现代科学发展的新篇章。

在混沌研究中,混沌同步是一个很有前景的研究领域。自 20 世纪 90 年代,美国海军实验室的科学家 L. M. Pecora 和 T. L. Carroll 提出混沌自同步原理,并且在电路实验中验证了混沌同步的现象以来,混沌同步作为混沌科学研究的一个热点问题迅速地发展起来,并在保密通信、图像处理等应用方面取得了可喜的进展。近年来,有关混沌系统同步的研究越来越受到国内外学者的广泛关注,对其应用的研究也进入了蓬勃发展的时期,一些发达国家的科研和军事部门投入了大量的人力物力开展混沌同步的理论和实验研究,使混沌同步很快成为非线性科学的一个热门研究课题。

简单地讲,同步就是指动态系统中步调一致的一种现象。而混沌同步指的是两个混沌系统,从不同的初始条件出发,经过一个暂态过渡过程之后,状态或者输出按某种方式达到一致。例如在保密通信中,可以利用混沌信号来加密所要传输的信息信号,利用混沌运动的不规律性来实现保密通信的功能。但是在解密时,需要重构加密在信

号中的混沌信号,这样就需要解决混沌同步问题。迄今为止,人们提出了很多种混沌同步的方式,如混沌系统的完全同步、相同步、广义同步、滞后同步、投影同步和函数投影同步等。其中函数投影同步由于其不可预料的尺度函数可进一步增强保密通信中信息的安全性,因而近期被广泛研究。

函数投影同步是指驱动系统和响应系统的状态变量按一个给定的尺度函数进行同步。函数投影同步是一种更为广泛的混沌同步定义,当函数投影同步中的尺度函数取为1时即为完全同步,取-1时为反同步,取其他常数时即为投影同步,因此对于函数投影同步的研究更具普遍意义。另外,由于尺度函数的引入可使同步的混沌系统的复杂程度及混沌程度增加,而根据密码学原理,复杂度越大,系统越难破译,所以利用函数投影同步进行保密通信可进一步增加信息的安全性。近年来,函数投影同步理论及利用其进行保密通信的理论引起了广大研究者的兴趣,并逐渐成为混沌同步领域研究的新热点问题而被广泛研究。

本书首先对目前常用的一些混沌同步理论及方法进行了介绍,然后,针对近几年被广泛研究的一种新的混沌同步理论即函数投影同步理论,进行了深入的研究,给出了任意两个混沌系统达到函数投影同步的通用方法;并进一步针对系统在未知参数、参数不确定扰动、时间滞后等情况下给出实现函数投影同步的方法;之后扩展函数投影同步中的尺度函数为尺度函数矩阵并提出改进函数投影同步,研究实现改进函数投影同步的通用方法及其在未知参数、参数不确定扰动、时间滞后等情况下实现同步的方法,并介绍了该领域其他一些科研成果;进一步研究了利用函数投影同步和改进函数投影同步实现保密通信的几类方法;最后,鉴于复杂网络同步为当今热门的研究领域,研究了如何在驱动响应动态网络中实现函数投影同步和改进函数投影同步的理论。

本书的研究得到国家自然科学基金青年科学基金项目“基于混沌系统函数投影同步的保密通信方法研究”(批准号:61004014),黑龙江

省教育厅科学技术研究项目“混沌系统函数投影同步理论及应用的研究”(批准号:11551088)及哈尔滨理工大学青年拔尖创新人才培养计划的资助。同时,本书的出版得到了黑龙江省教育厅“黑龙江省普通高等学校优秀学术著作出版资助项目”的资助,在此深表感谢!

# 目 录

<b>第1章 混沌同步概述 .....</b>	<b>1</b>
1.1 混沌及混沌同步的基本概念 .....	1
1.2 混沌同步的发展 .....	5
1.3 混沌同步方式 .....	7
1.4 混沌同步方法 .....	12
<b>第2章 函数投影同步 .....</b>	<b>21</b>
2.1 引言 .....	21
2.2 函数投影同步的定义 .....	22
2.3 基于反步法的函数投影同步法 .....	34
2.4 耦合的部分线性混沌系统函数投影同步通用方法 .....	41
2.5 相同模型的函数投影同步通用方法 .....	49
2.6 不同模型的函数投影同步通用方法 .....	63
<b>第3章 改进函数投影同步 .....</b>	<b>72</b>
3.1 引言 .....	72
3.2 改进函数投影同步的定义 .....	73
3.3 耦合的部分线性混沌系统改进函数投影同步法 .....	74
3.4 相同模型改进函数投影同步通用方法 .....	80
3.5 不同模型改进函数投影同步通用方法 .....	91
3.6 分数阶混沌系统改进函数投影同步 .....	100
3.7 离散混沌系统的改进函数投影同步 .....	106

<b>第4章 自适应函数投影同步</b>	111
4.1 引言	111
4.2 自适应函数投影同步通用方法	111
4.3 统一混沌系统的自适应改进函数投影同步	118
4.4 不同维混沌系统的自适应改进函数投影同步	124
4.5 自适应变换改进函数投影同步	136
4.6 离散混沌系统的自适应改进函数投影同步	141
<b>第5章 滞后函数投影同步</b>	145
5.1 引言	145
5.2 滞后函数投影同步	146
5.3 带未知参数的滞后函数投影同步	160
5.4 滞后改进函数投影同步	165
5.5 多重时延自适应改进函数投影同步	180
<b>第6章 带参数扰动的混沌系统函数投影同步</b>	185
6.1 引言	185
6.2 系统参数已知的函数投影同步方法	185
6.3 系统参数未知的函数投影同步方法	192
6.4 系统参数已知的改进函数投影同步法	197
<b>第7章 函数投影同步在保密通信中的应用</b>	205
7.1 引言	205
7.2 混沌保密通信概述	206
7.3 基于混沌掩盖的函数投影同步保密通信法	209
7.4 基于混沌掩盖的改进函数投影同步保密通信法	225
7.5 基于混沌参数调制的保密通信方法	232

<b>第 8 章 驱动 – 响应动态网络的函数投影同步</b>	.....	239
8.1 引言	.....	239
8.2 驱动 – 响应动态网络的函数投影同步定义	.....	241
8.3 耦合的部分线性驱动 – 响应动态网络函数投影同步	.....	242
8.4 带不匹配项的驱动 – 响应动态网络函数投影同步	.....	246
8.5 带时变耦合时延的驱动 – 响应动态网络函数投影同步	...	254
8.6 驱动 – 响应动态网络中的改进函数投影同步	.....	261
8.7 带时变耦合时延的驱动 – 响应动态网络改进函数投影同步	.....	267
<b>参考文献</b>	.....	273

# 第1章 混沌同步概述

混沌同步是非线性科学领域的一个热门研究课题,其在保密通信领域中的应用前景广阔。在保密通信领域中,我们可以利用混沌信号来加密我们要传输的信号,利用混沌运动的不规律性来实现保密通信功能。但是在解密时,我们需要重构加密在信号中的混沌信号,这样就产生了混沌同步的问题。目前对混沌同步问题的研究,国内外已有了一定的研究成果,但是由于混沌系统的复杂性和多样性使得混沌同步研究仍为当今一个很有前景的科学前沿课题,特别是如何利用混沌同步所具有的特性来造福人类,是一个极其重大而意义深远的研究课题。本章介绍混沌及混沌同步的基本概念、混沌同步的研究现状及目前已有一些混沌同步方式和方法。

## 1.1 混沌及混沌同步的基本概念

### 1.1.1 混沌的定义

混沌是自然界普遍存在的一种现象,它在物理、化学、生物学和社会科学等众多学科中都有发生。混沌是一种混乱而有序的运动状态,广泛地存在于从宏观到微观的各种非线性系统中。尽管目前混沌引起了学术界的广泛关注,且被广泛研究<sup>[1-5]</sup>,但由于混沌系统的奇异性和复杂性至今尚未被人们彻底揭示,因此,至今仍没有被统一认可的混沌定义,但是出于研究和表述混沌的需要,不同领域的学者从不同角度给出了混沌的定义。

1975年,华裔数学家李天岩(T. Y. Li)和美国数学家J. A. Yorke在*Amer. Math. Monthly*上发表了著名文章*Period Three Implies Chaos*,文中提出了混沌的一种定义,称为Li-Yorke定义<sup>[6]</sup>,它是关于混沌的最早的数学定义。

**定义1.1** (Li-Yorke混沌定义) 称闭区间I上的连续自映射 $u_1, u_2, u_3$ 是混沌的,如果它满足下列条件:

(1)  $f$ 的周期点周期无上界;

(2) 闭区间I上存在不可数子集 $S$ , $S$ 中不包含周期点,且满足

(i) 对任意 $x \in S$ 和 $f$ 的任一周期点 $y$ ,有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$$

(ii) 对任意 $x, y \in S, x \neq y$ ,有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$$

(iii) 对任意 $x, y \in S$ ,有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$$

简单地讲就是:对闭区间上的连续自映射 $f$ ,如果存在一个周期为3的周期点,就一定存在周期为任意正整数的周期点,则一定会出现混沌现象。这个定义表述了混沌运动的3个重要特征:第一,存在所有阶的周期轨道;第二,存在不可数的无穷多个稳定的非周期轨道,存在一个不可数集合,该集合只含有混沌轨道,且任意两个轨道既不趋向远离,也不趋向接近,而是两种状态交替出现,同时任一轨道不趋于任一周期轨道,即该集合不存在渐近周期轨道;第三,混沌轨道具有高度的不稳定性。

Devaney的混沌定义是从拓扑的角度进行定义的,它是另一种影响比较广泛的混沌数学定义。<sup>[7]</sup>

**定义1.2** (Devaney混沌定义) 设 $V$ 是一度量空间,映射 $f: V \rightarrow V$ ,如果满足下面3个条件,则称 $f$ 在 $V$ 上是混沌的。

(1) 对初值敏感依赖。存在 $\delta > 0$ ,对任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $x \in V$ ,在 $x$ 的 $\varepsilon$ 邻域 $I$ 内存在 $y$ 和自然数 $n$ ,使得 $d[f^n(x), f^n(y)] > \delta$ 。

(2) 拓扑传递性。对 $V$ 上的任意开集 $X, Y$ ,存在 $k > 0$ , $f^k(X) \cap$

$Y \neq \phi$  (如一映射具有稠密轨道, 则它显然是拓扑传递的)。

(3) $f$  的周期点集在  $V$  中稠密。

Devaney 的混沌定义从另一个角度表述了混沌运动的几个重要特征。第一个特征是混沌运动对初值的敏感依赖性, 即无论  $x$  和  $y$  距离有多近, 在  $f$  的多次作用下, 两者之间的距离  $d$  都会扩大到一定程度, 而这样的  $y$  在  $x$  任意一个小的邻域内都存在。对这样的  $f$ , 如果用计算机计算其轨道, 则任意微小的初始误差都将导致多次迭代后的计算结果与实际结果产生足够大的差异, 从而导致计算失败。因此, 对初值的敏感依赖性也称为不可预测性。第二个特征是混沌运动的拓扑传递性, 即在  $f$  的多次作用下, 任一点的邻域将遍及度量空间  $V$ , 因此,  $f$  不可能分解为两个在  $f$  下互不影响的子系统。第三个特征是混沌运动周期轨道的稠密性, 即混沌系统形似混乱而实则有序, 其绝非混乱一片, 而是存在着规律性。

### 1.1.2 混沌同步的定义

目前, 在理论研究和实际试验中逐步形成了几种不同的混沌同步的概念, 本节简单介绍一些最著名的混沌同步定义, 其中包括完全同步、广义同步、滞后同步和相同步。

完全同步是目前关于混沌同步研究最多的一种同步, 其是指两个相同或不同混沌系统的状态最终达到一致。因此, 从控制的角度看, 是设计同步控制器使传送系统和接收系统状态之间的误差渐近稳定。

**定义 1.3(完全同步)** 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$$

其中  $x \in R^n, y \in R^m, f_1: R^n \rightarrow R^n, f_2: R^m \rightarrow R^m$ 。令  $z = (x, y)^T$ , 称两个子系统达到完全同步, 若  $m = n$ , 使得:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$$

式中的  $x(t)$  和  $y(t)$  是系统的解。

广义同步是 Rulkov 等人在 1996 年针对耦合的混沌系统提出的，对于两个不完全相同的混沌系统，当它们相应的系统变量之间存在一定的函数关系时，则称这种同步为广义同步。由于广义同步引入了额外的函数，使得它与完全同步相比，其在保密通信的应用中更具安全性。

**定义 1.4(广义同步)** 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$$

其中  $x \in R^n, y \in R^m, f_1: R^n \rightarrow R^n, f_2: R^m \rightarrow R^m$ 。令  $z = (x, y)^T$ ，称两个子系统关于性质  $h$  达到广义同步，若存在映射  $h: R^n \rightarrow R^m$  连续，使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| h[x(t)] - y(t) \| = 0$$

式中  $x(t)$  和  $y(t)$  是系统的解。

1996 年，Rosenblum 等人通过合理的定义混沌信号的相位引出相同步的概念。在相同步中，混沌系统的相位满足同步条件，而其振幅往往是混沌的且互不关联。两个耦合的不相同的振荡或旋转系统能进入一个中间区域，能够实现相位的同步，但幅值的相互关系仍然是弱的。

**定义 1.5(相同步)** 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$$

其中  $x \in R^n, y \in R^m, f_1: R^n \rightarrow R^n, f_2: R^m \rightarrow R^m$ 。令  $z = (x, y)^T$ ，设系统的解  $x(t)$  和  $y(t)$  为振荡型的，且它们具有相位  $\phi_1$  和  $\phi_2$ ，若存在两个正数  $k, v$  使得

$$|k\dot{\phi}_1 - v\dot{\phi}_2| = 0$$

则称两个子系统为相同步。

滞后同步介于完全同步和相同步之间，两混沌系统的输出在相位和幅值上都能达到同步，但存在一个时间差。

**定义 1.6 (滞后同步)** 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$$

其中  $x \in R^n, y \in R^m, f_1: R^n \rightarrow R^n, f_2: R^m \rightarrow R^m$ 。令  $z = (x, y)^T$ , 称系统的两个子系统达到滞后同步, 若存在与时间无关的常数  $\tau$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - y(t - \tau)\| = 0$$

式中  $x(t)$  和  $y(t)$  是系统的解。

## 1.2 混沌同步的发展

同步, 通俗地说就是指动态系统中步调一致的现象, 它是自然界中常见的一种现象。该问题最早是由荷兰物理学家惠更斯(C. Huygens)提出的, 他偶然发现两个并排放置的钟摆的振荡达到了完全同步, 并以此为主线揭示了自然界中相当普遍的同步现象及其机制, 即两个之间有耦合关系的周期运动最终转变为同步的周期运动, 其为一种共振现象。此后, 科学工作者对力学、光学、化学、电磁学与生物学等众多学科领域中的同步问题进行了深入的研究, 并建立了系统的理论。但这些关于同步问题的研究, 无论是在概念、对象, 还是方法上, 都是在周期运动的基础上进行的, 而对初值微小变化高度敏感的两个有耦合关系的混沌系统来说, 同步化能否实现呢?

由于混沌系统对初值具有极端敏感性, 即当初始条件有一微小差异时, 两个完全相同的混沌系统的运动轨迹将以指数规律分离, 所以长期以来人们一直认为混沌系统要想达到完全同步是不可能的。直到 1983 年, Fujisaka 和 Yamada<sup>[8]</sup> 揭示由许多相同混沌振荡器耦合组成的大系统, 当耦合强度充分强时, 所有振荡器呈现相同的混沌振荡, 即达到同步, 并进一步利用 Lyapunov 指数给出了混沌同步的一个准则。尽管 Fujisaka 和 Yamada 第一次利用局部分析法研究混沌同步, 并将其研究成果发表在《理论物理进展》上, 但是他们的文章却没有引

起人们的注意。直到 1990 年,美国海军实验室的学者 L. M. Pecora 和 T. L. Carroll 提出了混沌自同步原理<sup>[9]</sup>,混沌同步的研究才取得了突破性进展。

L. M. Pecora 和 T. L. Carroll 发现如果复制一个自治混沌系统的适当子系统,只要子系统的 Lyapunov 指数为负,那么响应系统的混沌信号就会很快地和驱动系统中相应的混沌信号同步,即一个混沌系统的某些相同的子系统在特定的条件下可以做到相互同步。在此基础上,他们提出了混沌自同步原理,并且在电路实验中验证了混沌同步的现象。这一开创性的工作打破了以往人们的观念,它使得人们重新审视混沌的可利用性,极大地推动了混沌同步的理论研究,由此也激起混沌同步理论与实验应用研究的蓬勃开展。一些发达国家的科研和军事部门投入了大量的人力、物力开展混沌同步的理论和实验研究。美国麻省理工学院、华盛顿大学及加州大学伯克利分校等高校分别参与竞争,加紧研制混沌同步系统,以便能更有效地实现信号处理及达到通信实用目标。在随后的 10 余年里,有关混沌系统同步的研究越来越受到国内外学者的广泛关注,同步的方法不断涌现,混沌同步已成为非线性科学领域的一个热门研究课题。

混沌同步是指两个或两个以上具有相互作用的混沌系统,从不同的初始条件出发,经过一个暂态过渡过程之后,各自信号之间产生确定的函数关系并且这种函数关系不对初值敏感。混沌同步的目标就是实现两个或两个以上混沌系统的混沌轨道的某种确定性关系,其思想是用驱动系统的输出去控制响应系统以使响应系统的输出渐近地跟随驱动系统的输出变化。关于混沌同步问题研究的分类<sup>[10,11]</sup>,大致可分为两大类,一个是分析,另一个是综合。同步的分析问题由理解同步现象和给出同步的理论描述组成。到目前为止,有关混沌同步方面的理论研究已经取得了很大的进展,提出了多种混沌同步方式。关于混沌同步的类型主要有:完全同步<sup>[9]</sup>(Complete Synchronization)、相同步<sup>[12]</sup>(Phase Synchronization)、广义同步<sup>[13]</sup>(Generalized Synchronization)、滞后同步<sup>[14]</sup>(Lag Synchronization)和投影同步<sup>[15]</sup>(Projec-

tive Synchronization)等。同步的综合问题就是关于找到或设计一个同步的控制信号,使得两个耦合的混沌系统展现出不同的混沌同步现象。随着混沌同步不同定义的出现,混沌的同步方法也不断被提出。现有的混沌同步方法主要有P-C同步法、自适应同步方法、神经网络同步方法、观测器同步方法、主动控制同步法、脉冲同步方法及基于输入-输出线性化同步方法等。

## 1.3 混沌同步方式

目前对混沌同步的研究主要有以下几个方面:混沌系统完全同步、相同步、广义同步、滞后同步和投影同步等。

### 1.3.1 完全同步

完全同步指从不同初始点出发的两个混沌系统,随时间的推移两个混沌系统的轨迹或状态趋于一致,即 $y(t) \rightarrow x(t)$ 。1990年,美国海军实验室的专家 Pecora 和 Carroll 在电子学线路的设计实验中观察到了混沌系统的完全同步现象,并且对响应系统的稳定性及同步原理进行了理论分析,提出了混沌自同步原理,简称P-C同步法。<sup>[9]</sup>这一开创性的工作打破了以往人们的观念,它使得人们重新审视混沌的可利用性,极大地推动了混沌同步的理论研究。不久,大量关于混沌系统的完全同步的研究被报道。Femat 等<sup>[16]</sup>研究了不同阶的混沌系统的同步问题。Li 等<sup>[17]</sup>给出了两个不同的混沌系统完全同步的一般方法及系统中未知参数的估计方法。Lin 等<sup>[18]</sup>研究了通过白噪声干扰的两个单项耦合的混沌系统的完全同步问题,其结果表明,仅通过白噪声耦合即可获得混沌同步。完全同步是混沌同步研究中最普遍的一种定义,也是其他同步方法的基础,因此,完全同步被广泛研究。

### 1.3.2 相同步

在某些情况下,系统分量之间虽然有明显的相关性,但却没有确

定的函数关系,如发生相同步时,不同系统混沌变量相位锁频(通常确定在一个周期之内),然而径向变量还是保持完全混沌状态。在相同步中,混沌系统的相位满足同步条件,而其振幅往往是混沌的且互不关联。1996年,Rosenblum等人通过合理地定义混沌信号的相位,引出了相同步的概念。<sup>[12]</sup>相同步指混沌振子的相位满足 $n\varphi(x) - m\varphi(y) = \text{const}$ (其中n和m为整数),而它们的振幅仍然保持混沌状态且互不相关<sup>[19,20]</sup>,即两个混沌系统轨道的相位差锁定在 $2\pi$ 以内,而它们的幅值保持混沌或不相关。在混沌振荡中,确保存在相同步的本质特性是相应的相位Lyapunov指数为零,即相位的变化是中性的,因此,对周期信号敏感。<sup>[21]</sup>相同步存在不同于完全同步的“弱同步”的关系,通常这种同步中需要的耦合强度也弱一些,两个耦合的不相同的振荡或旋转系统能进入一个中性区域,能够实现相位的同步,但幅值的相互关系仍然是弱的。这一特性与其他同步相反,例如,当发生完全同步时,两个混沌系统的状态由于强相互作用一致,这种强相互作用可以强到破坏混沌,从而引起周期运动,而相同步的弱同步特性则在很大程度上可避免此种情况的发生。相同步已经在非线性神经、心脏和生态系统中被观测到,呼吸与心跳及脑部活动和肌肉信号间的振荡具有相同步的特性,在脑通信的过程中相同步也起到重要的作用。<sup>[22,23]</sup>因此,相同步在生物、医学和化学等领域中的应用研究非常重要,受到了非线性动力学领域研究者的重视。Stone等<sup>[24]</sup>阐述了相对小的耦合或外力即可发生相同步,且展示在多种条件下,其为分析混沌系统的一个有用的工具。Shuai等研究了两个耦合HR神经元的相同步过程<sup>[25]</sup>;Schafer等研究了人体心肺系统的相同步。<sup>[26]</sup>相同步因其重要性和普遍存在性,已成为一个热门的研究方向而被国内外的一些学者广泛研究。

### 1.3.3 广义同步

1996年,广义同步<sup>[13]</sup>在两个单向耦合的混沌系统中被发现,其指驱动系统和响应系统间的状态呈现为某种函数关系,即存在一个函