普通高等教育“十二五”规划教材·工科数学系列教材

高等数学

（上册）

主　编　牟卫华　陈庆辉

副主编　范瑞琴　赵　晔　李向红

科学出版社

内 容 简 介

本书是“普通高等教育‘十二五’规划教材・工科数学系列教材”中的一本，是编者在多个省部级科研成果的基础上，结合多年教学经验编写而成的．本书为上册，共3章，内容包括微积分基础知识、一元函数微分学、一元函数积分学．每章后附有综合习题及数学家简介．书后附有习题答案．在教学上，本书与同系列《线性代数与几何》配套使用．

本书面向工科院校，可作为土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书，也可供报考工科硕士研究生的人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：全2册/牟卫华，陈庆辉主编．—北京：科学出版社，2012

普通高等教育“十二五”规划教材・工科数学系列教材

ISBN 978-7-03-035333-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①牟… ②陈… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第192614号

责任编辑：相　凌 / 责任校对：宋玲玲

责任印制：阎　磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012年8月第　一　版　　开本：787×1092　1/16

2012年8月第一次印刷　　印张：30

字数：580 000

定价：52.00元(全两册)

前　言

本系列教材是在原铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”和全国高等学校数学研究中心承担科技部“创新方法工作专项项目——科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果基础上，通过多年的教学实践，广泛征求意见，按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会2009年编制的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成的．本系列教材在多年的教学实践中受到了广大师生的欢迎和同行的肯定，在总体结构、编写思想和特点、难易程度把握等方面，经受了实践的检验．本系列教材包括《高等数学》(上下册)、《线性代数与几何》、《概率论与数理统计》等．在教学中，《高等数学》(上下册)与《线性代数与几何》配套使用．

本系列教材在编写中力求做到渗透现代数学思想，淡化计算技巧，加强应用能力培养；在内容编排上从实际问题出发，建立数学模型，抽象出数学概念，寻求数学处理方法，解决实际问题．通过学习本系列教材，希望提高学生对数学的学习兴趣，培养数学建模意识，使学生较好地掌握高等数学方法，提高数学应用能力．书中带有“*”号的内容为选学内容．

本书在编写过程中，力求突出以下几个特点：

(1) 突出微积分学的基本思想和基本方法，使学生在学习过程中能够整体把握和了解各部分内容之间的内在联系．例如，把微分学视为对函数的微观(局部)性质的研究，而把积分学概括为对函数的宏观(整体)性质的研究；把定积分作为一元函数积分学的主体，不定积分仅仅作为定积分的辅助工具，这样既突出了定积分与不定积分的联系，又节省了教学时数；多元函数微分学中强调“一阶微分形式不变性”，使得多元函数(尤其是各变量之间具有嵌套关系的隐函数)的偏导与微分的计算问题程式化，大大提高学生的学习效率；在定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等积分学的应用中，采用“微元法”思想，使学生更容易理解与掌握．

(2) 尽可能使分析与代数相结合，相互渗透，建立新的课程体系．将空间解析几何部分编入《线性代数与几何》．在多元函数微积分学、常微分方程等内容中，充分运用向量、矩阵等代数知识，使表述更简洁．

(3) 采用现代数学的思维方式，广泛使用现代数学语言、术语和符号，为学生进一步学习现代数学知识奠定必要的基础．内容阐述上尽量遵循深入浅出，从具体到抽象，从特殊到一般等原则，语言上做到描述准确、通俗流畅，并具有启发性．不断提高学生应用现代数学的语言、术语、符号表达思想的能力．

(4) 重视数学应用能力培养，淡化某些计算技巧．本书注重学生对数学概念的理解和应用，在每章末都有一节应用举例，阐述这些数学模型的建立、求解等．

(5) 渗透数学文化，培养学生学习数学的兴趣．本书在每章末配有历史上著名数学

家简介，使学生大体上了解数学历史上所发生的事件，激发学生学习兴趣．

（6）备有内容丰富、层次多样的习题．为适应不同层次教学的需要，本书根据每一节内容的要求，由浅入深配有一定量的练习题．在每一章的最后配有综合性相对较强的综合练习题，其中包括历届考研题，以满足有考研意向的同学的需要．

本系列教材是在石家庄铁道大学领导的关心和支持下，在编委会全体成员的努力和其他教师的帮助下完成的．许多对高等数学有丰富教学经验的教师都提出了宝贵意见和建议，在《高等数学》的编写过程中，上册由牟卫华编写，由范瑞琴、王永亮进行了审阅；下册由陈庆辉编写，由赵晔、李向红、左大伟、陈聚峰进行了审阅。在本书的编写过程中，许多对高等数学有丰富教学经验的老师提出了宝贵意见和建议，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中仍可能有不当之处，敬请读者批评指正．

编　者

2012 年 6 月

目　　录

第 1 章　微积分基础知识

一元函数经常出现在我们的生活实践中，是主要的研究对象．一元函数的极限存在性和连续性研究是高等数学中最基本的内容，是一元函数微分学和积分学的理论基础．

1.1　集合　映射　初等函数

函数描述的是变量之间的依赖关系．本节将通过映射引出函数的概念．

1.1.1　集合　区间　邻域

所谓**集合**(简称为**集**)是指具有某种确定性质的对象的全体．组成集合的个别对象称为该集合的**元素**(简称为**元**)．习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．含有有限个元素的集称为**有限集**；不含任何元素的集称为**空集**，记作 $\varnothing$；既不是有限集又不是空集的集称为**无限集**．

表示集合的方法有两种：一种是列举法，就是将集合的所有元素一一列出来，写在一个花括号内．例如，由元素 a,b,c 组成的集 A 可表示为 $A=\{a,b,c\}$，又如方程 $x^2-1=0$ 的解集 S 可表示为 $S=\{-1,1\}$．另一种是描述法，就是把集合中元素的共同特征描述出来，写在一个花括号内．例如，满足不等式 $x^2-2x-3\leqslant 0$ 的点 x 的全体构成的集合为 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$．

常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集．

对于两个集 A 与 B，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称集 A 是集 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$(读作"A 包含于 B")，或者 $B\supseteq A$(读作"B 包含 A")；如果 $A\subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$(读作"A 真包含于 B")，或者 $B\supset A$；若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

显然，对任何集合 A，都有 $\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$. 对于集 A,B,C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

集合的基本运算有三种：并、交、差：设 A、B 是两个集．由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集称为 A 与 B 的**并集**(简称为**并**)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由同属于 A 与 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的**交集**(简称为**交**)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集称为 A 与 B 的**差集**(简称为**差**)，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

特别地，若 $B\subseteq A$，则称差 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的**余集**(或**补集**)，记为 $\complement_A B$. 通常我们所讨论的问题是在一个大的集合 X(称为全集) 中进行，所以我们称集合 $X\backslash A$ 为 A 的余集，记作

A^C. 两个集合的并、交、差可以用图形直观表示(如图 1.1 的阴影部分).

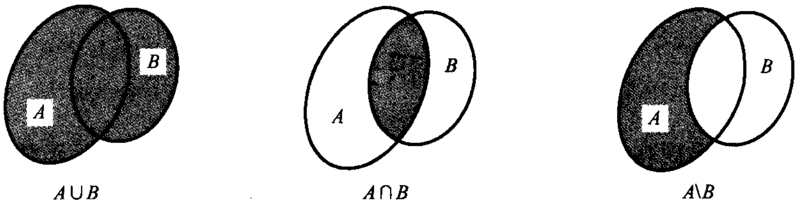


图 1.1

区间是用来表示数集的常用方法. 设 $a,b \in \mathbf{R}$,且 $a < b$,数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为**开区间**,记作(a,b),a 和 b 称为开区间(a,b) 的端点. 数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**,记作$[a,b]$,a 和 b 称为闭区间$[a,b]$ 的端点. 类似定义**半开区间**

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**. 从数轴上看,这些区间的长度都是有限的(图 1.2(a),(b)). 此外,引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则可定义**无限区间**(图 1.2(c),(d))

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记为无限区间$(-\infty,+\infty)$.

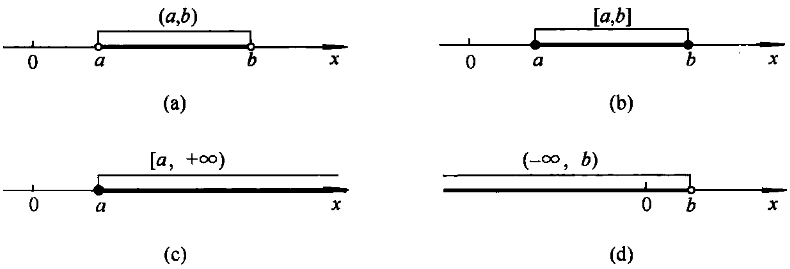


图 1.2

为了简单起见,以后在不需要指明所讨论区间是开区间还是闭区间,以及是有限的还是无限的时,我们就简单地称它为"区间",且用英文字母 I 表示.

邻域是高等数学中使用较多的一个概念. 设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,称数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

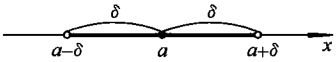


图 1.3

为**点 a 的 δ 邻域**,记为$U(a,\delta)$. 点 a 称为邻域中心,δ 称为邻域半径. 显然,邻域$U(a,\delta)$ 就是以点 a 为中心,长度为 2δ 的开区间$(a-\delta,a+\delta)$(图 1.3).

将邻域 $U(a,\delta)$ 的中心点 a 去掉后,称为**点 a 的去心**

邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

另外，在数对构成的集合中，还可以定义**笛卡儿乘积**(简称**积集**)

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

1.1.2 映射与函数的概念

映射是数学中应用较为广泛的一个概念，利用它可以给出函数概念.

1. 映射　函数

定义 1.1　设 A,B 是两个非空集合. 若对每个元素 $x\in A$，按照某种确定的法则 f，有唯一确定的 $y\in B$ 与之相对应，则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**，记作

$$f:A\to B \quad 或 \quad f: x\to y, x\in A.$$

并称 y 为 x 在 f 下的**象**，而 x 称为 y 在 f 下的一个**原象**(或**逆象**)，A 称为 f 的**定义域**，记作$D(f)$. 所有 $x\in A$ 的象 y 的全体构成的集合称为 f 的**值域**，记作

$$R(f)=\{y\mid y=f(x)\in B,x\in A\}\triangleq f(A).$$

应当注意，x 的象是唯一的，但 y 的原象不一定是唯一的，并且 $f(A)\subseteq B$.

定义 1.2　设 D 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空数集. 若对于每个数 $x\in D$，按照某个确定的法则 f，有唯一的数 $y\in\mathbf{R}$ 与之相对应，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数，记为$y=f(x)$(或 $y=y(x)$). 称式中 D 为**定义域**，f 为**函数法则**，x 为**自变量**，y 为**因变量**或**函数**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$、$y|_{x=x_0}$ 或$y(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应函数值的全体所构成的数集

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\triangleq W$$

称为函数的**值域**(式中“$\triangleq$”表示“记作”). 而由定义域 D 与值域 W 内的所有点构成的数对(x,y) 的集合

$$\{(x,f(x))\mid x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的**图像**，它通常对应着平面直角坐标系 xOy 上的曲线(图 1.4).

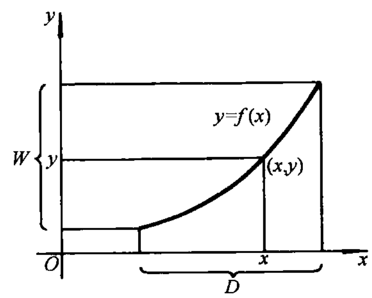


图 1.4

函数由定义域及函数法则这两个基本要素所确定. 函数法则可以由符合定义1.2的各种形式给出. 函数的定义域通常按两种情况确定：**当函数表示着某个实际问题时，其定义域由实际意义确定**，如圆面积公式$S=\pi r^2$ 的定义域为$\{r\mid r>0\}$；而**当函数没有实际意义时，其定义域就是使函数有意义的全体实数**. 例如，当 S 没有具体意义时，函数$S=\pi r^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

习惯上，把由映射或函数的定义确定的函数称为**单值函数**，即如果自变量在定义域内任意取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，否则称为**多值函数**. 例如，在直角坐标系中，半径为 a，圆心在原点的圆(图 1.5) 的方程是

$$x^2+y^2=a^2,$$

由此解得

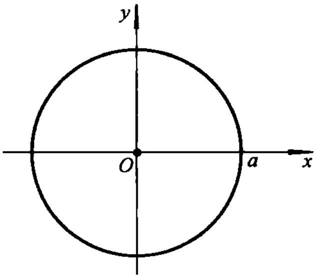


图 1.5

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

可见，当 x 取 a 或 $-a$ 时，上式对应 y 的一个值，当 x 取开区间 $(-a,a)$ 内的任一个数值时，上式对应两个值

$$y=\sqrt{a^2-x^2},$$

$$y=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

所以 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 是多值函数，上面的每一个都称为它的**单值支**，它们的图像分别是图 1.5 中的上半圆周和下半圆周．

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数．

下面介绍几个以后常用的**分段函数**：

(1) **符号函数**：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$$

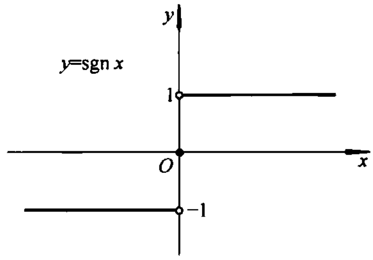


图 1.6

它的图像如图 1.6 所示．显然，对于任何实数 x，有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

(2) **取整函数**：设 x 为任一实数，将不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记作 $[x]$ 或 $\operatorname{int}(x)$，由此定义取整函数

$$y=[x]=\operatorname{int}(x).$$

它的图像如图 1.7 所示，为阶梯曲线．因此，取整函数也称为阶梯函数．例如

$$[\pi]=3,$$

$$[2]=2,$$

$$[0.3]=0,$$

$$[-1]=-1,$$

$$[-2.5]=-3.$$

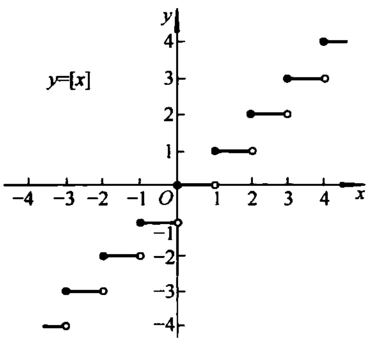


图 1.7

(3) **狄利克雷**[①]**函数**：

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

2. 复合映射　复合函数

设有映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$，由

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),x\in A$$

确定的映射 $g\circ f:A\to C$ 称为 f 与 g 的**复合映射**（图 1.8），其中 $y=f(x)$ 称为**中间元**．

① 狄利克雷(P. G. Dirichlet)，1805—1859，德国数学家．

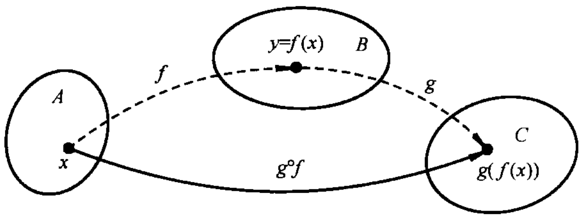


图 1.8

由定义易见，任给两个映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$，当且仅当 $f(A)\subseteq D(g)$ 时才存在复合映射 $g\circ f:A\to C$.

两个映射的复合也称为映射的**乘积**，不难将它推广到有限个映射的情形．映射的乘积满足结合律，即若 f,g,φ 分别是 $A\to B,B\to C_1,C_2\to D$ 的映射，则

$$\varphi\circ(g\circ f)=(\varphi\circ g)\circ f.$$

事实上，上式两端都是从 A 到 D 的映射，并且对任何 $x\in A$，都有

$$\begin{aligned}(\varphi\circ(g\circ f))(x)&=\varphi((g\circ f)(x))=\varphi(g(f(x)))\\&=(\varphi\circ g)(f(x))=((\varphi\circ g)\circ f)(x).\end{aligned}$$

所以，等式 $\varphi\circ(g\circ f)=(\varphi\circ g)\circ f$ 成立．

特别地，当 A,B,C 都是数集时，我们就可得到复合函数的概念．

设有函数 $y=f(u),u\in D_u$ 及函数 $u=\varphi(x),x\in D_x$，若对于每一个数 $x\in D_x$，对应有确定的数 $u=\varphi(x)\in D_u$，则由 $y=f(u)$ 就对应出 y，即对每一个数 $x\in D_x$，通过 u 有确定的数 y 与之对应，从而得到了一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数就称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f(\varphi(x)),\quad x\in D_x,$$

而 u 称为中间变量，$y=f(u)$ 称为外函数，$u=\varphi(x)$ 称为内函数．

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成是函数 $y=\sqrt{u}$ 与函数 $u=1-x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $[-1,1]$，是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一个子集．$y=\arctan x^2$ 可看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=x^2$ 的定义域．$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值（都大于或等于 2），都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义．

与复合映射一样，复合函数也可以由两个以上的函数复合而成．例如，$y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$ 就是由 $y=\sqrt{u},u=\tan v,v=\frac{x}{2}$ 复合而成，这里 u 及 v 都是中间变量．

3. 逆映射　反函数

设 A 为一个非空集合，把集合 A 中每一个元都映为自身的映射称为 A 上的恒等映射（或单位映射），记作 I_A，即任意的 $x\in A$，有 $I_A(x)=x$.

设有映射 $f:A\to B$,若存在一个映射 $g:B\to A$, 使

$$g\circ f=I_A,\quad f\circ g=I_B,$$

则称映射 f 是**可逆映射**,并且称映射 g 是映射 f 的**逆映射**,记为 f^{-1}.

特别地,当 A,B 都是数集时,可以得到反函数的概念.

如果函数 $y=f(x),x\in D$ 的逆映射 $f^{-1}:R(f)\to D$ 存在,则称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**,而称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

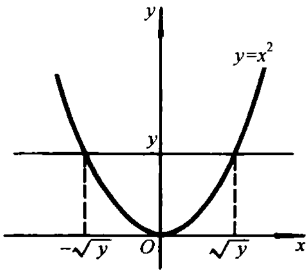


图 1.9

应当注意,单值函数的反函数未必是单值函数. 例如,函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,任意的 $y\in(0,+\infty)$,适合关系式 $x^2=y$ 的数值 x 有两个: $x=\sqrt{y}$ 及 $x=-\sqrt{y}$(图 1.9),所以 $y=x^2$ 的反函数是一个多值函数. 如果把 x 限制在 $[0,+\infty)$ 上,则 $y=x^2$ 的反函数为单值支 $x=\sqrt{y}$,如果把 x 限制在 $(-\infty,0]$ 上,则为单值支 $x=-\sqrt{y}$.

习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示. 如果把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调,就得到反函数的另一种表示形式: $y=f^{-1}(x)$. 当将直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像画在同一坐标系中时,由于两式中 x 与 y 的对应关系没有改变,所以它们是同一条曲线; 而将 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 画在同一坐标系中时,由于两式中 x 和 y 的关系为互换相等,因此它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.3　函数的几种特性

1. 有界性

设 X 为实数集. 如果存在正数 M,使得对任意的 $x\in X$ 不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

总成立,则称函数 $f(x)$ 在集合 X 上**有界**. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**,也就是说,如果对任意的正数 M,总存在 $x_0\in X$,使 $|f(x_0)|>M$,则函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

有界性中不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 还可以改用 $l\leqslant f(x)\leqslant L$ 描述,其中 l,L 是两个常数. 这时称 l 与 L 分别是 $f(x)$ 在 X 上的**下界与上界**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, $|\sin x|\leqslant 1$ 都成立,这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M). 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 事实上,任意 $M>0$,不妨设 $M>1$,则 $\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$,当 $x_0=\dfrac{1}{2M}$ 时, $\left|\dfrac{1}{x_0}\right|=2M>M$,所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的,如可取 $M=1$,使得对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

2. 单调性

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加(减少)**.

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调增加(减少)**.

(严格) 单调增加和(严格) 单调减少的函数统称为**(严格) 单调函数**.

例如，函数 $f(x) = x^2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上不是单调函数，但它在区间$[0, +\infty)$上严格单调增加，在区间$(-\infty, 0]$上严格单调减少；函数 $f(x) = x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上严格单调增加.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称(即若 $x \in D$，则必有 $-x \in D$)，并且任意 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若任意 $x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，$f(x) = x^2$ 是偶函数；$f(x) = x^3$ 是奇函数；而 $f(x) = x^2 + x + 1$ 是非奇非偶函数.

在几何上，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

4. 周期性

对函数 $f(x)$ $(x \in D)$，若存在不为零的数 l，使对任意 $x \in D$ 有 $x + l \in D$，且

$$f(x + l) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，使得上式成立的最小正数 l 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

例如，$\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$\sin 2x$ 是以 π 为周期的周期函数.

在几何上，周期为 l 的周期函数的图像在长度为 l 的相邻区间上形状相同.

1.1.4 基本初等函数 初等函数

初等函数是微积分的研究对象，因此需要对它们有较为细致的了解.

1. 幂函数 $y = x^\mu$(μ 是常数)

幂函数的定义域与 μ 有关. 例如，当 $\mu = 2$ 时，$y = x^2$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$；当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时，$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ 的定义域是$[0, +\infty)$；当 $\mu = -\frac{1}{2}$ 时，$y = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是$(0, +\infty)$. 但不论 μ 取何值，幂函数 $y = x^\mu$ 在$(0, +\infty)$内总是有定义的.

$\mu = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 时是最常见的几种幂函数. 它们的图像如图 1.10 所示.

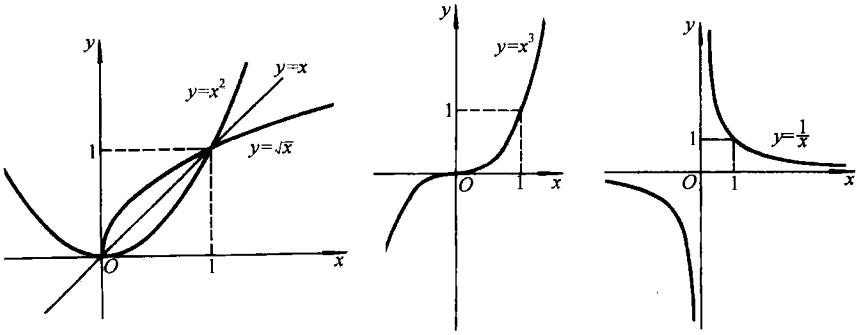
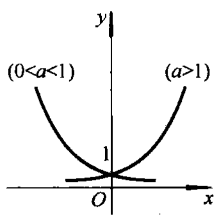
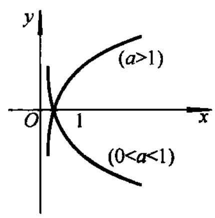


图 1.10

2. 指数函数与对数函数(表 1.1)

表 1.1

名称	指数函数	对数函数
定义	$y=a^x(a>0,a\neq 1)$	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$
定义域	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(0,+\infty)$
值域	$y\in(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$
图像		
性质	①$a^x>0(x\in\mathbf{R})$,即 $y=a^x$ 的图像在 x 轴上方 ②$a^0=1$,即 $y=a^x$ 的图像都经过点(0,1) ③$a^1=a$ ④ 当 $a>1$ 时 若 $x>0$,则 $y>1$ 若 $x<0$,则 $0<y<1$ 当 $0<a<1$ 时 若 $x>0$,则 $0<y<1$ 若 $x<0$,则 $y>1$ ⑤ 当 $a>1$ 时,函数递增 当 $0<a<1$ 时,函数递减	①零和负数无对数,即 $y=\log_a x$ 的图像在 y 轴的右方 ②$\log_a 1=0$,即 $y=\log_a x$ 的图像经过点(1,0) ③$\log_a a=1$,即底数的对数等于 1 ④ 当 $a>1$ 时, 若 $x>1$,则 $y>0$; 若 $0<x<1$,则 $y<0$. 当 $0<a<1$ 时 若 $x>1$,则 $y<0$ 若 $0<x<1$,则 $y>0$ ⑤ 当 $a>1$ 时,函数递增 当 $0<a<1$ 时,函数递减

在工程问题中常常碰到以 e 为底的指数函数 $y=e^x$(通常称为**自然指数函数**)和对数函数 $y=\log_e x$(简记为 $y=\ln x$,通常称为**自然对数函数**),其中 $e=2.7182818\cdots$ 是一个无理数,它的具体意义在后面我们将要加以说明.

3. 三角函数与反三角函数

常见的三角函数有正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$ 及余切函数 $y=\cot x$,它们的性质见表 1.2,它们的图像由图 1.11 给出.

表 1.2

性质 \ 函数	正弦函数 $y=\sin x$	余弦函数 $y=\cos x$	正切函数 $y=\tan x$	余切函数 $y=\cot x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数,图像关于原点对称	偶函数,图像关于 y 轴对称	奇函数,图像关于原点对称	奇函数,图像关于原点对称
周期	2π	2π	π	π
单调性	① 在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上函数递增 ② 在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上函数递减 $(k\in\mathbf{Z})$	① 在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 上函数递增 ② 在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上函数递减 $(k\in\mathbf{Z})$	在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 上函数递增 $(k\in\mathbf{Z})$	在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 上函数递减 $(k\in\mathbf{Z})$
最大值 最小值	① 当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,y 取最大值 1 ② 当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 时,y 取最小值 -1 $(k\in\mathbf{Z})$	① 当 $x=2k\pi$ 时,y 取最大值 1 ② 当 $x=2k\pi+\pi$ 时,y 取最小值 -1 $(k\in\mathbf{Z})$	无	无

此外,尚有两个三角函数,它们是

正割函数:$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, 余割函数:$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

它们都是以 2π 为周期的周期函数,并且在开区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数.

反三角函数是三角函数的反函数.通常研究的反三角函数有反正弦函数、反余弦函