高中几何
百题多解法

广西教育出版社

高中几何百题多解法

廖永康　陈钫初　编著

广西教育出版社

高中几何百题多解法

廖永康　陈钜初　编著

☆

广西教育出版社出版

（南宁民族大路7号）

广西新华书店发行　合浦县印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　10.375印张230千字

1989年5月第1版　1991年7月第3次印刷

印数：17，001－26，900册

ISBN　7—5435—0493—6/G·410

定价：3.05元

前　言

由于数学概念、公式、定理的高度抽象性，常用的数学方法的概括性与普遍性，数与数、形与形、数与形之间的相互联系以及中学数学知识、技能具有的基础特点，决定了中学中大量数学问题的解法不是唯一的，这就使数学题“一题多解”成为可能．

一题多解的实现，依赖于解题者对基础知识的掌握程度和解题能力的大小，依赖于解题者一系列分析、综合的思维活动能力．它与数学教学活动及对学生能力的培养有着密切的关系．因此，对一题多解在数学教学中的作用的研究和有效地实施就显得很必要了．

实践证明，把一题多解引入数学教与学过程，符合教育规律．这样做，有利于激发学生学习数学的积极性和创造性，培养学生的分析思维和直觉思维的能力，发展智力；有利于促进知识和能力的正迁移，防止和消除负迁移，培养学生的联想、类比和抽象概括的能力．通过一题多解，还可以经常地复习已学的数学知识，促进熟练掌握各种解题方法和技能技巧，提高综合应用的能力．

在长期的教学实践中，我们积累了许多中学数学题的一题多解的范例，现精选立体几何、解析几何各五十题，编成这本《高中几何百题多解法》献给中学教师、学生和自学青年，愿它们起到抛砖引玉的作用，打开读者的思路，获得教与学的新飞跃．

我们精选的范例，知识面宽，包括中学立体几何、解析几何各单元的教学内容，并有机地与高中代数、三角等知识联系在一起．在体例上，每种解法前有分析，描述为得到最终解答所经过的分析步骤，并力图阐明采取这些步骤的动机和想法．每一题后还有简评，指出各种解法的特点、优劣和关键之处，并总结概括一般的解题规律．精选的题及其解法都具有典型性、示范性，通过多种解法介绍了目前高中立体几何、解析几何中常用的解题方法和技能技巧．由于这些特色，我们相信，该书一定会成为中学生和自学青年的良师，成为广大教师的益友．

最后，我们希望读者在阅读时，首先独立思考，然后再与书中的解法认真比较，仔细研究，琢磨最佳解法，探索解题规律，以提高自己的解题能力．

编著者

一九八七年四月

目　录

立体几何

解析几何

立 体 几 何

一、直线和平面

1. 如图1，已知不共面的三条直线 a、b、c 都过 O 点。点 A、B、E、F 均不同于 O，且 $A\in a$，$B\in a$，$E\in b$，$F\in c$。求证直线 AE 与 BF 为异面直线。

分析1　本题宜采用反证法。假设 AE 与 BF 都在平面 α 内，则由 A、B 在 α 内可得 O 在 α 内，由 O 与 E 在 α 内得直线 b 在 α 内。同理推出直线 c 在 α 内，从而 a、b、c 共面，导致与题设矛盾。

证法1　假设直线 AE 与 BF 不是异面直线，则它们共面，设这平面为 α。

∵　$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，且 $A\in a$，$B\in a$，

∴　$a\subset\alpha$。

∵　$O\in a$，

∴　$O\in\alpha$。

又　$E\in\alpha$，且 $O\in b$，$E\in b$，

∴　$b\subset\alpha$。

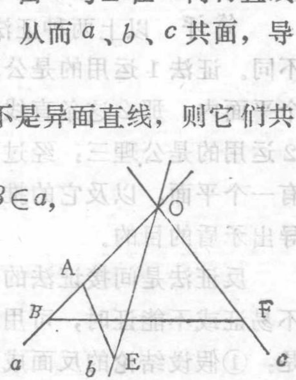

图1

同理，$c\subset\alpha$。

于是 a，b，c 共面。这与题设 a、b、c 不共面相矛盾。

∴　AE 与 BF 是异面直线。

分析2　假设 AE 与 BF 都在平面 α 内，由 a、b 相交，确定平面 β；由 a、c 相交，确定平面 γ。证明 α、β、γ 重合，

导致 a、b、c 共面，引出矛盾。

证法2 假设 AE 与 BF 不是异面直线，则它们共面，设这个平面为 α。

$\because$ $a\cap b=O$,

$\therefore$ 过 a 与 b 确定一个平面 β。

$\because$ A、B、$E\in\alpha$,

又 A、B、$E\in\beta$,

而过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面，所以 α 与 β 重合，即 $b\subset\alpha$。

同理可证，由 a 与 c 确定的平面与 α 重合，即 $c\subset\alpha$。

于是 a、b、c 都在 α 内，这与题设 a、b、c 不共面矛盾。

$\therefore$ AE 与 BF 是异面直线。

简评 以上两种证法都是用反证法，但具体推理过程不同。证法1运用的是公理一：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内；证法2运用的是公理三：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面，以及它的推论，通过证明两平面重合，来达到导出矛盾的目的。

反证法是间接证法的一种。证明有些命题，用直接证法不易证或不能证时，可用间接证法。反证法证题的一般步骤是：①假设结论的反面成立；②据理推出矛盾的结论（如与题设矛盾，与定义、公理、定理矛盾，或自相矛盾等等）；③断定结论的反面错误；④断定结论的正面正确。

2．如图2，直线 AB 是异面直线 a 和 b 的公垂线，垂足为 A、B。β 是过 AB 中点H且与 AB 垂直的平面（即中垂面）。在 b 上任取一点 C，在 a 上任取一点 D，连结 CD。

求证：线段 CD 必被平面 β 所平分。

分析1 设 $CD\cap\beta=G$。要证 CD 被 β 平分，只需证 $CG=GD$。因为"平面外一条直线与这个平面同垂直于另一条直线，则这条直线与这个平面平行"（详细证明见第8题），由 $AB\perp\beta$，$AB\perp a$，可得 $a\parallel\beta$。过 a 可作平面 $\gamma\parallel\beta$。又知 $b\parallel\beta$，所以可将 AB 平移使之过 C，即过 C 作 $CF\parallel AB$，设分别交 β、γ 于 E、F（图3），则 $CE=EF$。由此便可在 CF、CD 确定的平面内证 $CG=GD$。

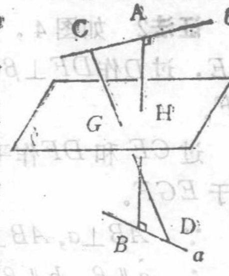

图 2

证法1 如图3，$\because AB\perp\beta$，$AB\perp a$，$\therefore a\parallel\beta$。

过 a 作平面 $\gamma\parallel\beta$，过 C 作 $CF\parallel AB$，分别交 β、γ 于 E、F。又过 CF 和 CD 作平面 CDF，设与平面 β、γ 的交线分别为 EG 和 FD。则 $EG\parallel FD$。

$\therefore\ \triangle CEG\backsim\triangle CFD$，

有 $\dfrac{CE}{EF}=\dfrac{CG}{GD}$。

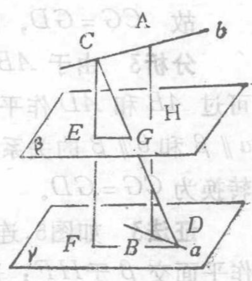

图 3

$\because\ AB\perp\beta$，$AB\perp b$，$\therefore b\parallel\beta$。

又 $\beta\parallel\gamma$，$\therefore AH=CE$，$HB=EF$。

而 $AH=HB$，$\therefore CE=EF$。

故 $CG=GD$，即 CD 被平面 β 所平分。

分析2 设 $CD\cap\beta=G$，要证 CD 被 β 平分，需证 $CG=GD$。若过 C 作 $CE\perp\beta$ 于 E，过 D 作 $DF\perp\beta$ 于 F（图4），则 $CE\parallel DF$，而且可证 $CE=DF$。过 CE 和 DF 作平面，知 G 点在交线 EF 上，于是可设法证 $\triangle CEG\cong\triangle DFG$，

从而导出 $CG=GD$。

证法2 如图4，过 C 作 $CE\perp\beta$ 于 E，过 D 作 $DF\perp\beta$ 于 F，则 $CE\parallel DF$。

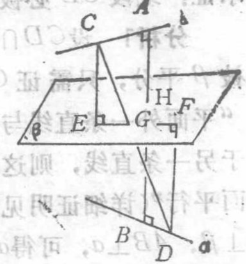

图4

过 CE 和 DF 作平面与平面 β 相交于 EGF。

$\because$ $AB\perp a$, $AB\perp b$, 且 $AB\perp\beta$,

$\therefore$ $a\parallel\beta$, $b\parallel\beta$.

$\because$ $CE=AH$, $DF=HB$, 且 $AH=HB$,

$\therefore$ $CE=DF$.

又 $\angle CGE=\angle FGD$,

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle CEG\cong\mathrm{Rt}\triangle DFG$.

故 $CG=GD$, 即 CD 被平面 β 所平分。

分析3 由于 AB 与 CD 不共面，若连结 AD、CD，则可过 AB 和 AD 作平面，过 AD 和 CD 作平面。再利用 $a\parallel\beta$ 和 $b\parallel\beta$ 的关系，将 $AH=HB$ 通过两平面的交线 AD 转换为 $CG=GD$。

证法3 如图5，连结 AD，交平面 β 于 F。过 AB 和 AD 作平面交 β 于 HF；过 AD 和 CD 作平面交 β 于 GF。

$\because$ $AB\perp a$, $AB\perp b$, 且 $AB\perp\beta$,

$\therefore$ $a\parallel\beta$, $b\parallel\beta$.

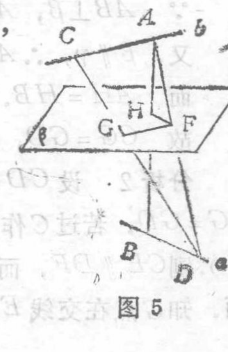

图5

于是 $HF\parallel BD$, $GF\parallel AC$.

$\therefore$ $\dfrac{AH}{HB}=\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{CG}{GD}$.

而 $AH=HB$,

故 $CG=GD$,

$\therefore$ CD 被平面 β 所平分.

简评 证法1和证法2运用了平移的方法，即把 AH 和 HB 平移至 CE、EF（证法1）；或把 AH 和 HB 平移至 CE、DF（证法2），然后作出平面进行证明. 证法3连结 AD，作出平面，把 AH、HB 的关系经 AF、FD 转换到 CG、GD. 这些直线平移和连线转换的方法，在解决异面直线的证明和计算问题时，运用较多.

3. 一条直线与三条平行直线都相交，则这四条直线共面.

已知： 如图6，$a\parallel b\parallel c$，且 $d\cap a=E$，$d\cap b=F$，$d\cap c=G$.

求证： 直线 a、b、c、d 同在一个平面内.

分析1 要证 d 与 a、b、c 共面，可先证 d 与 a、b 共面. 因为 $a\parallel b$，可由 a、b 确定一个平面，设为 α. 由 d 与 a、b 相交可证 d 在 α 内，即 a、b、d 共面. 为证它们与 c 也共面，可由 $b\parallel c$ 确定平面 β，然后证平面 α 与 β 重合，这需要运用确定平面的公理，如设法证明两相交直线 b 与 d 既在 α 上又在 β 上.

证法1 如图6，因为 $a\parallel b$，

$\therefore$ 可过 a、b 作平面 α.

$\because$ a、b 与 d 分别交于 E、F，

即 d 上有两点 E、F 在 α 内，

$\therefore$ d 也在 α 内.

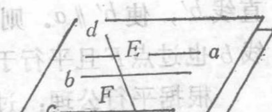

图 6

又 $\because$ $b\parallel c$，

$\therefore$ 可过 b、c 作平面 β.

$\because$ b、c 与 d 分别交于 F、G，

即 d 上有两点 F、G 在 β 内，

∴ d 也在 β 内。

于是，相交直线 b 与 d 在 α 内，又在 β 内，而过两条相交直线有且只有一个平面（公理），

∴ 平面 β 与 α 重合。

故 直线 a、b、c、d 都同在一个平面 α 内，亦即它们共面。

注 要证 d 与 a、b、c 共面，可先证 d 与 a、b 共面. 因为 $a \parallel b$，所以由 a 与 b 可确定一个平面，设为 α；又因为 $a \cap d = E$，所以由 a 与 d 又可确定一个平面，设为 β. 在使用确定平面的公理时，利用直线 a 与 a 外一点 F 在 α 内，同时又在 β 内，也可说明 α 与 β 重合. 同理可证平行线 b 与 c 确定的平面 γ，也可与 α 重合. 于是得证.

分析2 在由相交直线 a 与 d 确定平面 α 后，可考虑逐一证明直线 b、c 都在平面 α 内。要证直线 b 在 α 内，可用同一法，即过交点 F，在平面 α 内作直线 b'，使 $b' \parallel a$，再证明 b' 与 b 重合。

证法2 如图 7. ∵ $a \cap d = E$，

∴ 可过 a、d 作平面 α。

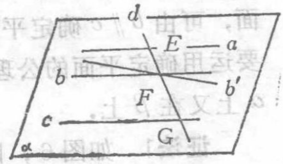

图 7

在平面 α 内，过点 $F = b \cap d$ 作直线 b'，使 $b' \parallel a$. 则由已知，直线 b 也过点 F 且平行于 a。

根据平行公理：过直线外一点可作且只可作一条直线与已知直线平行。

∴ 直线 b' 与 b 重合。

即 b 在平面 α 内。

又 $c \cap d = G$，且 $c \parallel b \parallel a$，

同理可证 c 也在平面 α 内。

故直线 a、b、c、d 都在同一平面 α 内，亦即它们共面.

简评 证诸直线共面的问题时，本例的两种证法都是有代表性的。证法 1 为证明平面重合的方法，理论依据是确定平面的公理之一，即若两条相交直线都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合. 这些公理还有：若一条直线和此直线外的一点都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合；不在一条直线上的三点可确定一个平面等。证法 2 是先由两条相交直线确定一个平面，然后逐一证明其余的直线均在此平面内，这也是证诸直线共面常用的方法。此法在证法 1 的前半部分（即证 a、b 与 d 共面）也已用到.

4. 长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，C_1D_1、D_1D、DA、AB、BB_1、B_1C_1 的中点分别为 P、Q、R、L、M、N，试证明 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

分析1 由于过平面外一点能作且只能作一个平面与已知平面平行，若能证得 LP、RN、MQ 都相交于长方体的中心 O，而且这些相交线确定的平面既过此点，又与某平面（如平面 BC_1D）平行，即可证得题设的六点共面.

证法1 如图 8，设长方体的中心为 O，则 O 是长方体对角线 AC_1 的中点.

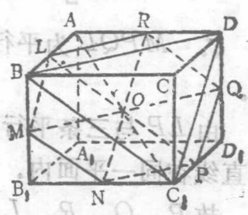

图 8

$\because$ $AL \mathrel{\underline{\parallel}} C_1P$，

$\therefore$ ALC_1P 为平行四边形，

且对角线 AC_1、LP 交于长方体的中心 O.

同理，由 $AR \mathrel{\underline{\parallel}} C_1N$ 知 RN 与 AC_1 交于 O，

由 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} RQ$ 知 MQ 与 RN 交于 O.

即 MQ、LP、RN 都过长方体中心 O。

连结 BC_1、C_1D、BD。

∵ $LR \parallel BD$，$MN \parallel BC_1$，$PQ \parallel C_1D$，

∴ 相交线 MQ、LP、RN 两两确定的平面通过中心 O，而且和平面 BC_1D 平行。

故 MQ、LP、RN 在同一平面内，

即 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内。

分析2 根据"一条直线与两条以上的平行线相交，则这些直线都在同一平面内"，可考虑证明 LP 与三条平行线 LR、MQ、NP 都相交，则可证得题设的六点在同一平面内。

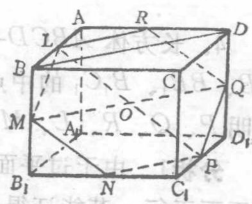

图 9

证法2 如图 9，连结 MQ、LP 及 BD、B_1D_1。

∵ $LR \parallel BD$，$BD \parallel MQ$，

又 $NP \parallel B_1D_1$，$B_1D_1 \parallel MQ$，

∴ $LR \parallel MQ \parallel NP$。

同理可证 $LM \parallel QP$。

又 $LM = \dfrac{1}{2}AB_1 = \dfrac{1}{2}DC_1 = QP$，

∴ $MPQL$ 为平行四边形，对角线 LP 与 MQ 相交于 O。

由 LP 与三条平行线 LR、MQ、NP 都相交得知这四条直线在同一平面内。

故 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内。

注 "若一条直线（如 l）与三条平行线（如 a、b、c）都相交（设交点为 A、B、C），则这四条直线在同一平面内"．现证明如下：

如图10，因为 $a \parallel b$，所以 a、b 确定一个平面 α，l 与 a、b 的交

点 A、B 在 α 内，因此 l 在 α 内.

又因为 $c\parallel b$，所以 c、b 确定一个平面 α'，l 与 b、c 的交点 B、C 在 α' 内，因此 l 在 α' 内.

b、l 既在 α 内，又在 α' 内，而相交的 b、l 只能确定一个平面，故 α 与 α' 重合，即 l 与 a、b、c 都在同一个平面内.

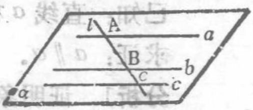

图 10

分析3 根据两平行线确定一个平面和不在同一直线上的三点确定一个平面，可以先证题设的六点中的若干点分别在两个平面内，然后证这两个平面重合.

证法3 如图11，由 $LR\parallel BD$，$BD\parallel MQ$ 知 $LR\parallel MQ$，

$\therefore$ LR 与 MQ 确定一个平面 α。

同理可证 $RQ\parallel LP$，

$\therefore$ RQ 与 LP 确定一个平面 α'。

于是不在同一直线上的三点 L、R、Q 既在 α 上也在 α' 上，

$\therefore$ 平面 α 与平面 α' 重合。

即 点 M、L、R、Q、P 都在 α 内。

同理可证 N 也在平面 α 内。

故 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内。

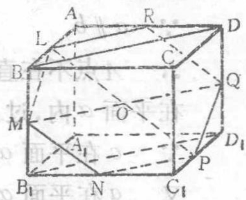

图 11

简评 证法1运用了两平行平面的关系，证法2运用了直线与平行线相交的关系，而证法3只运用了确定平面的有关公理. 显然，证法3较简练，这种重合法是证明点共线、共面或线共面的常用方法.

5．试证明：如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行（直线和平面平行

的判定定理）。

已知：直线 a 在平面 α 外，直线 b 在平面 α 内，且 $a \parallel b$。

求证：$a \parallel \alpha$。

分析1 证明象本题这样的基本定理，由于除已学的公理及其推论外，在此之前所导出的定理不多，所以通常运用间接证法，比如反证法。欲证 $a \parallel \alpha$，则可假设 $a \nparallel \alpha$，即 a 与平面 α 相交于一点 A。然后再根据已知条件及已学的公理、定理，导出矛盾结果，从而反证得 $a \parallel \alpha$。

证法1 因为 a 不在平面 α 内，所以 $a \parallel \alpha$ 或与平面 α 相交。

假设 a 与平面 α 相交于 A 点（图12）。

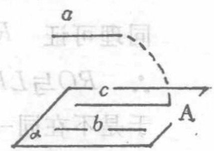

图 12

$\because$ $a \parallel b$，

$\therefore$ A 点不在直线 b 上。

在平面 α 内，过 A 作直线 $c \parallel b$。(I)

$\because$ c 在平面 α 内，

又 a 在平面 α 外，

$\therefore$ a、c 是过 A 的相交直线。

而 $a \parallel b$，$b \parallel c$，

$\therefore$ $a \parallel c$。

这和 a 与 c 相交矛盾，故假设错误。

$\therefore$ $a \parallel \alpha$。

注 上述证法还可用下面几种方式叙述：

①同(I)，$c \parallel b$，$a \parallel b$，过 A 点只能作一条直线与 a 平行，所以 a 与 c 重合，则 a 在平面 α 内.这与已知 a 在平面 α 外矛盾，故假设错误，所以 $a \parallel \alpha$.

②同(I)，$c \parallel b$，$a \parallel b$，又 a，c 是过 A 的相交直线，则过 A 点作了两条直线与 b 平行，与平行公理矛盾，故假设错误，所以 $a \parallel \alpha$。

③同（Ⅰ），a、c所成的角也是a、b所成的角．a、c相交所成的角不为0°，$a\parallel b$所成的角为0°，这是矛盾的，故假设错误，所以$a\parallel\alpha$．

分析2 在导出矛盾时，也可运用异面直线的判定定理，平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不经过该点的直线是异面直线。

证法2 假设平面外的直线a与平面α相交于A（如图13）．在a上另取一点B．

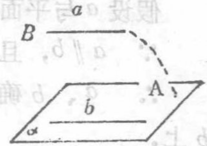

图 13

∵ $a\parallel b$，

∴ A点不在b上．

又 b在平面α内，B在α外，

∴ a、b是异面直线．

这与已知$a\parallel b$矛盾，故假设错误．

∴ $a\parallel\alpha$．

分析3 由于$a\parallel b$，由a、b确定的平面β与平面α必相交于b．在作出此辅助平面的基础上，导出由假设$a\nparallel\alpha$而产生矛盾的结果是可行的．

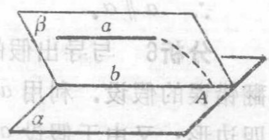

图 14

证法3 如图14．

∵ $a\parallel b$，且b在平面α内，

∴ a、b确定的平面β与平面α相交于b．

假设a与平面α相交于A点，则A点必在交线b上．

∴ a与b相交．

这与$a\parallel b$的已知条件矛盾，故假设错误．

∴ $a\parallel\alpha$．

证法4 如图14．

假设a与平面α相交于A点．