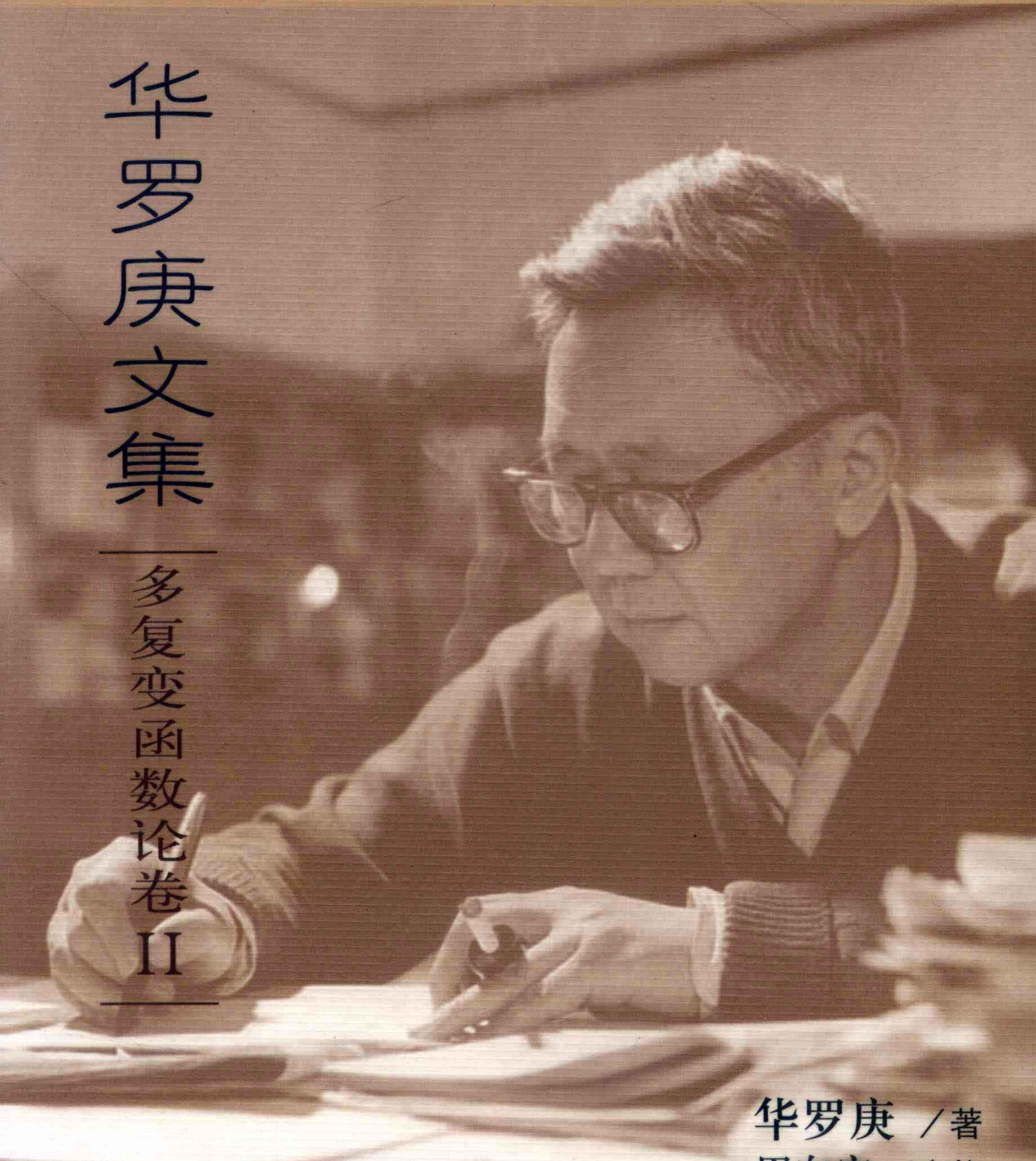
中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书



华罗庚文集

多复变函数论卷 II

华罗庚 / 著
周向宇 / 审校

科学出版社

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

多复变函数论卷 II

华罗庚　著
周向宇　审校

科学出版社
北京

内容简介

本卷由华罗庚先生的著作《从单位圆谈起》以及一些关于多复变函数论等方面的论文组成.

本书适于科研院所及高等学校数学系师生与数学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚文集：多复变函数论卷 II/华罗庚著；周向宇审校. —北京：科学出版社，2013

(中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书)

ISBN 978-7-03-036011-3

I. 华… II. 华… III. ① 数学-文集 ② 多复变函数论-文集 IV. O1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 267120 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：钟 洋

责任印制：钱玉芬／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本：787×1092

2013 年 1 月第一次印刷 印张：28 1/4

字数：552 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

纪念华罗庚先生诞辰100周年

《华罗庚文集》编委会

《华罗庚文集》序言

2010 年是著名数学家华罗庚先生诞辰 100 周年. 值此机会, 我们编辑出版《华罗庚文集》, 作为对他的美好纪念.

华罗庚先生是他那个时代的国际领袖数学家之一, 也是中国现代数学的主要奠基人和领导者. 无论是在和平建设时期, 还是在政治动荡甚至是战争年代, 他都抱定了为国家和人民服务的宗旨, 为中国数学的发展倾注了毕生精力, 受到了中国人民的广泛尊敬.

华罗庚先生最初研究数论, 后将研究兴趣拓展至代数和多复变等多个领域, 取得了一系列国际一流的成果, 引领了这些领域的学术发展, 产生了广泛持久的影响. 他从一名自学青年成长为著名数学家, 其传奇经历激励了几代中国数学家投身于数学事业.

华罗庚先生为我们留下了丰富的精神遗产, 包括大量的学术著作和研究论文. 我们认为, 认真研读这些著作和论文, 是深刻把握华罗庚学术思想精髓的最佳途径. 无论对于数学工作者还是青年学生, 其中许多内容都是很有启发和裨益的.

华罗庚先生担任中国科学院数学研究所所长 30 余年, 他言传身教, 培养和影响了一批国际水平的数学家, 他的学术思想和治学精神已经成为数学所文化的核心. 自 2008 年起以中国科学院数学所为基础成立的中国科学院华罗庚数学重点实验室, 旨在继承和弘扬华罗庚先生的学术思想和治学精神, 积极推动中国数学的发展. 为此, 我们选择华罗庚先生的著作和论文作为实验室的首批出版物, 今后还将陆续推出更多优秀的数学出版物.

在出版《华罗庚文集》的过程中, 我们得到了各方面的关心和支持, 包括国家出版基金的资助, 在此我们表示深深的感谢. 同时, 对于有关人员在策划、翻译和审校等方面付出的辛勤劳动, 对于科学出版社所作的大量工作, 我们表示诚挚的谢意.

中国科学院华罗庚数学重点实验室

《华罗庚文集》编委会

2010 年 3 月

目　　录

华罗庚文集 · 多复变函数论卷 II · 上部

华罗庚文集 · 多复变函数论卷 II · 下部

华罗庚文集·多复变函数论卷Ⅱ·上部

从单位圆谈起

说　明

这本讲义是根据华罗庚同志 1962 年在中国科学技术大学及中山大学的讲稿由我们整理而成的. 由于我们水平有限, 在整理过程中难免有不妥及错误之处, 望读者指正.

吴兹潜　林　伟　龚　升

1975 年 10 月

第 1 讲　调和函数的几何理论

1.1 旧 事 重 提

在复平面上变形 ①

$$w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad |a|<1 \tag{1}$$

及

$$w = e^{i\theta}z. \tag{2}$$

由 (1) 推得

$$1-|w|^2 = 1-\frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-a\overline{z}|^2}. \tag{3}$$

因此 (1) 把单位圆 $|z|=1$ 变为单位圆 $|w|=1$, 单位圆内部变为单位圆内部. 变形 (2) 也有此性质. 并且 (1) 把 $z=a$ 变为 $w=0$.

微分 (1) 式得

$$dw = \frac{dz}{1-\overline{a}z} + \frac{(z-a)\overline{a}dz}{(1-\overline{a}z)^2} = \frac{1-a\overline{a}}{(1-\overline{a}z)^2}dz. \tag{4}$$

(3)、(4) 相除, 取绝对值的平方得出经过 (1)、(2) 不变的微分型

$$\frac{|dw|^2}{(1-|w|^2)^2} = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}. \tag{5}$$

与此微分二次型相对应的有不变的微分算子

$$(1-|w|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial\overline{w}} = (1-|z|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\overline{z}}. \tag{6}$$

这就是 Laplace 算子

$$4\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\overline{z}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}.$$

(1) 既然把单位圆变为单位圆, 则当 $z=e^{i\tau}(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$ 时, $w=e^{i\psi}$, 即

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\tau}-a}{1-\overline{a}e^{i\tau}} = \frac{1-ae^{-i\tau}}{1-\overline{a}e^{i\tau}}e^{i\tau}$$

① 这里 $\overline{a}$ 代表 a 的共轭数.

这代表变形 (1) 在单位圆圆周上所引起的变化. 而 (4) 式变为

$$e^{i\psi}d\psi = \frac{1-a\overline{a}}{(1-\overline{a}e^{i\tau})^2}e^{i\tau}d\tau.$$

两者相除得出

$$d\psi = \frac{1-a\overline{a}}{|1-\overline{a}e^{i\tau}|^2}d\tau. \tag{7}$$

命

$$a = \rho e^{i\theta}, \quad \rho < 1$$

及

$$P(\rho, \theta - \tau) = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}e^{i\tau}|^2} = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}. \tag{8}$$

这个函数称为 Poisson 核, 因此, Poisson 核是单位圆经 (1) 变为自己所得出的函数行列式. Poisson 核有以下的特点:

(i) 定正性. 当 $\rho < 1$ 时, $P(\rho, \theta - \tau) > 0$.

(ii) $\lim\limits_{\rho\to 1} P(\rho, \theta - \tau) = \begin{cases} 0, & 若\ \theta \neq \tau, \\ \infty, & 若\ \theta = \tau. \end{cases}$

(iii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)d\tau = 1.$

这结果也是显然的, 其理由是, 由 (7) 得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi = 1.$$

性质 (ii) 与 (iii) 合并称为“δ 函数的性质”.

(iv) 当 $\rho < 1$ 时, 它适合于 Laplace 方程 (极坐标形式)

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{9}$$

要证明这一点也是十分容易的, 因为

$$\begin{aligned} P(\rho, \theta - \tau) =& 1 + \frac{\rho e^{i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}} \\ =& 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \tau), \end{aligned}$$

而 $\rho^n \cos n(\theta - \tau)$ 显然适合于 (9), 因而 $P(\rho, \theta - \tau)$ 也适合于 (9).

解单位圆的 Dirichlet 问题.

给一个以 2π 为周期的连续函数 $\varphi(\theta)$, 求一函数 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内适合于 Laplace 方程 ①, 且

$$\lim_{\rho\to 1} u(\rho e^{i\theta}) = \varphi(\theta). \tag{10}$$

这就是有名的 Dirichlet 问题.

我们分以下几个步骤来解决这一问题:

(1) 先证"均值公式": 如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内有二阶连续偏微商, 而且适合 Laplace 方程 (9), 在圆内及圆周上连续, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = u(0), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1. \tag{11}$$

证法是: 由 Laplace 方程知

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta\right) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\rho e^{i\theta})d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left.\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho e^{i\theta})\right|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

求积分得

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = k.$$

当 $\rho = 0$ 时, 可见 $k = 0$. 再积分, 得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = c.$$

是一与 ρ 无关的常数, 再取 $\rho = 0$, 得 (11) 式.

(2) 依 (1) 换变数, 命

$$v(z) = u(w),$$

则

$$v(e^{i\tau}) = u(e^{i\psi}), \quad v(a) = u(0).$$

(11) 式变为 $(\rho = 1)$

$$\begin{aligned}v(a) =& u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\psi})d\psi \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\tau})\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau.\end{aligned}$$

① 适合 Laplace 方程的函数称为调和函数.

命 $a=\rho e^{i\theta}$ 及换符号则得 Poisson 公式

$$u(\rho e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\tau})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau. \tag{12}$$

换言之, 如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 是一个调和函数, 则有以上的公式.

(3) 最大 (最小) 值原理. 一个单位圆内的调和函数, 如果不是常数, 则一定在圆周上取最大 (最小) 值.

如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 最大, 由 (12) 可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\tau})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau\\ \leqslant&u(\rho e^{i\theta})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)d\tau}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}=u(\rho e^{i\theta}),\end{aligned}$$

并且仅当 u 是常数时取等号, 不然, 总有一段弧, 其中 $u(e^{i\tau})<u(\rho e^{i\theta})$, 因而上式取不等号.

同样最小值也在圆周上取.

(4) Dirichlet, 问题解答的唯一性.

如果有两个解 $u(\rho e^{i\theta}),v(\rho e^{i\theta})$ 适合于 (10), 则

$$w(\rho e^{i\theta})=u(\rho e^{i\theta})-v(\rho e^{i\theta})$$

也是调和函数, 在圆周上这函数等于 0, 即 $w(e^{i\theta})=0$. 由 (3) 可知在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上, $w(\rho e^{i\theta})$ 的最大值 $\leqslant 0$, 最小值 $\geqslant 0$, 因而 $w\equiv 0$. 因而解答是唯一的.

(5) 解答的存在性.

考虑 Poisson 积分

$$u(\rho e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{13}$$

这函数有以下的一些性质: 首先由性质 (iv) 可知 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内适合 Laplace 方程，其次由“δ 函数”性质可以证明 (10) 式. 由性质 (iii),

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)\varphi(\theta)d\tau.$$

因为 $\varphi(\theta)$ 是连续函数, 给了 ε, 存在 δ 使 $|\theta-\tau|<\delta$ 时,

$$|\varphi(\theta)-\varphi(\tau)|<\varepsilon. \tag{14}$$

把积分

$$u(\rho e^{i\theta})-\varphi(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(\theta))d\tau$$

分为两部分, 由 (14) 可知

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta}P(\rho,\theta-\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(\theta))d\tau\right|\\ \leqslant&\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)d\tau=\varepsilon.\end{aligned}$$

另一方面, 当 $|\theta-\tau|\geqslant\delta$ 时, 可以取 ρ 充分接近于 1 使

$$P(\rho,\theta-\tau)<\varepsilon/2M,$$

这里 M 是 $|\varphi(\tau)|$ 的上界. 于是

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geqslant\delta}P(\rho,\theta-\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(\theta))d\tau\right|\\ <&2M\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{2M}d\tau=\varepsilon.\end{aligned}$$

合并之, 得出当 ρ 充分接近于 1 时,

$$|u(\rho e^{i\theta})-\varphi(\theta)|<2\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\rho\to 1}u(\rho e^{i\theta})=\varphi(\theta).$$

因而公式 (13) 解决了单位圆的 Dirichlet 问题的存在性部分.

1.2 实数形式

为了看出推广的可能性, 先看 1.1 节的结果的实数形式, 先看变形 (1.1) 的实数形式:

$$w=\frac{z-a}{1-\overline{a}z}=\frac{(z-a)(1-a\overline{z})}{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})}=\frac{z-a-az\overline{z}+a^2\overline{z}}{1-\overline{a}z-a\overline{z}+a\overline{a}z\overline{z}}.$$

把复数 v 写成为 $\xi+i\eta$, 而以 v^* 代表矢量 (ξ,η), 显然有

$$a\overline{b}+\overline{a}b=2a^*b^{*\prime}.$$

又由于

$$a^2\overline{z}=(b^2-c^2+2bci)(x-iy)\quad(a=b+ic),$$

所以

$$(a^2\overline{z})^*=[(b^2-c^2)x+2bcy,2bcx-(b^2-c^2)y]$$