高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学

（第二版）下册

习题解答

高等数学编写组　编

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学

（第二版）下册

习题解答

高等数学编写组　编

编者　张义侠　丁茂震　牛玉玲　陈凡红　邵泽军

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第二版）（下册）习题解答/高等数学编写组编．—2版．—北京：中国人民大学出版社，2011.11
高等院校教材．理工农林专业通用教材
ISBN 978-7-300-14753-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①高… Ⅲ.①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 227504 号

高等院校教材
理工农林专业通用教材
高等数学（第二版）（下册）习题解答
高等数学编写组　编
Gaodeng Shuxue Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511398(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	**版　　次**	2010 年 4 月第 1 版 2011 年 11 月第 2 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		
印　　张	14.5 插页 1	**印　　次**	2011 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	264 000	**定　　价**	23.00 元

前　言

本书是由中国人民大学出版社出版、高等数学编写组编写的《高等数学(第二版)》下册的配套习题解答。书中选入了覆盖面较全的不同深度的习题。每章后所附习题分（A)、（B）两部分。为了保证教学的基本要求，我们认为，习题（A）的大部分应作为学生作业；习题（B）可以根据不同层次、不同的教学要求选用其中少部分或大部分。

演算习题，一是为了熟练和巩固所学的基本知识；二是训练逻辑思维、分析、推理的能力；三是培养综合运用数学工具分析解决实际问题的能力。演算足够数量和深度的习题，是十分必要的，但是应注意，要首先把学过的数学内容充分复习，在对其概念理论和思维方法有较好的理解的前提下，再演算习题，这样，才能达到演算习题的上述目的。课后不复习，立刻做作业，不是正确有效的学习方法。面对习题，首先应尽可能独自分析、思考去求解这一问题，然后与解答核对运算结果正确与否，再加以认定或修正。只有在找不到思路、无法入手的情况下，才可以借助解答。在对所学基本内容没有理解的情况下去抄袭解答，这对学习知识毫无裨益，是自误的做法。

编写解答过程中，我们参考、借鉴了国内部分优秀的传统教材，如同济大学数学系主编的《高等数学》及中国人民大学赵树嫄教授主编的《微积分》等书，在此谨致谢忱。

编者

目　录

第九章

多元函数微分法及其应用

习题九（A）

1. 指出下列平面点集中，哪些是开集、闭集、有界集、开区域以及闭区域？并求其边界点.

(1) $\{(x, y) \mid 0<x^2+y^2<1\}$；

(2) $\{(x, y) \mid xy\neq 0\}$；

(3) $\{(x, y) \mid x\leqslant 2, y\leqslant 2, x+y\geqslant 2\}$.

【解】 (1)有界开区域，边界点为圆周 $x^2+y^2=1$ 上所有点与点(0, 0)；

(2)无界开集，不是连通集，边界点为两坐标轴上所有的点；

(3)有界闭区域，边界点为以点(2, 0)，(0, 2)和(2, 2)为顶点的三角形三边上所有点.

2. 已知函数 $f(u, v)=u^v$，试求 $f(xy, x+y)$.

【解】 $f(xy, x+y)=(xy)^{(x+y)}$.

3. 求下列函数的定义域并画出定义域的图形.

(1) $f(x, y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(2) $f(x, y)=\ln(1-|x|-|y|)$；

(3) $f(x, y)=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

【解】 (1) 定义域为$\begin{cases}x-\sqrt{y}\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，即$\{(x, y)\mid x^2\geqslant y\geqslant 0$ 且 $x\geqslant 0\}$，定义域的图形如图 9—1 阴影部分所示；

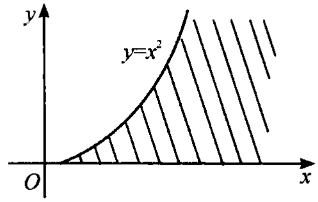

图 9—1

(2) 定义域为 $1-|x|-|y|>0$ 即$\{(x, y)\mid |x|+|y|<1\}$，图形如图 9—2 所示；

(3) 定义域为$\begin{cases}\left|\dfrac{x^2+y^2}{4}\right|\leqslant 1\\ x^2-y^2\neq 0\end{cases}$，即$\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 4$ 且 $x\neq\pm y\}$，图形如图9—3 所示.

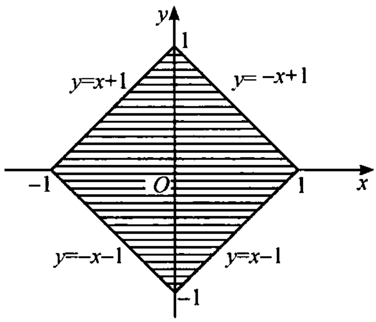

图 9—2

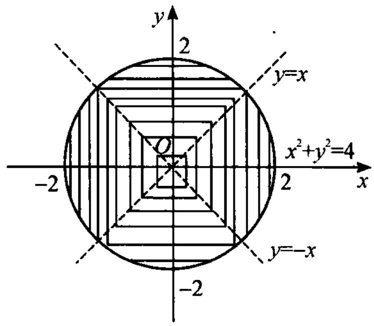

图 9—3

4. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x, y)\to(1, 0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x, y)\to(2, 0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$；　　(6) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$；

(7) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(8) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$.

(2) $\lim\limits_{(x, y)\to(1, 0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x=1\cdot 2=2.$

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

(7) 因为 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$，所以$\dfrac{2|xy|}{x^2+y^2}\leqslant 1$.

即 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\to 0(x\to 0,\ y\to 0)$,

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{y}=e^0=1.$

5. 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$.

【解】 (1) 当动点(x, y)沿直线 $y=mx$ 趋于定点$(0, 0)$时，由于此时 $f(x, y)=f(x, mx)=\dfrac{m}{1+m^2}$，因而有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}.$$

这一结果说明动点沿不同斜率 m 的直线趋于原点时，对应极限值不同，故本题所讨论的极限不存在.

(2) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(1+k)x}=0$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-x)}{x^2}=-1,$$

故极限不存在.

6. 讨论下列函数的连续性.

(1) $f(x, y)=\dfrac{xy}{x+y}$;

(2) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0, & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$.

【解】 (1) $f(x, y)$ 在直线 $x+y=0$ 上间断，在其余点处均连续；

(2)因为 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)\neq f(0, 0)$，所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处间断，在其余点处均连续.

7. 求下列函数的偏导数.

(1) $z=x^3y-y^3x$; (2) $z=e^{xy}+yx^2$;

(3) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$; (4) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$; (6) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(7) $u=e^{x^2y^3z^5}$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$;

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+2xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+x^2$;

(3) $$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2u^2v-(u^2+v^2)v}{u^2v^2}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2},$$

$$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2uv^2-(u^2+v^2)u}{u^2v^2}=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2};$$

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}};$$

(5) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y};$$

(6) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3z^5e^{x^2y^3z^5}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2z^5e^{x^2y^3z^5}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=5x^2y^3z^4e^{x^2y^3z^5}$.

8. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

【证明】 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，

所以 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$.

9. 已知 $z=f(x,y)=\sin(xy)+y^2$，试用定义求偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin[(x+\Delta x)y]+y^2-[\sin(xy)+y^2]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{2xy+y\Delta x}{2}\sin\frac{y\Delta x}{2}}{\Delta x}\\&=y\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2xy+y\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{y\Delta x}{2}}{\frac{y\Delta x}{2}}=y\cos(xy),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sin[x(y+\Delta y)]+(y+\Delta y)^2-[\sin(xy)+y^2]}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\cos\frac{2xy+x\Delta y}{2}\sin\frac{x\Delta y}{2}+2y\Delta y+(\Delta y)^2}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\cos\frac{2xy+x\Delta y}{2}\sin\frac{x\Delta y}{2}}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2y\Delta y}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y}\\&=x\cos(xy)+2y.\end{aligned}$$

10. 利用偏导数定义和求导公式求函数

$$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

在点 (2，1) 处的偏导数 $f'_x(2,1)$.

【解】 (方法一) 利用求导公式求 $f'_x(2,1)$.

先求出偏导数 $f'_x(x, y)$，

$$f'_x(x, y)=1+(y-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{y-1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}}$$

所以 $f'_x(2, 1)=1$

（方法二）利用定义直接求 $f'_x(2, 1)$

$$f'_x(2, 1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x, 1)-f(2, 1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

所以 $f'_x(2, 1)=1.$

11. 求函数 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0\\ 0 & , x^4+y^2=0\end{cases}$ 在点 (0, 0) 处的偏导数.

【解】 $$f_x(0, 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x, 0)-f(0, 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^4+0^2}-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0, 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0, 0+\Delta y)-f(0, 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0^2\cdot\Delta y}{0^4+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0.$$

12. 曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在点 (2, 4, 5) 处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

【解】 按偏导数的几何意义，$f_x(2, 4)$ 就是曲线在点 (2, 4, 5) 处的切线对于 x 轴的斜率，而 $f_x(2, 4)=\frac{1}{2}x\big|_{x=2}=1$，即 $k=\tan\alpha=1$，于是倾角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

13. 求曲线 $\begin{cases}z=1+\sqrt{1+x^2+y^2}\\ x=1\end{cases}$ 在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向所成角度.

【解】 设所成的角度为 θ，则 $\tan\theta=z_y(1, 1)=\left.\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_{(1,1)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$.

14. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(1) $z=x\ln(x+y)$； (2) $z=\arctan\frac{y}{x}$； (3) $z=y^x$.

【解】 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x+y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x+y}+\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=\frac{x+2y}{(x+y)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln^2 y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

15. 设 $f(x,\ y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x(3,\ 4)$.

【解】 因为 $f_x(x,\ y)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

所以 $f_x(3,\ 4)=1-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$.

16. 设 $u=\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{x}{y}$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$在点 $\left(2,\ \frac{1}{\pi}\right)$ 处的值.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{x}{y}+\mathrm{e}^{-x}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\sin\frac{x}{y}\right),$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\left[-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right],$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\ \frac{1}{\pi})}=\mathrm{e}^{-2}(-\pi^2\cos 2\pi+2\pi^3\sin 2\pi+2\pi^2\cos 2\pi)=\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}}\right)^2.$$

17. 设 $f(x,\ y,\ z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,\ 0,\ 1)$，$f_{xz}(1,\ 0,\ 2)$，$f_{yz}(0,\ -1,\ 0)$及 $f_{zzx}(2,\ 0,\ 1)$.

【解】 因为 $f_x=y^2+2xz$，$f_{xx}=2z$，$f_{xz}=2x$，$f_y=2xy+z^2$，$f_{yz}=2z$，$f_z=2yz+x^2$，$f_{zz}=2y$，$f_{zzx}=0$.

所以 $f_{xx}=(0,\ 0,\ 1)=2$，$f_{xz}(1,\ 0,\ 2)=2$，$f_{yz}(0,\ -1,\ 0)=0$，$f_{zzx}(2,\ 0,\ 1)=0$.

18. 设 $z=x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\dfrac{y}{xy}=\ln(xy)+1$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y}{xy}=\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{x}{xy}=\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\dfrac{1}{y^2}$.

19. 求下列函数的全微分.

(1) $z=x^2y$；　(2) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；　(3) $u=\dfrac{s+t}{s-t}$；

(4) $z=e^{\frac{y}{x}}$；　(5) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(6) $u=\ln(3x-2y+z)$；

(7) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$；　(8) $u=x^{yz}$.

【解】 (1) 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2$，

所以　$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$.

(2) 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$，

所以　$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(y+\dfrac{1}{y})\mathrm{d}x+\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y$.

(3) 因为$\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{s-t-(s+t)}{(s-t)^2}=\dfrac{-2t}{(s-t)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{s-t+(s+t)}{(s-t)^2}=\dfrac{2s}{(s-t)^2}$，

所以　$\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s+\dfrac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t=\dfrac{2}{(s-t)^2}(s\mathrm{d}t-t\mathrm{d}s)$.

(4) 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$，

所以　$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$.

(5) 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以　$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$.

(6) 因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{3}{3x-2y+z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-2}{3x-2y+z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{3x-2y+z}$，

所以　$\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{3x-2y+z}(3\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$.

(7) 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}=\frac{y}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}=-\frac{x}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$

所以　$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{ydx-xdy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$.

(8) 因为$\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$，$\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$，

所以　$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$.

20. 求函数$z=\frac{y}{x}$当$x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时的全增量和全微分.

【解】　$\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}$，$dz=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$.

当$x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时，

全增量　$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}\approx-0.119$，

全微分　$dz=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125$.

21. 求函数$z=e^{xy}$当$x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$时的全增量和全微分.

【解】　$\Delta z=e^{(x+\Delta x)(y+\Delta y)}-e^{xy}$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=ye^{xy}\Delta x+xe^{xy}\Delta y.$$

当$x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$时，

全增量　$\Delta z=e^{(1.15)\cdot 1.1}-e=e^{1.265}-e$，

全微分　$dz=e\cdot 0.15+e\cdot 0.1=0.25e$.

22. 求函数$z=\ln(1+x^2+y^2)$当$x=1$，$y=2$时的全微分.

【解】　因为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

所以　$\left.dz\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$.

23. 求函数$z=\ln(2x+y^3)$在点(1，2)处的全微分.

【解】　因为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{2x+y^3}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2}{2x+y^3}$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{5},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\frac{6}{5},$$

所以 $\left.dz\right|_{(1,2)}=\frac{1}{5}(dx+6dy)$.

24. 求下列各式的近似值.

(1) $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$； (2) $(10.1)^{2.03}$.

【解】 (1) 设 $z=\sqrt{x^3+y^3}$，则

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3}=\sqrt{x^3+y^3}+\Delta z\approx\sqrt{x^3+y^3}+dz$$
$$=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

取 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.03$，可得

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1+2^3}+\frac{3\cdot1\cdot0.02+3\cdot2^2\cdot(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}}=2.95.$$

(2) 设 $z=x^y$，则 $(x+\Delta x)^{y+\Delta y}=x^y+\Delta z\approx x^y+dz=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y$.

取 $x=10$，$y=2$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=0.03$，可得 $(10.1)^{2.03}\approx10^2+2\cdot10^1\cdot0.1+10^2\cdot\ln10\cdot0.03\approx108.9$

25. 已知边长为 $x=6$ m 与 $y=8$ m 的矩形，如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减少 10 cm，问这个矩形的对角线的近似变化怎样？

【解】 矩形的对角线的长为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y)$.

当 $x=6$，$y=8$，$\Delta x=0.05$，$\Delta y=-0.1$ 时，$\Delta z\approx\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot0.05-8\cdot0.1)=-0.05$，即这个矩形的对角线的长减少大约 5 cm.

26. 设有直角三角形，测得其两直角边的长分别为 7 ± 0.1 cm 和 24 ± 0.1 cm，试求利用上述两值来计算斜边长度时的绝对误差.

【解】 设两直角边长分别为 x 和 y，则斜边长度为

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\Delta z|\approx|dz|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\left|\Delta x\right|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\left|\Delta y\right|$$
$$=\frac{1}{x^2+y^2}(x|\Delta x|+y|\Delta y|)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y),$$

使得　$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y).$$

当 $x=7$，$y=24$，$\delta_x=0.1$，$\delta_y=0.1$ 时，

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\cdot 0.1+24\cdot 0.1)=0.124,$$

即计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm.

27. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y$，$v=x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】　分析复合路径 $z\begin{cases}u\begin{cases}x\\y\end{cases}\\ v\begin{cases}x\\y\end{cases}\end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot 1+2v\cdot 1=2(u+v)=4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot 1+2v\cdot(-1)=2(u-v)=4y.$$

28. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】　分析复合路径 $z\begin{cases}u\begin{cases}x\\y\end{cases}\\ v\begin{cases}x\\y\end{cases}\end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3$$

$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

29. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，而 $x=\sin t$，$y=\cos t$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

【解】　分析复合路径 $z\begin{cases}x-t\\y-t\end{cases}$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dy}{dt}$$

$$=\sin t\cos t+\cos t(-\sin t)=0.$$

30. 设 $z=x^2+xy+y^2$，而 $x=t^2$，$y=t$，求$\frac{dz}{dt}$，$\frac{d^2z}{dt^2}$.

【解】 分析复合路径 $z<\begin{matrix}x-t\\y-t\end{matrix}$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(2x+y)2t+(x+2y)$$

$$=(2t^2+t)2t+t^2+2t=4t^3+3t^2+2t,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=12t^2+6t+2.$$

31. 设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=e^x$，求$\frac{dz}{dx}$.

【解】 分析复合路径 $z<\begin{matrix}x\\y-x\end{matrix}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot e^x=\frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}.$$

32. 设 $z=xe^y$，而 y 为 x 的可微分函数，求$\frac{dz}{dx}$.

【解】 分析复合路径 $z=f<\begin{matrix}x\\y-x\end{matrix}$

令 $z=f(x,y)=xe^y$，

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=e^y+xe^y\frac{dy}{dx}.$$

33. 求下列复合函数的一阶偏导数：

(1) $z=u^2\ln v$，$u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$；

(2) $z=\arccos(u-v)$，$u=xe^y$，$v=y^2$；

(3) $u=e^{x^2+y^2+z^2}$，$z=x^2\sin y$.

【解】 (1) 复合路径为 $z<\begin{matrix}u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\\v<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\end{matrix}$