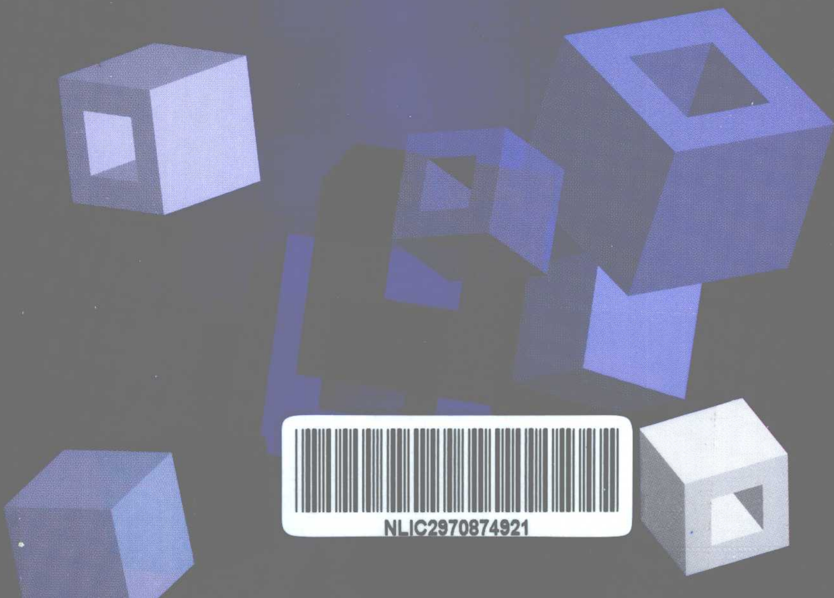
赵德林　张成义　编

理论力学

LILUN LIXUE



科学出版社

理 论 力 学

赵德林　张成义　编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书内容包括质点力学、质点系动力学、刚体力学、非惯性系和惯性力、虚功原理、拉格朗日动力学、哈密顿动力学。每章后附有相关的巩固性习题。本书不仅可以使学生系统、完整、科学地学习理论力学所涉及的基本原理与方法，而且通过适当的力学问题的求解训练，提高学生的综合分析能力。

本书可作为高等院校物理类及大气科学类专业的理论力学课程教材，也可供其他相关专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/赵德林，张成义编. —北京：科学出版社，2013. 3
ISBN 978-7-03-036819-5

I. ①理…　II. ①赵…　②张…　III. ①理论力学-教材　IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 039406 号

责任编辑：顾晋饴　黄　海　伍宏发/责任校对：韩　杨
责任印制：赵德静/封面设计：许　瑞

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第　一　版　　开本：B5 (720×1000)
2013 年 3 月第一次印刷　　印张：20 1/2
字数：414 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

编者于1996~2012年一直在南京信息工程大学(含滨江学院)讲授“理论力学”课程。本书精心梳理了多年的讲稿，对相关内容进行润色，并在出版前作了重排，以期获得更好的教学效果。在编写过程中，我们学习借鉴了国内外同类教材的先进经验，同时结合当代大学生的实际情况，着重基础理论，以简明、准确的语言阐述理论力学的原理、定律、定理和定义，引导和启发学生理解理论力学的基本原理和概念。

在编写过程中，我们不仅注意保证全书的系统性、完整性和科学性，同时也充分考虑了以下几方面：

(1)“理论力学”课程教学工作面大、覆盖专业较多，因此，教学内容的取舍与处理非常重要，我们力争使本书对物理类与气象类相关专业具有兼容性；在教材的编写过程中，将一些数学运算繁杂、物理思想较抽象的内容从章节中剥离出来，冠以*号。这部分内容对少学时的非物理专业学生，可以作为选讲内容或学生拓展知识的选学内容。

(2) 尽量考虑大气科学、大气探测等专业后续专业课的需要，对非物理类教学内容进行取舍，但同时又兼顾物理类专业对该课程深广度的要求，以使该书具有广泛的适用性。

(3) 考虑到理科类“理论力学”教学内容与工科类的差异较大以及学生参加各类力学竞赛与考研安排的需要，尝试适度补充了部分工科的教学内容与知识，如在静力学、运动学部分有适当的内容增加与深度提升。

(4) 在编写过程中，我们力求对基本概念、基本原理的表述简洁、精炼。在例题的选择和分析上，加强分析物理知识点的针对性、解题方法的总结、相似知识的类比，这样做的目的是为了更好地提高学生的学习能力，有益于他们智能的发展。

(5) 处理好数学与理论力学的数学关系是理论力学教学的一个难点。为此，我们在习题设计方面，注重尽量使物理概念模型化，充分利用物理思想列解方程，将数学应用于理论力学等问题。

(6) 全书的语言叙述尽量做到深入浅出，通俗易懂，便于读者自学。

对理论力学课程教学内容的取舍，各学科、各专业有着很大的差异，在多版本的同类教材中，本书对教学内容的取舍是否合适、能否实现我们的教学初衷，还有待于日后的教学实践检验。我们期待着本书的出版能对理论力学教学起到积

极的作用。

本书初稿由赵德林完成编写，赵德林、张成义对初稿进行修改并定稿。在编写过程中，得到了南京信息工程大学郭胜利、詹煜、王祖松等同志的关心和鼓励；得到了南京信息工程大学物理与光电学院领导的大力支持，在此一并表示感谢。

本书受到下列课题的资助：南京信息工程大学教改项目“理论力学精品教材立项”，课题号07JC0012；南京信息工程大学教学成果培育项目，课题号11py004；滨江学院教改工程项目“理论力学教材建设”，课题号2008JC0008。

由于编写时间仓促和作者水平有限，本书中一定会存在不妥之处。恳请读者不吝指正，以期再版时修正。

赵德林　张成义

2012年9月于南京

目　录

绪　论

理论力学是研究物体机械运动规律的一门科学。机械运动既是最简单、最普遍的一种运动，又是最基本的运动，它不仅存在于我们的周围以及人类本身，而且在其他的运动形式中也伴随着物质的机械运动。机械运动是描述物体在空间的相对位置随时间的变化。例如，机器的转动、车辆的行驶、人造卫星和宇宙飞船的运行、星球的运动等。

理论力学属于经典力学的范围。牛顿力学(亦称为矢量力学)是以“力矢量”为研究着眼点，以牛顿运动定律为基础研究宏观、低速物体的运动规律。而对于原子、电子等微观粒子的运动，将由量子力学加以讨论。对运动速度接近真空中的光速($c = 3\times10^8$m/s)的宏观物体的运动，则属于相对论力学的研究范畴。所以，经典力学的适用范围具有局限性。但是，由于在日常生活、工农业生产和大多数的科学技术问题中所遇到的大多为宏观物体且做远小于光速的运动，这类运动应用经典力学的原理进行讨论是足够精确的。因此，对理论力学的研究有着极其广泛和重要的实际意义。以拉格朗日、哈密顿为杰出代表建立起来的分析力学是另一套区别于牛顿力学理论的全新力学理论。分析力学直接将力学体系的“能量”或“类能量”(拉格朗日函数、哈密顿函数等)作为力学规律分析的立足点，将这类标量代入新理论体系的动力学方程(组)，通过对这些完备的二阶或一阶微分方程组的求解，得到研究体系的运动规律。由于能量是一个标量，与力矢量相比较，数学处理往往较简单。对于受约束的力学体系，分析力学通过引入广义坐标和其他一些数学手段，可以方便地求解。

理论力学与自然科学的其他分支(如数学、天文学、气象学和工程技术科学等)有着密切的联系，特别是与数学的关系更为密切。理论力学广泛地应用数学理论进行系统的理论演绎和推理，建立起完整的理论体系，从而描绘出物理图像，阐述各物理量之间的相互联系。因此，数学是研究力学必不可少的工具。两门学科又相互促进，特别是近代高速电子计算机的发展促进了数学在力学研究中的应用，这必将大大推动力学学科的发展。

第1章 质点力学

§1.1 质点运动的描述

1. 参照系

宏观物体的机械运动是绝对的，为了能清晰描述物体的运动规律，必须首先描述物体在不同时刻的空间位置，但这种描述只能相对地确定，即研究一个物体的运动必须事先选定另一个物体作为参考，作为参考的物体叫做**参照系**或**参考系**。注意，虽然参考物是有限大小，但参照系应理解为是与参考物相固连的整个无限大空间。

建立参考系的目的是为了描述物体的运动，并且希望在正确描述的前提下，描述的手段越简便越好。因此，根据物体的性质不同，对参考系可以有不同的选取，以达到能简便地描述出物体运动的目的。例如，在讨论汽车、飞机、轮船的运动时，一般总是以地球表面为参考系；讨论火箭起飞时，同样以地球作为参考系较为方便；而当讨论宇宙飞船进入宇宙空间并成了绕日运动的人造天体时，则以太阳为参考系较为方便。

在运动学中，参考系是可以任意选取的；在动力学中，参考系选取可分为惯性参考系与非惯性参考系两种类型。在不同类型参考系中，物体的动力学规律有着明显的差别，我们将在后面章节中分别详细介绍物体在惯性系与非惯性系中的动力学规律。

2. 坐标系

为了定量描述被研究物体的空间位置，就必须在参考系上建立**坐标系**。参照系确定后，在参照系上选择适宜的坐标系，便于用数学方式描述物体在空间的相对位置。在理论力学中常见的坐标系有：直角坐标系、平面极坐标系、柱坐标系、球坐标系、自然坐标系等。

如果坐标系相对于参考系固定不动，称该坐标系与参考系固连。经常令坐标系与参考系固连，这时可用坐标系来表征参考系。

3. 质点及其位置的描述

1) 质点

在实际问题的研究中，往往物体自身的形状和大小与所研究的问题无关或者所起的作用很小，所以对该物体进行运动研究时，就可以在尺度上将其视为一个

几何点，而不必考虑它的形状和大小，但其拥有质量，且质量全部集中在这个点上，这种抽象化的理想模型，称为**质点**。例如，研究行星运动时，虽然行星本身很大，但它的半径比起它绕太阳运动的轨道半径却小得多，故在这种问题中，就可以把行星抽象成质点模型。

在所有的情况下，一切物体都可以看做是质点的集合，所以，力学问题的研究一般都从质点开始。

2) 质点的位置描述

当参考系选定后，我们就可以很方便地描述质点的空间位置。在参考系中选择某点 O 作为参考点，则 t 时刻位于空间 P 处的质点，可用**位置矢量** $\boldsymbol{r}$ (即有向线段 OP)确定质点位置，其中 $\overline{OP}$ 长度表示质点与参考点间的距离，$\overline{OP}$ 方向(由 O 点指向 P 点)表明质点相对于参考点的方位。

用位矢 $\boldsymbol{r}$ 描述质点的位置比较简洁，但仅有矢量表示还是不够的，我们还必须对有关物理量进行具体的运算。因此，人们在选定了参考系后，总在参考系中选定某一点 O 为坐标原点而建立一坐标系，进而位矢 $\boldsymbol{r}$ 可方便地用一数学表达式表示，质点的位置也可用坐标表示。在不同坐标系下，位矢 $\boldsymbol{r}$ 的表达如下所述。

a. 直角坐标系

直角坐标系是一种最常见的坐标系，也称为笛卡儿直角坐标系。如图 1-1 所示，在参考系上任取一参考点 O 为坐标原点，从 O 点顺次引出三个相互垂直的坐标轴，按右旋关系的次序分别标以 x 、y 、z 轴，在每一轴上分别取单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 、$\boldsymbol{j}$ 、$\boldsymbol{k}$ 作为基矢。

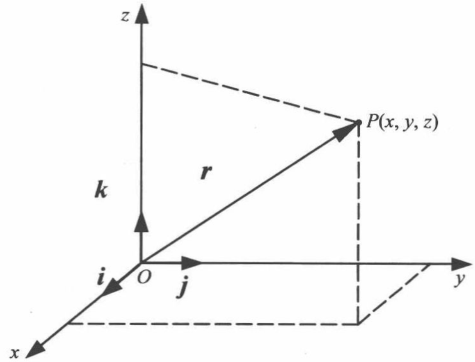


图 1-1 直角坐标系

这样，P 点的位矢可表示成：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

质点 P 的坐标为 (x, y, z) 。

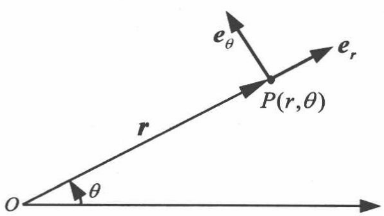


图 1-2 平面极坐标系

b. 平面极坐标系

平面极坐标系是另一种常见的二维坐标系，如图 1-2 所示，在参考系上任取一参考点 O 为坐标原点，从 O 点引出一根固定轴作

为极轴，则当质点位于 P 点处，其坐标为 (r,θ)，其中，r 是 $\overrightarrow{OP}$ 的长度，θ 是 $\overrightarrow{OP}$ 的极角。

P 点位矢为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \tag{1.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{e}_r$ 为 P 点处的径向单位矢量，大小为 1，方向从 O 点指向 P 点；另在 P 点处取垂直于位矢(θ 增加)方向的单位矢量为横向单位矢量 $\boldsymbol{e}_\theta$。注意，虽然 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 的大小恒等于 1，但它们的方向是随着质点的运动而发生变化的，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_r(\theta)\\ \boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\theta(\theta)\end{cases}$$

所以，P 点位矢的确定需要 r 和 θ 两个变量，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(r,\theta)$。

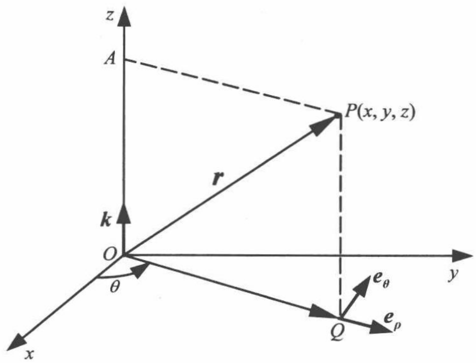


图 1-3 柱坐标系

c. 柱坐标系

对于三维空间问题，可以在平面极坐标系的基础上加一垂直于平面极坐标系所在平面的 z 轴，构成柱坐标系。如图 1-3 所示，三维运动的质点 P，某一瞬时的位矢 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}$，其中 $\overrightarrow{OQ}$ 为位矢 $\boldsymbol{r}$ 在 xOy 平面上的投影，$\overrightarrow{OQ}=\rho\boldsymbol{e}_\rho$；$\overrightarrow{OA}$ 为位矢 $\boldsymbol{r}$ 在 z 轴上的投影，$\overrightarrow{OA}=z\boldsymbol{k}$，故 P 点位矢可表示为

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{k} \tag{1.1.3}$$

d. 球坐标系

球坐标系选择变量为 $P(r,\theta,\varphi)$，基矢为 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$，如图 1-4 所示。t 时刻质点 P 距 O 点的距离为 r 后，P 就被限制在一个半径为 r 的球面上运动了，进一步给出 P 点在球面上的纬度 θ 和经度 φ，P 点位置就完全确定了。规定基矢为：$\boldsymbol{e}_r$ 沿矢径方向，$\boldsymbol{e}_\theta$ 沿 P 所在处的经线切线且指向 θ 增加方向，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 沿 P 所在处的纬线切线且指向 φ 增加方向，并且三矢量满足

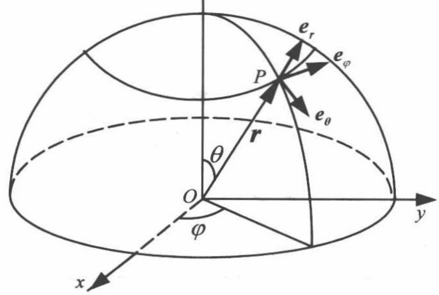


图 1-4 球坐标系

$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi$，此时，质点 P 的位矢为

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = r\boldsymbol{e}_r \tag{1.1.4}$$

从形式上看，式(1.1.2)与式(1.1.4)表达的矢径是一样的，但是必须注意，式(1.1.2)是二维形式，$\boldsymbol{e}_r$ 仅是 θ 的函数，而式(1.1.4)是在三维情况下的表达式，$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 是 θ、φ 的函数，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\theta,\varphi) \end{cases}$$

4. 质点运动方程及轨道方程

描述质点任一瞬时在参考空间中位置的数学表达式称为**质点的运动方程**。

质点的运动方程不仅确定了质点任一瞬时在参考空间中的位置，而且由此方程可进一步揭示质点运动的轨迹、速度和加速度。所以写出质点的运动方程是质点运动学所需研究的首要任务。一般常用的方程有如下几种。

1) 矢量形式的运动方程

描述质点运动的矢量形式运动方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1.5}$$

当 $\boldsymbol{r}(t)$ 随时间 t 变化时，其位矢末端恰好给出质点位置随时间的变化规律。此方程常用来进行理论推导。它的特点是概念清晰，是矢量法分析质点运动的基础。

2) 直角坐标形式的运动方程

将式(1.1.5)在直角坐标系下分解成分量形式，即

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.1.6}$$

这就是直角坐标系中的质点运动学方程。它是代数方程，虽然依赖于坐标系，但是运算容易。

在式(1.1.6)中消去时间参数 t，即得 $f(x,y,z)=0$，此函数给出了质点在空间的**运动轨迹**。

例 1.1.1 已知质点的运动学方程为 $x(t) = a\cos\omega t$，$y(t) = a\sin\omega t$，$z(t) = 0$，

其中a、ω为常数，求质点的运动轨迹。

解 从所给运动方程中消去参数t，即得

$$x^2 + y^2 = a^2$$

这是一个圆心在坐标原点的圆方程，所以该质点在xOy平面内是以(0,0)为圆心，做半径为a的圆轨道运动。

3) 自然坐标形式的运动方程

在已知质点运动轨道的情况下，在轨道上任取一点作原点O，规定沿轨道的某一方向为自然坐标系的正方向，则质点位置可由原点O到质点间的一段弧长s来确定，s称为弧坐标，质点运动方程在自然坐标系中的运动方程为

$$s = s(t) \tag{1.1.7}$$

对运动轨迹已知的质点，常用此方程描述质点的运动。用自然法研究运动，运算比较简便，各运动参数的物理意义明确。

4) 极坐标形式的运动方程

质点运动方程在极坐标系中的分量形式为

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \tag{1.1.8}$$

当质点在某平面上运动时，在任一瞬时，其位置也可用极坐标确定。

在式(1.1.8)中消去时间参数t，即得$f(r,\theta)=0$，此式即为质点在极坐标系下的运动轨迹。

质点在参考空间中的位置还可用其他的方法确定，例如柱坐标法或球坐标法。通过坐标形式的方程表示质点的运动学方程，并由此继续描述质点的其他运动量的方法称为分析方法。

§1.2 质点的速度和加速度

1. 速度

如图1-5所示，设质点P在t时刻位于A处，经Δt时间，质点由A点沿曲线运动到B点，则定义质点P在Δt时间内的**位移**为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{1.2.1}$$

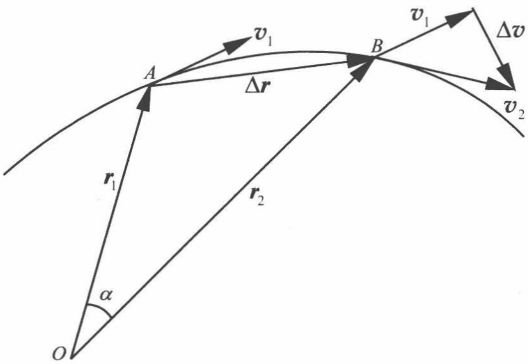


图 1-5 质点的速度和加速度

则 t 时刻质点位于 A 点处的**速度**可由下式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{\boldsymbol{r}} = v\boldsymbol{\tau} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

求出。我们称 $\boldsymbol{v}$ 为 t 时刻质点的瞬时速度，简称为**速度**，显然它是一个矢量。某时刻质点的速度方向沿着该时刻质点所在曲线轨迹的切线并指向运动的一方(即沿 $\boldsymbol{\tau}$ 方向)，速度的大小叫速率，其表达式为式(1.2.2)。

2. 加速度

一般情况下，质点的速度是时间的矢量函数，它的大小和方向都是随着时间而改变的。为此，我们可以引入加速度这一物理量，用它反映任意时刻速度随时间的变化率。

在图 1.2.1 中，将速度矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 平移到 $\boldsymbol{v}_2$ 处，两矢量起点重合，则由矢量运算规则可得，Δt 时间内质点的速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$。当 $\Delta t \to 0$ 时，我们可由

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.2.3}$$

得到 t 时刻质点的瞬时加速度 $\boldsymbol{a}$，简称**加速度**，其方向为速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向(即 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 方向)，在曲线运动情况下，它一般不沿轨道的切线方向。

3. 速度、加速度分量表示式

1) 直角坐标系

将式(1.1.1)代入式(1.2.2)得

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.2.4}$$

其中，$v_x=\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\dot{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z=\dot{z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$。

速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \tag{1.2.5}$$

速度的方向余弦为

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{v_y}{v}=\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{v_z}{v}=\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\end{cases} \tag{1.2.6}$$

其中α、β、γ分别为速度$\boldsymbol{v}$与x、y、z轴的夹角。

将式(1.2.4)代入式(1.2.3)得

$$\boldsymbol{a}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.2.7}$$

其中$a_x=\ddot{x}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，$a_y=\ddot{y}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$，$a_z=\ddot{z}=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$。

加速度大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} \tag{1.2.8}$$

加速度的方向余弦为

$$\begin{cases}\cos\alpha'=\dfrac{a_x}{a}=\dfrac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\\ \cos\beta'=\dfrac{a_y}{a}=\dfrac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\\ \cos\gamma'=\dfrac{a_z}{a}=\dfrac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\end{cases} \tag{1.2.9}$$