普通高等教育基础课规划教材

数学文化

MATHEMATIC CULTURE

第2版

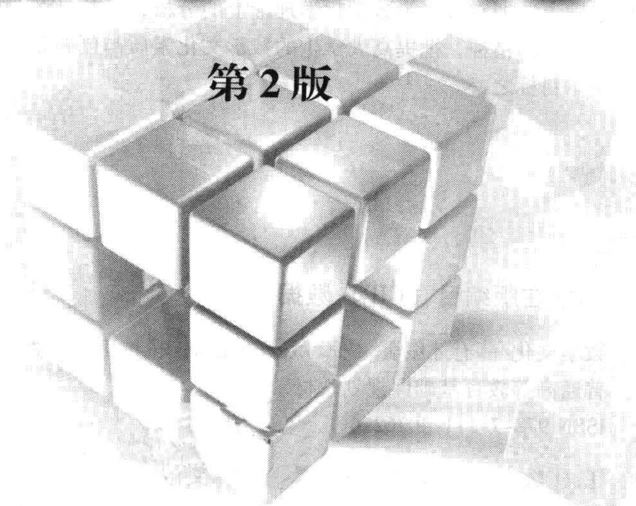
薛有才 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

数学文化

第2版



薛有才　编著

机械工业出版社

数学的思想、精神、文化对于人类历史文化变革有着重要的影响。我们正是在这一意义下来学习、讨论、研究数学文化的。

本书的特点有三：一是由大家熟知的许多数学史实来阐明数学的思想、方法与文化意义，特别是介绍了解析几何、微积分、概率论与数理统计、线性代数等大学生必修的大学数学内容的思想、方法与文化影响，以期加深对这些经典数学内容的理解；二是在众多数学事实的基础上，把它升华为数学哲学理论上的分析；三是延续中学数学新课标改革的精神，把提高大学生的数学文化素质与创新精神作为教材的基本目标之一。

图书在版编目（CIP）数据

数学文化/薛有才编著. —2版. —北京：机械工业出版社，2012.12
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-40262-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①数学-文化-高等学校-教材 Ⅳ.①O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第261930号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫 李 乐
版式设计：赵颖喆 责任校对：樊钟英
封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
三河市宏达印刷有限公司印刷
2013年2月第2版第1次印刷
169mm×239mm·20.25印张·394千字
标准书号：ISBN 978-7-111-40262-6
定价：35.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952

封面无防伪标均为盗版

第 2 版前言

《数学文化》第 1 版出版后，受到了读者的欢迎，笔者倍感欣慰。在两年的时间里，笔者收到了近 50 封信件（包括电子邮件），对本书提出了许多宝贵的意见与建议。笔者感谢这些师长、学者与朋友，也感谢所有本书的其他读者。

作为一本大学生素质教育教材、一本科普读物、一本通俗读物，如何选材并使之成为一个很好的系统，如何组成一个科学的数学文化教材体系，一直是笔者在教学实践中思考的问题。笔者阅读了几乎近年来所有出版的数学文化教材与相关读物，最后的落脚点还是与第 1 版相同，就是紧密结合大学数学教育的实际，从数学的思想、方法与意义，数学文化史，数学文化价值，数学理性与数学精神等方面来理解数学与数学文化，并从数学哲学角度予以升华，并以文化引领，尽力使之成为一本内容丰富、思想深刻、通俗易懂、体系比较完整的教材。

所以，本次修订保持与加强了第 1 版的特色，即：

1. 突出数学的思想方法意义。为此，大幅度修改了“解析几何的思想方法与意义”“微积分的思想方法与意义”“概率论与数理统计的思想方法与意义”三章，并增加了“线性代数的思想方法与意义”一章，增加了一些典型的范例来说明这些大学数学课程的基本思想方法，使之与大学数学教学更好的衔接。

2. 突出数学的文化价值与文化影响力。教材注意分析数学历史事件对人们的思想所起到的巨大作用、在社会历史文化变革中所起到的巨大影响力，以及数学在社会进步、科技进步、经济进步中所发挥的作用，以使读者更能深切体会数学的文化意义。

3. 突出数学的哲学分析。只有通过对数学史实深刻的哲学分析，才能使人们的思想得到启迪与升华。笔者从 M. 克莱因、张景中、徐利治、郑毓信、张楚廷、张顺燕等的著作中汲取了许多哲学营养，并较好地融合于教材之中，结合数学史实进行通俗易懂的、恰当的哲学分析，既不使读者陷入深邃的哲学理论分析之中，又能很好地体现数学的哲学意义。

4. 突出数学文化的教育性。数学文化教育是素质教育的一部分，能够从数学精神、哲学与文化素养、思维能力与创新能力等方面起到教育作用。这也是各位老师所希望的。

本次修订，除了上面所谈到的，还对第3章“数的历史”等作了较大修改，增加了“复数及其文化意义”部分，并对其他章节中部分内容作了适当的修改与调整，也删减了少部分不必要的内容，修订了个别错漏之处。

笔者感谢所有参考文献的作者，特别是徐利治、郑毓信、张楚廷、张顺燕、易南轩等先生，感谢李心灿老师提出的许多意见与建议，感谢众多读者的厚爱与支持。正是有了这么多人的工作与支持，才使本书能够成为一本好的读物，受到大家的喜爱。

最后，还是需要指出，由于笔者水平所限，资料文献所限，错谬之处在所难免。笔者真挚地期望各位专家学者及读者不吝赐教。

薛有才

2012年8月于杭州

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 版前言

《数学文化》终于与读者见面了。这是我 10 多年学习数学哲学与数学文化的一些体会，或者说是我对数学文化的一些理解。

著名数学教育家丁石孙教授说："我们长期以来，不仅没有意识到数学的文化教育功能，甚至不了解数学是一种文化，这种状况在相当程度上影响了数学研究与数学教育。"对于数学文化，本书是在文化即人文、即人的精神的意义下来讨论的。也就是说，数学是充满人文精神的科学。数学文化对于人类文化变革有着重要的影响。从而，在这个意义下，数学文化对人的思想、人的精神世界、人文素质有着巨大的影响。我们正是在这一意义下来学习、讨论、研究数学文化的。

数学文化内容繁多，各种专著涉猎的范围很广。作为一本主要面向非数学专业的大学生的文化素质教材，本书的选材着眼于以下几点：

1. 数学的思想、方法与意义。我们不仅应当把数学当知识，还应该从文化的角度来关注数学，从思想、方法论等角度提高对数学的认识。

2. 数学文化史。主要介绍中外数学文化的历史及其在人类文化变革中所起到的作用，从而做到以史为鉴，重视数学的文化价值。

3. 数学是一种多元文化。数学与政治、哲学、艺术、生活都有着深刻的联系，并互相促进。我们当然也应该在这种广义的意义上来理解数学文化。

4. 数学家的精神与思想境界是数学文化的一部分。通过数学家在学习、研究数学中的事迹来学习科学的方法，以及实事求是、坚忍不拔的科学态度和敬业精神。

本书的特点有三：一是由许多数学史实来阐明数学的思想、方法与文化意义，特别是介绍了解析几何、微积分、概率论与数理统计等大学生必修的大学数学内容的思想、方法与文化影响，以期加深读者对这些经典数学内容的理解；二是在众多数学史实的基础上，把它们升华为数学哲学理论上的分析；三是延续中学数学新课标改革的精神，把提高大学生的数学文化素质与创新精神作为本书的基本目标之一。

本书参考了国内外众多数学哲学与文化专家的研究成果，特别是 M. 克莱因

与郑毓信先生的研究成果对本书影响较大。笔者对这些内容进行了细致的整理，并把它们有机地组织在一起。本书中除了一些阅读材料外，凡有“＊”号的内容，由于涉及较深的数学哲学理论，可以作为阅读材料，供教学上参考。

本书参考了众多的文献，难免有的引用不能一一指出，敬请见谅。笔者对所有参考文献的作者特别是郑毓信、张楚廷、张顺燕、易南轩等先生表示衷心的感谢；感谢陈晓霞老师在资料方面所作出的辛勤工作；感谢机械工业出版社高等教育分社郑玫编辑在本书的策划、出版过程中所付出的辛勤劳动。

本书得到浙江科技学院教材出版基金的资助，特此致谢。

由于作者的水平有限，错误在所难免。真挚地期望各位读者不吝赐教。

薛有才

2009 年 7 月于杭州

目 录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

序言

数学与数学文化

数学是一种艺术，如果你和它交上了朋友，你就会懂得，你再也不能离开它。

——阿尔伯特·爱因斯坦

数学推理几乎可以应用于任何学科领域，不能应用数学推理的学科极少，通常认为无法运用数学推理的学科，往往是由于该学科的发展还不够充分，人们对于该学科的知识掌握得太少，甚至还在混沌的初级阶段。任何地方只要运用了数学推理，就像一个愚笨的人利用了一个聪明人的才智一样。数学推理就像在黑暗中的烛光，能照亮你在黑暗中寻找宝藏。

——阿尔波斯诺特

我们每个人都学习过数学。甚至我们每个人在牙牙学语的时候，我们的父母就开始教我们学习数数：1，2，3，…。每个孩童，可以说，就是在数数的过程中，开始了他们对世界的认识。对于数学，可以说每个人都有自己深刻的体会。那么，什么是数学呢？数学不只是数的世界、形的世界或应用广阔的科学世界中的科学；数学还是文化，是人类创造的最重要的文化之一，它以自己无穷的力量影响着世界，影响着人类。我国著名数学家齐民友先生写到：

一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。[1]

数学是关于世界与宇宙的真理还是人的创造物？数学是像物理、化学一样关于物质世界的科学知识，还是像绘画、小说一样是由人塑造出来的一种文化现象？

数学对科学世界具有什么样的贡献？没有数学，我们的科学世界会是什么样子呢？

数学对人文科学具有什么样的贡献？如果我们说没有数学，就不会有今天繁荣的人文与社会科学，像音乐、绘画、雕塑、哲学、经济学等，就没有今天的理性世界，你同意吗？

数学是美的，令人流连忘返，还是枯燥乏味的，令人难以想象？

数学家都是不食人间香火的假道士，还是充满了活力和爱心的“凡人”？

以上问题对每一个人来说，并不一定是清楚的。数学文化学习的任务就是要回答这些问题，告诉大家一个真实的数学世界。

1. 数学的基本特征

数学最基本的特征，就是它的抽象性、逻辑演绎性、应用的广泛性、语言性与教育的深刻性。

（1）数学的抽象性

提起数学的抽象性，每个人都有深刻的体会。例如，数字“3”，不是“3个人”、“3个苹果”等具体事物的数量，而是完全脱离了这些具体事物的抽象的“数”。数学中研究的形——三角形、四边形等，也不是三角板、长方形纸片或足球场等具体形状，而是与这些具体事物完全无关的、抽象的“几何图形”。数学中的等式“3 = 3”，也是完全抽象的。如果没有告诉我们等式两边的3是什么，我们是否可以说3kg的黄金等于3kg的杨树叶呢？当然，更不用说今天的代数数论、抽象代数学、拓扑学等现代数学分支了。

为什么数学必须是抽象的？它可以具体点吗？事实上，数学的抽象性主要是由数学的研究对象所决定的。数学是模式的科学，它研究事物及其相互间量的关系，因此它必须抛开事物具体的物理特征，而仅研究事物所具有的量的关系。还是让我们通过例子来说明吧。

例1 七桥问题

18世纪时，帕瑞格（Pregel）河从哥尼斯堡（Konigsberg）城中流过，河中有两个岛，把该城分为4个部分。河上有7座桥，将两岸和岛连接，如图1所示。城里的人从桥上走来走去，有人便提出这样一个疑问：一个人能否依次走过所有的桥，而每座桥只走一次？如果可以的话，这个人能否还回到原来出发地？这就是有名的“七桥问题”。许多人都在试验，每天都有许多人在想办法“不重复地走遍”所有这7座桥。但是，没有人能够完成这一“壮举”。这个问题有答案吗？

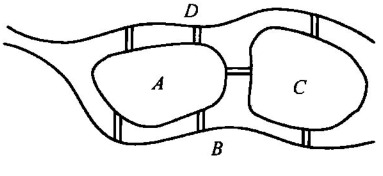


图 1

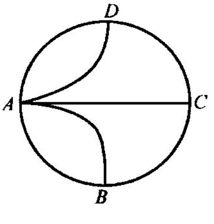


图 2

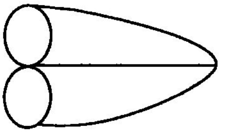


图 3

人们把这个难题拿到了大数学家欧拉面前，请他解决。欧拉经过认真思考，把问题抽象为：把城市的4个部分不断缩小，最后都缩成一点，而把连接两部分陆地的桥，设想成连接这两点的一条线，于是得到一个“图”，如图2（或图3）所示。于是，原来的问题就变为：这个图能否一笔画成而不重复？如果可以的话，起点是否与终点重合？这是一个有趣的问题。

欧拉是如何解决这个问题的？这需要一些简单的图论知识。图论中的“图”究竟指的是什么？或者说，什么是图？图是指若干个点，以及连接它们中某些点的线（直线或者曲线）组成的有限图形。图可以是平面的，也可以是空间的，如图4所示。图中的点，称为顶点或顶；图中的线，称为边。一个图 G 可以用它的顶点的集合 V 和边的集合 E 唯一确定，记作 $G=(V, E)$。如果两个图的顶点的集合与边的集合相同，则称这两个图是“同构”的。两个同构图，从图论的意义上就认为是完全相同的。如图4 a、b 两个图，虽然一个是立体的，一个是平面的，但它们的顶点的集合与边的集合相同，因此是同构的。同样，图2与图3也是同构的。

由彼此相连接的顶点和边组成的部分图形（子图），称为图的一条“链”或“路”。如果一条路首尾相连，则称为回路或环。例如图4b中就有多条回路，如：$A\to B\to C\to D\to A$，$A\to A_1\to D_1\to D\to A$，$A\to B\to B_1\to C_1\to D_1\to D\to A$，等。

一个图，如果每两个顶点都有且只有一条边相连，则称之为“完全图”。如果图 G 的一条链，包含了 G 的所有顶点和边，则称之为“欧拉链”；特别地，如果一条回路包含 G 的所有顶点和边，则称之为“欧拉回路”。于是，七桥问题就变成：图2是否为一个欧拉链？或者，它是否为一个欧拉回路？为此，需要了解关于顶点的几个概念。

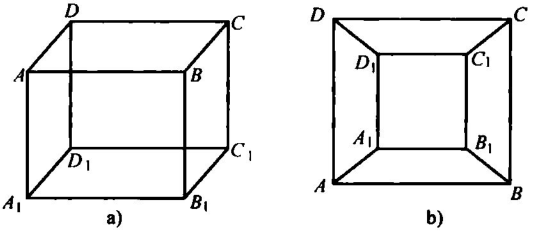


图 4

一个顶点所聚集的边的数目，称为该顶点的“度”。顶点的度是奇数，称为“奇顶点”；顶点的度是偶数，称为“偶顶点”。

关于一个图是否为欧拉链或欧拉回路，有一个简单的判定准则。我们把它写成定理形式：

定理1（欧拉回路判定准则） 一个连通图（图中任何两个顶点都能够用一条链来连接）是欧拉回路的充要条件是它的奇顶点的个数是0或2。

由此可以得到图是否可以一笔画的判定准则，也写成定理形式：

定理2（一笔画判定准则） 如果一个图上的奇顶点的个数是0或2，该图就

可以一笔画，否则不能一笔画。特别地，若奇顶点的个数为0，即图上没有奇顶点，则该图不仅可以一笔画，而且起点还能与终点重合。

据此，对于上述七桥问题很容易得出结论：因为图2（或图3）上的4个点都是奇顶点，所以它不是欧拉回路，所以它不能一笔画。从而知道哥尼斯堡七桥问题的答案是否定的。

这就是数学中的抽象过程，陆地再大再广，在所研究的问题中作用并不大，它们与一个点的作用相当；桥也不管长短曲直与宽阔，完全可以用一条曲线代替。抽象的结果，走路的问题变成了一笔画的问题。

不过，抽象并不是数学独有的属性，它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性。因此，单是数学概念的抽象性还不能说尽数学的特点。

数学在它的抽象方面的特点还在于：第一，在数学的抽象中首先保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切。第二，数学的抽象是经过一系列阶段而产生的，它们达到的抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象。数学中许多概念是在抽象概念之上的抽象，例如，群的概念。第三，数学抽象的特殊性在于数学对象是借助于明确的定义建构的；在严格的数学研究中，无论所涉及的对象是否具有明显的直观意义，我们都只能依据相应的定义和推理规则进行，而不能求助于直观。而且，在经常的数学研究中我们就是依抽象思维的产物作为直接的研究对象。[2] 例如，“虚单位 i”就是人们为了满足运算而构造出来的。在复数的运算中，我们完全是按照已有的定义“形式地”进行。

（2）数学的逻辑演绎性

获取知识有很多方法，譬如，经验的方法、归纳的方法、类比的方法。

远古时期的数学公式就是由经验日积月累而成。例如，古人对许多图形求面积的方法就是在多次反复体验的基础上得出来的。

类比的方法也在很多场合运用，如数学以平面的性质类比得出立体空间的性质。当然这些类比得到的结果还必须进行证明。

使用更为广泛的另一种推理方法是归纳法。例如，我们可以从以下等式中进行归纳：$4=2+2$，$6=3+3$，$8=5+3$，$10=5+5=7+3$，$12=7+5$，…，归纳得出：一个大于4的偶数可以表示为两个奇质数（素数）的和。归纳过程的本质在于，在有限的几个例子的基础上概括出一些总是正确的结论。

归纳法在科学实验中是基本的推理方法。尽管由归纳推理得出的结论，经常被事实证明是正确的，但还不能说所有归纳得出来的结论都是确定无疑的。有时候，归纳出来的结论并不正确。例如，如果近几期的彩票中奖号码比较接近，但我们不能从中归纳出这些号码就是中奖率比较高的号码。归纳推理的方式还会受到许多其他方面的限制。

在得出结论的几种方法中，每一种无疑都会在一定的情形中有用，但它们又

都有一定的使用范围。即使经验中的事实，或作为类比、归纳推理基础的事实是完全确定的，但得到的结论依然可能不确定、不正确。

数学中还有一种更重要的获取知识的方法，这就是古希腊人发展的演绎法。所谓演绎法是一种运用理性思维形式从一些普遍性结论或一般性原理中推导出个别性结论的论证方法。例如，在数学上，从原始概念和公理出发，运用演绎思维得出一些定理，然后再依据这些定理以及定义等继续进行推理论证，得出一个比较完整的数学理论系统。欧几里得几何学是世界上第一个演绎推理系统，它从几个不证自明的公理与一些基本定义出发，运用演绎推理方法，得到一系列几何（数学）定理，形成一个完整的公理化体系。演绎推理就是从已认可的事实推导出新命题，承认这些事实就必须接受推导出的新命题。演绎法重要的是，如果作为出发点的事实是确定无疑的话，则结论也确定无疑。

演绎法，作为获得新知识的方法，与反复试验法、类比法、归纳推理法相比，有很多优点。首先，如果前提确定无疑则结论也确定无疑；其次，与试验相反，即使不利用或缺乏昂贵的仪器，演绎也能进行下去；再次，在行动之前，利用演绎推理我们就已经知道结论。演绎法具有的这些优点，使得它有时成了唯一有效的方法。计算天文距离不可能使用直尺，而且试验也只能使我们局限在很小的时空范围内，但是演绎推理却可以对无限的时空进行研究。

我们经常说数学是精确的，如“$3+5=8$”，它是精确的，不是近似的、估计的；欧氏几何定理“三角形三内角之和等于180°”，是从几何公理和定理经过逻辑推导得出来的，而非猜测、估计、测量和试验得到的。数学的精确性，就是来源于数学的演绎推理。

我们还是通过例子来说明演绎法的力量。

例2　抛掷一枚硬币出现正面的概率

这是大家都非常熟悉的一个例子，我们来看看如何利用数学得到精确的概率值。解决这个问题的一种方法是计算“频率”，例如，掷100 000次硬币，然后计算出现“正面”的次数。出现“正面”的次数与100 000的比即为所求的频率，也就是所求的答案，或者差不多会接近真实的答案。不过，数学家们却往往通过思考去找出解决这个问题的方法：一枚质地均匀的硬币只有两个面，由于在硬币的形状上或者在扔硬币的方式中，没有任何因素有利于某一面的出现，所以得到每一面朝上的可能性是相同的。在此问题中，仅仅是出现“正面”的一面是有利于问题的情形。因此出现“正面”的概率就是1/2。

在历史上，曾有人做过许多次抛掷硬币的试验来验证上述结果，如表1所示。

表 1 历史上的抛掷硬币试验

试 验 者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	出现正面的频率 m/n
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可能有人认为上述例子体现不出数学的逻辑演绎性，仅是体现了数学家不是动手而是动脑子在研究问题。是的，逻辑演绎就是在用推理，而不是用试验（实验）的方法去解决问题。

下面再看一例。

例 3 抽屉原理的应用

设有 10 本书，共 3 类，文学类（A 类）、史学类（B 类）、数学类（C 类），证明至少有一类书有 4 本或 4 本以上。

这个问题很容易通过反证法证明。假设 A 类、B 类、C 类的书都不超过 3 本，那么所有的书加起来就不超过 9 本，这与有 10 本书相矛盾。所以，至少有一类书超过 3 本，即 4 本或 4 本以上。

这个问题相当于：有 10 件物品，装在 3 个抽屉里，那么有一个抽屉至少有 4 件物品。这是一个具体的抽屉原理问题，看似很简单，却很有用。

在任意的 6 个人中，一定可以找到 3 个相互认识的人，或者 3 个互不认识的人。你能证明这一命题吗？实际上，利用抽屉原理就不难证明。

现在，我们就把 6 个人看做 6 件物品，然后将他们标记为 A、B、C、D、E、F。以 F 为基准，将 A、B、C、D、E 这 5 件“物品”，分为两类亦即“装于两个抽屉”，一类是“与 F 相识”的，另一类是“与 F 不相识”的。这时，相当于把 5 件“物品”A、B、C、D、E 放进两个抽屉。那么，两“抽屉”中必有其一至少有 3 件“物品”。现在可以看到，无论是哪个“抽屉”中有 3 件“物品”，都将得到我们所需要的答案。

如果“与 F 相识”的抽屉里有 3 个人，不妨说是 A、B、C。这时，假若 A、B、C 3 人彼此不相识，那么已说明答案是成立的；假若 A、B、C 中至少有 2 人，例如 A、B 2 人相识，再加之 A、B 与 F 都相识，因此，A、B、F 3 人便是彼此相识的 3 人，这也说明了答案成立。如果“与 F 不相识”的抽屉里有 3 个人，仍不妨说是 A、B、C 3 人。这时，若 A、B、C 3 人互不相识，那么已说明答案成立；假若 A、B、C 中至少有 2 人，例如 A、B 2 人不相识，而他们又都与 F 不相识，这样，A、B、F 3 人便是彼此互不相识的 3 人。于是命题所说的答案亦成立。

从古希腊开始，演绎的方法过去一直是数学中“唯一”被承认的方法，归

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com