中学数学复习补充资料

（综合题解选编）

齐齐哈尔市教育学院
齐市中学数学教研会

综合题

1． 求方程 $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0$ 的一切实数解。

2． 已知 $\begin{cases} x = t\sin 38^0 & (1) \\ y = t\cos 38^0 & (2) \\ xy = \operatorname{tg} 52^0 & (3) \end{cases}$

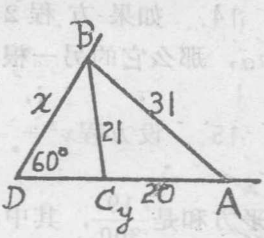
求x。

3． 一个三角形三边成等差数列，它的周长是12尺，面积是6平方尺，求证这个三角形是直角三角形。

4．三角形的三个内角成等差数列，它的面积是$10\sqrt{3}$．周长是20，求三边的长。

5． 已知方程$x^2-(k+2)x+k+7=0$两个根的平方和等于一个直角三角形斜边的平方，这个直角三角形的三边成等差数列，且勾长是3，求k的值。

6． 在60^0角的两边上分别有相距31米的两点A、B，如果把A点向顶点D移动20米，那么AB间的距离缩小10米，求原来的A点和B点各距点D多少米。



7. 在△ABC中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，如果C＝2B，且$a\neq b$。

求证：$(b+c):a=b:(c-b)$。

8. 已知$\operatorname{tg}\alpha$及$\operatorname{tg}\beta$是$x^2+px+q=0$的两个根．求$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$之值。

9. 已知方程$x^2-ax+2=0$的两个根是$\operatorname{ctg}\theta$、

$\dfrac{1}{\cos\theta}$．求a的值。

10. 若方程$x^2+ax+a+1=0$的两根为$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$，求证：$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$

11. 设A、B是直三角形的两个锐角，且$\sin A$、$\sin B$是$4x^2-2(\sqrt{3}+1)x+k=0$的两个根，求k的值和角A、B的度数。

12. 如果方程$x^2-4x\cos 2\theta+2=0$和方程$2x^2$ $4x\sin 2\theta-1=0$有一个根互为倒数，求θ角$(0<\theta<\pi)$。

13. 已知$\sin x+\cos x=\sqrt{2}$，以$\operatorname{tg}x$与$\operatorname{ctg}x$为根作一个一元二次方程。

14. 如果方程$2x^2-2ax+a^2-1=0$的一个根是$\sin\alpha$，那么它的另一根是$\cos\alpha$或$-\cos\alpha$。

15. 设方程$x^2+\dfrac{1}{3}x\sin\alpha+\dfrac{1}{50}\cos\dfrac{\pi}{3}=0$两个根的平方和是$\dfrac{19}{300}$，其中$\alpha$在0与$\pi$之间，解这个方程。

16. a、b、c表示一个三角形三边的长，如果方程 $(c^2-mb)\ x^2+2\sqrt{a^2+b^2}x+1=0$ 有相等的两个实根，

当（1）$m=0$；（2）$m=-a$；（3）$m=a$时，求c边所对角的度数。

17. 一个三角形的三边成等差数列，它的面积与同它周长相等的等边三角形的面积的比是3∶5，求这个三角形三边的比。

18. 在△ABC中，已知$a=2b\cos C$，求证这个三角形是等腰三角形。

19. 一个三角形两条边的长分别是5cm和3cm，它们夹角的余弦是方程$5x^2-7x-6=0$的根，求这个三角形的面积。

20. 在△ABC中，如果$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，且B为锐角，求证△ABC是等腰直角三角形。

21. 已知A、B、C是三角形的三个内角，且$\lg\sin A=0$，$\cos C$，$\sin B$是方程$4x^2+px+1=0$的两个根，求p的值和角A、B、C的度数。

22. 在△ABC中，设$b=a\sin C$，$c=a\cos B$，试判定这个三角形的形状。

23. 在△ABC中，$ab=60$，$\sin A=\cos B$，它的面积等于15，求三角形各内角。

24. 设三角形的三边为$2x+3$，x^2+3x+3，x^2+2x（$x>0$）．求其最大角．

25. 在△ABC中，A、B、C成等差数列，AC＝4，

$\triangle ABC$的面积$S=\sqrt{3}$，求AB与BC的长。

26．如果三角形的三个内角成等差数列，三边成等比数列，则三角形必为正三角形。

27．$\triangle ABC$的三个内角成等差数列，已知最小角是45°，最小边长是$\sqrt{2}\,dm$，求其他两条边的长。

28．已知$\sin\alpha$是$\sin\theta$，$\cos\theta$的等差中项，$\sin\beta$是$\sin\theta$，$\cos\theta$的等比中项，求证$2\cos 2\alpha=\cos 2\beta$。

29．设$a\cos^2\dfrac{c}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$，求证三角形的三边成等差数列。

30．在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是内角A、B、C的对边，$\lg\sin A$，$\lg\sin B$，$\lg\sin C$成等差数列．而方程$cx^2+2cx+a=0$有两个相等的实根，求证：$\sin A=\sin B=\sin C$。

31．在$\triangle ABC$中，已知$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，求A．

32．在平行四边形中，一个锐角为60°，对角线的平方之比为$\dfrac{19}{7}$．求它的两条邻边之比。

33．设园内接四边形ABCD四条边的长分别是a，b，c，d，它的面积是s，a和b的夹角是α．

求证：（1）$\cos\alpha=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$；

（2）$\sin\alpha=\dfrac{2s}{ab+cd}$．

34． 已知a、b、c是三角形的三条边，求证方程$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$没有实根。

35． 如果三角形两边的和为一定值1，夹角是60°，证明当周长是最小值时，这个三角形是等边三角形。

36． 在底边a和顶角A为一定的所有三角形中，求这样三角形的最大面积。

37． 在△ABC中，已知$c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$，$\angle C = 30°$，求 $a + b$的极大值。

38． 已知三角形有一内角是60°，这个角所对的边是1，求证其余两边的和不大于2。

39． 已知m、n、p均为正数，且$m^2 + n^2 = p^2$，求$\dfrac{m+n}{p}$的最大值。

40． 求曲线$2x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 4y + 27 = 0$的最高点和最低点的坐标。

41． 三个数成等比数列，其和等于a（$a > 0$），求它们的积的极大值和极小值。

42． 已知B、C两点的坐标分别是（0，6）、（0，2），A为X轴负半轴上一点，问A在何处，可使∠BAC有最大值。

43． 墙上挂着一张9尺高的巨幅图画，底部距地面8尺，设观众眼睛距离地面是5尺。问观众站在离画面多远的地方看得最清楚。（即求观众站在离画面多远处，对画面有最大的视角）？

44．在椭园$x^2+4y^2=4$上取一点p，使得以p、A（4，2），B（2，0）为顶点的三角形的面积最大．

45．已知方程$a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)=0$有两个不相等的实根，其中a、b、c是△ABC的三边，求证a边所对的角A必为锐角．

46．三角形的三边a、b、c成等差数列，b边所对的角是60°，求证方程

$ax^2+bx+c=0$没有实根．

47．已知△ABC为锐角三角形，∠C＝2∠B．

求证：$\sqrt{3}>\dfrac{AB}{AC}>\sqrt{2}$．

48．已知方程$x^2+x\sin 2\theta-\sin\theta\cdot\operatorname{ctg}\theta=0$

$\left(\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$的两个根是$\alpha$，$\beta$，问当$\theta$取什么值时，等比数列

$1，\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)，\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2，\cdots$前100项的和为0．

49．如果在△ABC中，ctgA，ctgB，ctgC成等差数列，那么a^2，b^2、c^2也成等差数列．

50．设△ABC的三边a、b、c成等差数列，

求证：$\cos\dfrac{A-C}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}$．

51．在△ABC中，如果三个内角的正弦成等差数列，那么三个内角的半角的余切也成等差数列．

52．如果在△ABC中，$\sin(B+C-A)$、

$\sin(C+A-B)$，$\sin(A+B-C)$ 成等差数列，那么 $\operatorname{tg}A$，$\operatorname{tg}B$，$\operatorname{tg}C$ 也成等差数列。

53. 在△ABC中，已知 a^2，b^2，c^2 成等差数列，

求证 $\dfrac{\cos A}{a}$，$\dfrac{\cos B}{b}$，$\dfrac{\cos C}{c}$ 成等差数列。

54. 在△ABC中，已知 $\cos A+\cos B=4\sin^2\dfrac{C}{2}$，

求证这个三角形的三边成等差数列。

55. 三角形ABC的三边 a、b、c 成等差数列，且 $A-C$ 为直角。求各角的正弦。

（或求证三角形三边之比是 $(\sqrt{7}+1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}-1)$）。

56. 四边形ABCD中，$\angle B=\angle C=90°$，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，以AD为直径作⊙O，⊙O与BC的交点是E、F，且 $\angle BAE=\alpha$，$\angle BAF=\beta$，

求证 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两个根。

57. 设 $\operatorname{tg}\beta$，$\operatorname{tg}2\beta$，$\operatorname{tg}\alpha$ 成等差数列，

求证：$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\sin 2\beta$。

58. 在△ABC中，$\angle A=45°$，BC边上的高AD将BC分为 2 cm、3 cm 两部分，求这个三角形的面积。

59. 设 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$ 是方程

$x^2-(\sqrt{2}\cos 20°)x+(\cos^2 20°-\dfrac{1}{2})=0$ 的两个根，其中 α 和 β 都是锐角，求 α，β 的度数。

60. 过正方形ABCD的B点引直线 $BE\parallel AC$，以A为

园心，AC为半径画弧交BE于E，

求证：　$tg\angle BAE=2-\sqrt{3}$.

61．已知　$4\sin^2\alpha-7\sin\alpha\cos\alpha+2=0$

$(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，

求　$1+tg\alpha+tg^2\alpha+tg^3\alpha+\cdots$的和．

（注：此题可要求学生求有限项的和．例如求前10项的和）．

62．正数a、b、c成等比数列，x为a、b的等差中项，y为b、c的等差中项，试求$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}$之值．

63．已知一二次函数的图象过（0，3），（－2，－5），（1，4）三点．求此二次函数的解析式，并求此图象的顶点A及它与x轴的两交点B、C所围成的△ABC的面积S．

64．a、b、c为直角△ABC的三边，且c为斜边，△ABC的内切园分别切BC、CA、AB于D、E、F，则　BD和AE为方程．

$2x^2-2cx+ab=0$的两根．

65．已知　a、b、c为不等边△ABC的三边，

求证：$(x-b)^2-4(x-a)(x-c)=0$有两个不等的实数根．

66．已知方程$ax^2-(a-3)x+a-2=0$至少有一个整数解，求整数a的值，且对应每个a值，求出方程的整数解．

67. 已知方程 $x^2-2(m+1)x+m^2=0$ 有两个整数根，且 $12<m<60$，求整数m之值及相应的两整数根。

68. 已知方程 $4x^2-5x+m=0$ 的两根为一直角三角形两锐角的正弦，求m之值。

69. 若 $\sin A+\cos A=m$。求证：$\sin A$

$\cos A$是方程 $2x^2-2mx+m^2-1=0$ 的根。

70. 有两个n项的等差数列，其首项与公差分别为a、b及b、a，且a、b为方程

$x^2-4x+1=0$ 的两个根，试以这两数列的n项和为两根作二次方程。

71. 若两个正方形的边长为方程$x^2-px+q=0$ 的两根，求证这两个正方形的面积为方程 $(x+q)^2=p^2x$的两根。，

72. 设 θ是不等边三角形中之最小角，

且 $\cos\theta=\dfrac{x+1}{x-1}$，求实数$x$的范围。

73. 首项与公差都不为零的等差数列，它的前n项之和为S_1。前$2n$项之和为S_2，前$3n$项之和为S_3，求证：

$S_2^2>S_1\cdot S_3$

74. 证明：当$a>0$，$a\neq1$时，

$$\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}}>\frac{n+1}{n}.$$

75. 直角三角形两直角边之和与斜边之比为$\dfrac{a}{b}$，

求证：$2b^2\geqslant a^2$。

76．三角形三内角成等差数列，求证最大边与最小边之和不大于另一边的两倍。

77．已知A、B、C为△ABC的三个内角，并且方程 $(\sin B-\sin C)x^2+(\sin C-\sin A)x+(\sin A-\sin B)=0$ 的两根相等，求证：这个三角形的三边a、b．c成等差数列。

78．数列$\lg1000$，$\lg(1000\cos60°)$，$\lg(1000\cos^2 60°)$，……$\lg(1000\cos^{n-1}60°)$，…问这数列的前多少项的和为最大？（已知$\lg2=0.3010$）

79．求：$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{2\cdots22}_{n个2}}$ 的值

80．A、B、C…为多边形的内角，且

$$\lg\sin A+\lg\sin B+\lg\sin C+\cdots=0$$

问此多边形是什么样的多边形？

81．已知 $\frac{a}{c}=\sin\theta$，$\frac{b}{c}=\cos\theta$ $(C>0$，

$0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，且

$$(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a^a$$

求证：$(\lg a)^2=\lg(c+b)\cdot\lg(c-b)$．

82．已知 $a\sin x+b\cos x=0$，$A\sin2x+B\cos2x=C$（其中a、b不同时为零）．

求证：$2abA+(b^2-a^2)B+(a^2+b^2)C=0$．

83．若 $\frac{x(y+z-x)}{\lg x}=\frac{y(z+x-y)}{\lg y}=\frac{z(x+y-z)}{\lg z}$，且

x，y，z皆为不等于1的正数，$xyz=1$。

求证：$y^z z^y=x^z z^x=x^y y^x$。

84．已知直角三角形斜边上的高为h，两直角边的和为m，求斜边。

85． 若三角形三边a，b，c适合 $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$，

求证：这个三角形为等边三角形。

86． 在直角梯形ABCD中，已知较短的底边$AB=a$，较长的底边$CD=c$，垂直底边的腰$BC=b$。以另一腰AD为直径作⊙O，求证：

（1）若⊙O与BC相交于E、F，则$\operatorname{tg}\angle BAE$与$\operatorname{tg}\angle BAF$是方程$ax^2-bx+c=0$的两个根，且$b^2-4ac>0$；

（2）若⊙O与BC相切，则$b^2-4ac=0$；

（3）若⊙O与BC相离，则$b^2-4ac<0$。

87.设园内接四边形一边为园的直径，其余三边为a、b、c，求证：这个园的直径是方程$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$的根。

88． 已知$0^\circ<x<45^\circ$，$\lg\operatorname{tg}x-\lg\sin x=\lg\cos x-\lg\operatorname{ctg}x+2\lg 3-\frac{3}{2}\lg 2$，求$\sin x-\cos x$之值。

89． 一直角三角形的两直角边为a，b，a边所对的角为

$arc\sin\frac{\sqrt{ab}}{2b}$,

求证：$lg\frac{a+b}{\sqrt{b}}=\frac{1}{2}(lga+lgb)$

90．△ABC三内角等差数列，又最大角A与最小角C的正切值为方程 $x(x-3)+2=\sqrt{3}(x-1)$ 的根，且三角形ABC的面积为 $(3-\sqrt{3})cm^2$，求A、B、C的度数及a、b、c的长。

91．已知△ABC的边AB、AC之和为10，夹角θ，且方程$10x^2-10x\cos\theta+3\cos\theta+4=0$的两个根相等，求此三角形面积的极大值。

92．△ABC三角成等差数列，AC＝4

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$.

求AB、BC之长.

93．△ABC之边为a、b、c，三内角A、B、C作成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

94．三角形三边为a、b、c，令$I=a+b+c$.

$S=ab+bc+ac$　　求证：$3S\leqslant I^2<4S$.

95．若方程$5x^2-10x\cos\alpha+7\cos\alpha+6=0$的两个根相等，试求两邻边之和为6，夹角为α的平行四边形的最大面积。

96．在两平行线AB和CD上分别取一定点M、N，在直线AB上取一定线段ME＝a，在线段MN上取一点K，连结EK，并延长，交CD于F，试问K取在哪里，△EMK

与△FNK的面积之和为最小？最小值是多少？（设AB与CD间的距离d为已知）

97．如方程$x^2+px+q=0$的两根为$tg\theta$和$tg(\frac{\pi}{4}-\theta)$，-，又这个方程的两个根的比是3∶2，试求p，q之值．

98．在正方形ABCD中，（1）E为BC边上一点，$AB+BE=AE+EC$，求$\frac{BE}{EC}$之值，（2）F为BC边上另一点，且△ABF的面积等于梯形AFCD的面积的一半，求证：$BF=2FC$．

99．如　$A=lg\sqrt{x+1}$，　$B=lg\sqrt{4-x}$，

$C=lg\sqrt{x-2}$，问x为哪些实数值时，A、B、C都有意义？又当x为何数值时，A＋B＋C的值等于$25^{\log_5\sqrt{lg^2}}$？

100．解方程：$\log_{16-3x}(x-2)=\log_8 2\sqrt{2}$．

101．解方程：$3^{\log_3 x}+7^{\log_2 1}=5^{\log_5 \frac{1}{3}(2x+5)}$．

102．解方程：$(\sin\frac{\pi}{36})^{lg(1+\sin x)-4lg\cos x+lg(1-\sin x)}=4\sin^2\frac{\pi}{6}$．

103．△ABC三内角A、B、C成等差数列，且

$\log_4\sin A+\log_4\sin C=-1$，这三角形面积为$\sqrt{3}$，求三边$a$、$b$、$c$的长.

104. 如果a、b、c均大于零且成等差数列，证明：

$\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$、$\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$、$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$也成等差数列.

105. 设 $a>0$、$b>0$、$c>0$.求证：

若$\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$、$\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$、$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$成等差数列，则$a$、$b$、$c$也成等差数列.

106. 已知 a^2、b^2、c^2成等差数列，求证：

$\dfrac{1}{b+c}$，$\dfrac{1}{c+a}$，$\dfrac{1}{a+b}$ 也成等差数列.

107. 设 S_m、S_n、S_k 分别是一等差数列的前m，n，k项之和，求证：

$$\frac{S_m}{m}(n-k)+\frac{S_n}{n}(k-m)+\frac{S_k}{k}(m-n)=0$$

108. 在等差数列中，如果$S_m=S_n$（$m\neq n$）求证：$S_{m+n}=0$.（其中S_k为数列的前k项之和）.

109. 已知 a_m、a_n、a_k，a_l为一等差数列中不同的项，且有$m+n=k+l$，求证：$a_m+a_n=a_k+a_l$.

110. 求证 $2n+1$个连续整数之和必能被$2n+1$整除.

111. 如果方程$a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)$

$=0$有等根（a、b、c 均不为零）证明：$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$成等差数列．

112． 数列3、6、12、24，……的前多少项的和就开始大于149997（已知$lg2=0.3010$）．

113． 已知 $a.b.c$成等比数列，且$b+c\neq 0$，求证：$ab+ac\quad b^2+bc\quad bc+c^2$也成等比数列．

114． 设 n为任意正整数，证明：不论$a.b.c$是等差数列还是等比数列，必有$a^n+c^n\geqslant 2b^n$．

115． 已知a、b、c分别为一等比数列的第m、n、k项，求证：$a^{n-k}b^{k-m}c^{m-n}=1$．

116． 已知a_1、a_2、……a_n（所有$a_i>0$）成等比数列，公比为q，求证：

$$a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots\cdots+a_n{}^n\geqslant n\ (a_1a_2)^{\frac{n}{2}}.$$

等号仅当$q=1$时成立．

117． 设S_n，S_{2n}，S_{3n}分别是一等比数列的前n、$2n$、$3n$项之和，求证：

$$S_n\ (S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2.$$

118． 求数列：7，77，777，……$\underbrace{777\cdots7}_{n个7}$…之前$n$项之和．

119． 证明数列$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{4}$，…$\frac{n}{2^n}$，…的前 n 项之和小于2．

120. 已知a、b、c及α、β、γ各成等差数列，而$\frac{a}{\alpha}$、$\frac{b}{\beta}$、$\frac{c}{\gamma}$成等比数列，求证：$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$.

121. 若a、b、c都是正数，求证：

$$\log_{0.5}\frac{a+b}{2}+\log_{0.5}\frac{b+c}{2}+\log_{0.5}\frac{c+a}{2}\leqslant-\frac{\lg a+\lg b+\lg c}{\lg 2}.$$

122. 设$y=\lg(2\sin x)$，回答下列问题：

（1）求函数定义域；

（2）x为何值时，$y=0$；

（3）x为何值时，函数有极大值？极大值多少？

（4）当x从零变化到π时，函数值怎样变化？

（5）这函数是否周期函数？如果是，周期是多少？

（6）作出这函数的图象.

123. 已知$x^2-2(\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta)x+1=0$的一个根是$2+\sqrt{3}$，求$\theta$.

124. 设方程$(1+\mathrm{tg}^2\theta)^2x^2-4\mathrm{tg}^2\theta x+1=0$的两根相等，且$\theta$为锐角，求$\theta$的度数，并解此方程.

125. 已知α、β、γ为锐角，且$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}^3\frac{\gamma}{2}$，$\mathrm{tg}\gamma=2\mathrm{tg}\beta$，求证：$\alpha$、$\beta$、$\gamma$成等差数列.

126. 已知△ABC的三内角成等差数列，其内接园半径为R＝2，这三角形的三个角的正切是方程$x^3-(2m+3)x^2+(5+4m)x-\sqrt{3}(m+2)=0$的根，求此三