普通中学四年一貫制課本

代　数

北京师范大学数学系教材編写組

科学普及出版社

普通中学四年一貫制課本

代　　数

第三册

北京师范大学数学系
材　編　写　組

科学普及出版社
1958年·北京

編者的話

在党的总路綫光輝照耀下，出現了社会主义建設全面大躍进的高潮，我国的教育事業也正汹涌澎湃地向前迈进。全国普通中学都已进行或正在进行教育改革，徹底摆脫过去在中学数学教学中严重存在的脫离無产阶級政治，脫离生产实际、厚古薄今、水平很低的落后狀态，試圖將普通教育（中学）改为四年，这就要求我們急速地編出这一套教科書：堅决地貫徹毛主席的教育方針，做到厚今薄古，紧密地与生产实际相結合，能够反映出祖国大躍进的形势，使学生在四年內除学完过去六年所学的数学課程外，还要获得一些近代的有用的数学知識。

为了滿足这种需要，我們北京师大数学系在党的領导下，由二、三、四年級同学与部分教师及先到校的工农新同学等100多人，組成了教材編写組，大家破除迷信，解放思想，在毛主席教育与生产劳动相結合的方針指导下，發揮了集体的力量，采取了人人动手的群众編書的方法，所有参加編写工作的同志，个个干勁冲天，为了尽快地写出为無产阶級的政治服务，为生产服务的教材，大家日以繼夜地工作着，深入到生产实踐中去。总支領导我們在半个月的时間里，先后訪問了一百多个工厂、农業合作社、大、中、小学，科学院，国家机关，商店及建筑工地等單位，所到之处也都得到了各單位的党組織的关怀和支持，特別是石景山鋼鉄厂、国棉二厂、北京城市規划局、地質勘探处測量队的同志們，給了我們很大的帮助。

我們所編写的教材，其中有算术、代数、几何与三角、解

析几何与微积分初步等。短时期内完成这样的工作，在过去是不可想象的，可是今天我們在党的領导下，鼓足了革命干劲，作了大胆的嘗試。但由于我們自己的知識很不足，对生产实际的了解还很少，加上时間急促，因此在教材中还一定存在不少問題，特别在联系生产实际的問題上还是很不够的，离要求还很远。我們殷切地希望用这套教材的教师和同学們，踴躍地提出批評和改进的意見来，讓我們共同研究和討論，使我国能早日有一套完善地、最好地貫徹毛主席教育方針的普通中学教材。

北京师范大学数学系教材編写組

1958年9月

目　次

第十七章　不等式

引　言

在現实生活中我們所遇到的两个量之間的关系往往是不等的关系，举两个例子来看.

例 1　有两塊早稻丰产地各是 1.3 亩、1.7 亩，总产量各为 4 万斤、6 万斤，問那塊地的产量高?

这个問題就是要求$\frac{4}{1.3}$与$\frac{6}{1.7}$那个大?

例 2　沒有裝滚珠軸承的乙車的速度是已裝滚珠軸承的甲車的速度的一半，两車在同一道路上，沿着同一方向前进，而乙車在甲車前 20 里，只知 3 小时后甲車就追过乙車，那末甲車的速度最少应是多少?

像这类的問題在实际生活当中是常常会遇到的，因此本章將研究这些內容.

183. 不等式

我們已經知道，实数可以用数軸上的点来表示. 数軸上两不同点 A 和 B，表示两个不同的实数 a 和 b. 如果 A 点在 B 点的右边，那末 A 点所表示的实数 a 就大于 B 点所表示的实数 b. A 点在 B 点的右边，表示 b 須要加上一个正数，才能得到 a；也就是說，a 减去 b 所得的差是一个正数. 因此要比較两个实数 a 和 b 的大小，只要考察它們的差就可以了. 例如圖 64 中 A、B 分别表示两个不同的实数 $a=3$ 和 $b=\frac{2}{3}$. 从数軸上可

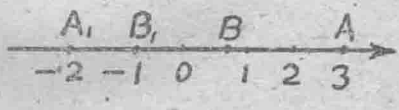

圖 64

以看出，A在B的右边，a和b之差是$3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$，所以$3>\frac{2}{3}$. 又例如：$A_1$，$B_1$各表示两不同实数$a_1=-2$，$b_1=-1$，从数軸上可以看出，$A_1$在$B_1$的左边，$a_1$和$b_1$之差是$-2-(-1)=-1$，所以$-2<-1$. 这就是說：

如果$a-b$是正的，那末$a>b$；如果$a-b$是負的，那末$a<b$；如果$a-b$等于零，那末$a=b$.

反过来，如果$a>b$，那末$a-b$是正的；如果$a<b$，那末$a-b$是負的；如果$a=b$，那末$a-b$等于零.

事实上$a>b$也就是$b<a$.

例 1 引言中的例1，設$a=\frac{6}{1.7}$，$b=\frac{4}{1.3}$.

$$\because\quad a-b=\frac{6}{1.7}-\frac{4}{1.3}=\frac{7.8-6.8}{2.21}=\frac{1}{2.21}.$$

所以：1.7亩的丰产地比另一塊丰产地产量高.

例 2 $a=-3$，$b=-\frac{2}{3}$.

$$\because\quad a-b=-3-\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}.$$

$$\therefore\quad a<b.$$

要表示一个代数式的值大于或小于另一个代数式的值，我們也用符号“$>$”或“$<$”把它們連接起来，这样就組成了**不等式**.

例如：$a^2+1>0$.

$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.（a、b为不相等的正数）

若两个或几个不等式的不等号相同，則叫它們为**同向不等式**；若两个不等式的不等号相反，則叫它們为**異向不等式**.

注意 因对于任意两个复数沒有大小的規定，所以在比

較两数的大小时，我們所說的数，指的都是实数．在本章中除了特别声明外，所有的字母都表示实数．

例 已知 $x \neq 0$，比較 $(x^2+1)^2$ 和 (x^4+x^2+1) 的大小．

解
$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$$
$$=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1=x^2.$$

$\because$ $x \neq 0$ $\therefore$ x^2 是一个正实数．

$\therefore$ $(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.

184.不等式的基本性質

不等式有下列四个基本性質：

(1)若 $a>b$，$b>c$，則 $a>c$；

(2)若 $a>b$，則 $a+c>b+c$；

(3)若 $a>b$，$c>0$，則 $ac>bc$；

(4)若 $a>b$，$c<0$，則 $ac<bc$.

前面三个性質留給学生，我們証第4个性質．

証 $a>b$ 就是說 $a-b$ 是正的；$c<0$ 就是說 c 是負的．所以 $(a-b)c=ac-bc$ 是負的，因此，$ac<bc$.

由性質4和5可知：**不等式兩边同乘以一个正数，不等号不变；不等式兩边同乘一个負数，不等号改向**．

由上面的基本性質可以推出不等式的其他一些性質：

(5)若 $a>b$，$c>d$，則 $a+c>b+d$.

这个性質可以推广到任意个同向不等式的情况：**把几个同向不等式兩边分别相加，仍得同項不等式**．

(6)若 $a>b$，$c<d$，則 $a-c>b-d$.

証明：因 $c<d$，$-1<0$，所以 $-c>-d$. 又因 $a>b$，由性質(5)，得 $a-c>b-d$.

这也就是說：**兩个異向不等式兩边分别相減，得到与被減不等式同向的不等式**．

(7)若 $a>b$，$c>d$. a，b，c，d，都是正数，則 $ac>bd$.

問題：若 a、b、c、d 不都是正数，这个性質是否成立？

这个性質可以推广到任意个兩边都是正数的同向不等式：**几个兩边都是正数的同向不等式兩边分別相乘，仍得同向不等式.**

(8)若 $a>b$；a，b 都是正数. 則 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

証明：因为 $a>0$，$b>0$，所以 $ab>0$，因此 $\frac{1}{ab}>0$. 因为 $a>b$，所以 $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$，就是 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$. 所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(9)若 $a>b$，$c>d$. a. b. c. d 都是正数，則 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

这就是說，**兩个兩边都是正数的異向不等式兩边分別相除，得到与被除的不等式同向的不等式.**

(10)若 $a>b$，a，b 都是正数，n 是大于1的正数. 則 $a^n>b^n$.

(11)若 $a>b$，a. b 都是正数，n 是大于1的正数. 則 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

証明　把 $\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 比較大小，只能得下列三种情况之一：或 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，或 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，或 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

若 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，則 $(\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b})^n$，就是 $a<b$，与假設 $a>b$ 矛盾.

若 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，則 $(\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{b})^n$，就是 $a=b$，与假設矛盾，

所以只能有 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

性質(5)、(7)、(9)、(10)的証明也留給学生.

185. 不等式的証明

不等式的証明与証明恒等式的問題相仿，就是要証对于給定的不等式中字母的某些值不等式都成立.

例 求証：只要 a 和 b 为不相等的实数，$(a-b)^2>0$ 都成立.

这个例子里的不等式的成立是很明显的. 但經常会遇到一些比較复杂的不等式，它們的成立不这样明显，需要想方法去証明. 現在介紹兩种常用的方法.

(1)綜合法　直接用不等式的性質去証.

例 1 已知 a, b 是不相等的正数，求証：$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

証 因 a 和 b 是不相等的正数，所以 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 也是不相等的正数. 而 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 是不等于零的实数.

所以　$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$,

即　$a-2\sqrt{ab}+b>0$.

移項，得　$a+b>2\sqrt{ab}$.

兩边都除以 2，得　$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

例 1說明：**兩个不同正数的等差中項大于它們的等比中項.**

如果 $a=b$，显然 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$.

例 2 用一定的金屬綫做成長方形綫圈，問如何做才能使綫圈所圍的面积最大?

解 設長方形長寬各为 a、b，周長为 l，則

$$2a+2b=l.$$

由例 1 可知：

$$\frac{(2a)+(2b)}{2}\geqslant\sqrt{(2a)(2b)},$$

即　$$\frac{l}{2}\geqslant\sqrt{4ab}.$$

$$\therefore \qquad \frac{l}{4} \geqslant \sqrt{ab}.$$

最后式子中只有在 $a=b$ 时等号才成立，所以当 $a=b$ 时，即做成正方形，所圍面积最大.

例 3 求証 $x=\frac{1}{2}$ 时，$1+x-x^2$ 有最大値 $1\frac{1}{4}$.

証明 $1+x-x^2=1-(x^2-x)$

$$=1-\left[x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$=1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$=1\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$1+x-x^2$ 有最大値 $1\frac{1}{4}$.

（2）分析法　就是假定所証明的不等式是成立的，用恒等变换及不等式的性質推演下去，如果能够得到一个已知它成立的不等式，而且推演的各个步驟都可逆推回去的話，那末不等式便是正确的.

例 4 求証 $\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$.

分析：要証 $\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$,

只要証 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2<4^2$,

即 $8+2\sqrt{15}<16$.

为証上式只要証 $2\sqrt{15}<8$.

为証上式只要証 $\sqrt{15}<4$.

証明 $\because \sqrt{15}<4$,

$$\therefore 2\sqrt{15}<8.$$

$$\therefore\quad 8+2\sqrt{15}<16,$$

$$\therefore\quad \sqrt{3}+\sqrt{5}<4.$$

由分析得明显的不等式：$\sqrt{15}<4$. 而各个步驟都可逆，所以反回去即得証明如上.

例 5 截面为圆形和正方形的两个水管，它們的两个截面周長是相等的. 証明：截面为圆的水管比截面为正方形的水管的流水量大.

解 这問題就是要証截面为圆的截面积比截面为正方形的截面积要大.

設：截面周長为 c，所以圆的半徑为 $\frac{c}{2\pi}$；正方形的边長为 $\frac{c}{4}$.

分析　要証：　$\pi\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{c}{4}\right)^2$,

就是：　$\pi\frac{c^2}{4\pi^2}>\frac{c^2}{16}$.

要証上式成立，只要証　$\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4}$.

要証上式成立，只要証　$\pi<4$.

証明　$\because\ \pi<4$,

$$\therefore\quad \frac{1}{\pi}>\frac{1}{4},$$

$$\therefore\quad \pi\cdot\frac{c^2}{4\pi}>\frac{c^3}{16},$$

$$\therefore\quad \pi\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{c}{4}\right)^2.$$

由分析得到明显的不等式：$\pi<4$. 而各个步驟都是可逆

的，故反回去可得証明如上.

上面为了說明分析法的用法．写了“分析”和“証明”兩部分，以后凡由分析得到了已知它成立的不等式，且各个步驟又可逆，那末就可以下結論：“原不等式是成立的”，不需要再写下面証明．如在例5中，得到“$\pi<4$”后就可以下結論.

186． 关于絕对値的不等式

我們已經学过：一个正数的絕对値是指这个正数本身；一个負数的絕对値，是指与这个負数相反的正数；零的絕对値是零.

关于絕对値的不等式有以下五个基本性質.

(1)若 $|\boldsymbol{a}|<\boldsymbol{b}$ 則 $-\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 反过来也成立，

我們先来看一个例．如果 $|a|<8$，那末 a 不論是正数或是負数都小于8.

如果 a 是負数时，$|a|=-a<8$.

所以 $$a>-8.$$

因此 $$-8<a<8.$$

而 如果 a 是正数，不等式 $-8<a<8$ 同样成立.

反过来，如果我們知道，$-8<a<8$，也就是 a 小于8，而 $-a$ 也小于8，所以 a 的絕对値小于8.

$$\therefore \qquad |a|<8.$$

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

証 1) a、b 均为正数，則它們和的絕对値等于它們的絕对値的和．例如：

$$|3+4|=|3|+|4|.$$

2) a、b 一正一負，則它們和的絕对値等于絕对値較大的数的絕对値减去絕对値較小的数的絕对値，所以就小于它們絕对値之和．例如：

$$|3+(-4)|<|3|+|4|.$$

3) a、b 均是負数，則它們和的絕対值 等于它們 絕对值之和．例如：

$$|-3+(-4)|=|(-3)|+|(-4)|.$$

4) a、b 中有一个是零或兩个都是零，等号显然成立．

由此性質 可以推出：$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$ 也成立．

(3) $|a+b|\geqslant|a|-|b|$.

証 由性質(2)知：$|a+b-b|\leqslant|a+b|+|-b|$,

$$\therefore |a+b|\geqslant|a|-|-b|,$$

即 $|a+b|\geqslant|a|-|b|$.

例 1 $|4+3|>|4|-|3|$.

例 2 $|(-4)+(-3)|>|-4|-|-3|$.

(4) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

例 $|3\cdot 4|=|3|\cdot|4|$；$|(-3)4|=|-3|\cdot|4|$；

$|(-3)(-4)|=|-3|\cdot|-4|$.

(5) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$.

例 $\left|\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{|3|}{|4|}$；$\dfrac{|-3|}{|4|}=\dfrac{|-3|}{|4|}$；$\left|\dfrac{-3}{-4}\right|=\dfrac{|-3|}{|-4|}$.

由上面五个基本性質可推出：

例 1 $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

証明 因 $|a-b|=|a+(-b)|$，而由性質(2)，

$$|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|.$$

$$\therefore |a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

由 3，$|a|-|-b|\leqslant|a+(-b)|$,

$$\therefore |a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

合之得：$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

例 2 已知：$|h|<\frac{\varepsilon}{4}$，$|k|<\frac{\varepsilon}{6}$. 求証：

$$|2h-3k|\leqslant\varepsilon.$$

証明 $|2h-3k|\leqslant|2h|+|3k|=2|h|+3|k|$

$$<2\times\frac{\varepsilon}{4}+3\times\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

例 3 已知：$|A-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. 求証：

$$|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon.$$

証明： $|(A+B)-(a+b)|=|(A-a)+(B-b)|$

$$\leqslant|A-a|+|B-b|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

关于絕对值的不等式，在微积分初步中常常用到，学生应仔細学習这一节.

習 題 七 十

1. 求証，若 $a<b$，則 $a+c<b+c$.

2. (1) 由 $a>b$，$c=d$ 是否一定得出 $ac>bd$？为什么？

(2) 由 $ac>bc$ 是否一定得出 $a>b$？为什么？

(3) 由 $a>b$，是否一定得出 $ac^2>bc^2$？为什么？

(4) 由 $ac^2>bc^2$ 是否一定得出 $a>b$？为什么？

3. 把下列不等式兩边相加：

(1) $-2<-1$，$-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$； (2) $a^2+1>0$，$a-1>a-2$；

(3) $a-b<c$，$b<c$； (4) $25>16$，$-2>-7$.

4. 把下列各組中的第一个不等式的兩边分别减去第二个不等式的兩边：

（1） $1>-3$，$-6<-4$； （2） $6<8$，$-2>-7$；

（3） $5>3$，$1<2$； （4） $a<b$，$b>c$。

5.把下列不等式兩边相乘：

（1） $7>6$，$3>2$； （2） $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$，$4>3$；

（3） $\sqrt{5}>\sqrt{2}$，$\sqrt{5}>\sqrt{3}$.

6.由 $a>b$，$c<d$，c、d 都不是零，是否一定得出 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$？举例説明。

7.由 $a>b$，n 是大于1的正数，是否一定得出 $a^n>b^n$？举例説明.

8.已知 x 是不等于1的正数，求証 $x+\frac{1}{x}>2$.

9.已知 a，b 是不相等的正数，求証：

（1） $(a+b)(a^{-1}+b^{-1})>4$； （2） $a^3+b^3>a^2b+ab^2$。

10. x 是什么数的时候，下列各式有最大值或者最小值？

（1） $9x^2-6x-1$； （2） $6x-2x^2$。

11.已知直角三角形勾股的和等于10厘米，求面积最大的时候，勾股和的長.

12.設 a，b，c 是正数，則 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$。利用此不等式証明：

（1）用一塊鉄皮做成長方体形狀的汽油桶，問長方体的三度的尺寸怎样，才能做出容量最大的容器？

（2）要把一定量的汽油裝在鉄制的長方体的桶里，这个長方体容器如何做，用鉄最省？

（3）下水道的断面是長方形上面加一个半圓，周界都是用磚砌的，在流水量一定时，証明这下水道断面的長方形是正方形时，用磚最少.

13.甲、乙二煤矿，甲矿煤每克燃燒时能放出 p 卡热量；乙矿煤为 q 卡热量．每吨煤矿在产地的售价，甲矿为 a 元，乙矿为 b 元。运煤

到N城，甲矿煤每吨运費为m元，乙矿为n元．問n在什么数值下，乙矿煤运至N城較为合适？

14．有直徑为d的圓柱形木头中，截出截面为長方形的木梁，要使得截面的面积为最大，問長方形的長寬尺寸如何？

15．求証下列各不等式：

（1）$\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$；　　（2）$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\sqrt{5}-2$；

（3）$\sqrt{5}+\sqrt{7}>1+\sqrt{15}$．

16．（1）已知$|h|<c\varepsilon$，$|x|>c$，求証：$\left|\frac{h}{x}\right|<\varepsilon$ $(c>0,\ \varepsilon>0)$．

（2）已知$|a_n-l|<1$，求証：$|a_n|<|l|+1$．

（3）已知$|x|>r>0$，求証：$\left|\frac{1}{ax}\right|<\frac{1}{|a|r}$．

17．已知$|h|<\sqrt{\varepsilon}$，$|k|<\sqrt{\varepsilon}$，求証：$|hk|<\varepsilon$．$(\varepsilon>0)$．

187．不等式的解

現在回顧本章剛开始所提出的例2．

設甲車速度是x，則據題意有

$$3x-20>3\cdot\frac{x}{2}. \qquad (1)$$

从上面不等式（1）中解出x来就得到解答．为此我們首先要知道什么叫做不等式的解．

不等式的解就是在含有未知数的不等式中，能够使不等式成立的未知数的值的范圍．不等式的解有下面各种不同情况．

（1）任何实数都是不等式的解．

例如，用任何实数代替不等式$x^2+1>0$中的x，这个不等式都能成立，所以任何实数都是这个不等式的解．这种不等式叫絕对不等式．

（2）只有某些范圍內的实数是不等式的解．