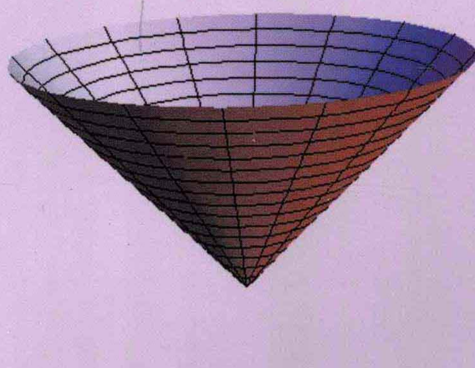
高等职业教育“十二五”规划教材

高等应用数学

支天红 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等职业教育“十二五”规划教材

高等应用数学

主　编　支天红
副主编　赵丽姝　王志刚
主　审　花向东

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是编者凭借多年教学经验，根据工程类应用数学教学的实际情况，按照高职高专人才培养目标的要求，本着“必需、够用”的原则，在教学讲义的基础上经过修改、补充编写而成的。全书叙述精练，由浅入深，并适度介绍了数学在工程领域中的应用。

全书共分七章，主要介绍了一元微积分学的基本知识，内容包括：函数的极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，(常)微分方程。各节后配有一定数量的习题，各章后配有小结与复习及单元自测题，书后附有各节习题及各章单元自测题的参考答案。

本书适合作为高等职业院校、成人高校等理工类专业的数学基础课教材，需要的教学时数为 84 学时左右。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学 / 支天红主编. —北京：中国铁道出版社，2011.8

高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-13410-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①支… Ⅲ.①应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 164384 号

书　　名： 高等应用数学

作　　者： 支天红　主编

策　　划： 李小军　张　铁

责任编辑： 李小军　　　**读者热线：** 400-668-0820

编辑助理： 何　佳

封面设计： 付　巍　　　**封面制作：** 白　雪

责任印制： 李　佳

出版发行： 中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街 8 号）　　邮政编码：100054）

印　　刷： 三河市文昌印刷装订厂

版　　次： 2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷

开　　本： 787mm×1092　1/16　**印张：** 16　**字数：** 387 千

印　　数： 3000 册

书　　号： ISBN 978-7-113-13410-5

定　　价： 28.00 元

前　言

时下，高职高专教育已不再是新生事物，原来处于探索中的课程改革与课程设置已逐渐趋于定型。高职高专教育的目的是培养技术应用型人才，在此目标驱动之下，各高职高专院校均不同程度地缩减了基础课的学时。为适应这种情况，我们根据工程类应用数学教学的实际情况，把近几年的教学讲义经过进一步的修改、补充编写成本书。

本书的主要内容是一元微积分的基本知识，我们在编写时把重点放在了基本概念和基本方法方面，并且力求做到三点，即：传授基本知识，培养自学能力和应用数学知识、方法分析解决实际问题的能力。为此我们不断地进行推敲，力争使本书的语言叙述深入浅出、通俗易懂，使读者在没有他人指导的情况下也能读懂教材，获得数学知识。

本书适合作为高等职业院校、成人高校理工类专业的数学基础课程教材，教学时数为84学时左右。书中带 * 号的内容可根据学生实际情况自由选择。

本书由哈尔滨铁道职业技术学院数理化教研部的支天红老师主编，赵丽姝、王志刚任副主编，花向东主审。其中第1章由支天红编写，第2、3章由王志刚编写，第4、5章由赵丽姝编写，第6、7章由司维编写。

由于编者水平有限，教学任务繁重，编写时间又较为仓促，书中难免有不当之处，敬请广大师生不吝赐教，以使之进一步完善。

编者

2011年6月

目　录

第 1 章

函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法.

§1.1 函数的概念

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着. 17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念. 之后的几百年间，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置. 本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性.

1.1.1 邻域

定义 1 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，数集 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记为

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

其中点 a 叫做该邻域的**中心**，δ 叫做该邻域的**半径**(见图 1-1-1).

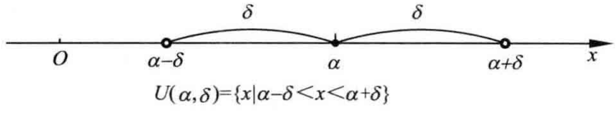


图 1-1-1

由于 $a-\delta < x < a+\delta$ 相当于 $|x-a| < \delta$，因此

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心** δ **邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

更一般地，以点 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域. 当不需要特别辨明邻域的半

径时,可简记为$U(a)$.

为了使用方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为点a的**左δ邻域**,把开区间$(a,a+\delta)$称为点a的**右δ邻域**.

1.1.2 函数的定义

1. 函数的定义

定义 2 设D为一个非空实数集合,若存在确定的对应法则f,使得对于数集D中的任意一个数x,按照法则f都有唯一确定的实数y与之对应,则称f是定义在集合D上的**函数**,记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中,x称为**自变量**,y称为**因变量**,数集D称为该函数的**定义域**,也记为D_f,即$D_f=D$.

如果对于自变量x的某个确定的值x_0,因变量y能够得到一个确定的值,那么就称函数f在x_0处有定义,其因变量的值或函数f的函数值记为

$$y\big|_{x=x_0},f(x)\big|_{x=x_0} \text{ 或 } f(x_0)$$

当自变量遍取D的所有数值时,对应函数值的全体构成的集合称为函数f的**值域**,记为R_f或$f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

注:函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素.两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

表示函数的记号是可以任意选取的,除了常用的f外,还可用其他的英文字母或希腊字母,如"g"、"F"、"φ"、"ψ"等,相应地,函数可记作$y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=\psi(x)$等.有时还可直接用因变量的记号来表示函数,即把函数记作$y=y(x)$.当在同一个问题中,讨论到几个不同的函数时,为了表示区别,需用不同的记号来表示它们.

2. 函数的定义域

函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,其定义域根据实际背景中变量的实际意义确定;另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的**自然定义域**.

注:在这种约定之下,一般的用算式表达的函数可用"$y=f(x)$"表达,而不必再写出D_f.

【例 1】 确定函数

$$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$$

的定义域.

解 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$$

的x值的全体,解此不等式组,得其定义域为$\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$,即$(2,3]$.

1.1.3　函数的常用表示法

1. 表格法

表格法是将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

2. 图像法

图像法是在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

3. 公式法(解析法)

公式法是将自变量和因变量之间的函数关系用数学表达式(又称为解析式)来表示的方法.

根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为显函数、隐函数、参数方程表示的函数和分段函数四种:

(1)显函数:　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示,例如,$y=(x+1)^2$.

(2)隐函数:　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定,例如 $e^{xy}=x+y$.

(3)参数方程表示的函数:　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系通过第三个变量联系起来,例如

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases} \quad t\text{ 为参变量.}$$

(4)分段函数:　函数在定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式.下面来看几个分段函数的例子.

【例 2】　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & \text{当 } x\geqslant 0 \\ -x & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,如图 1-1-2 所示.

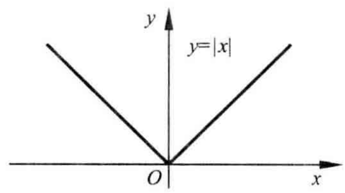


图 1-1-2

【例 3】　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & \text{当 } x>0 \\ 0 & \text{当 } x=0 \\ -1 & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,如图 1-1-3 所示.

【例 4】　取整函数 $y=[x]$,其中,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.例如,$\left[\frac{2}{3}\right]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[\pi]=3$,$[-2]=-2$,$[-2.3]=-3$.

取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$,图形如图 1-1-4 所示.

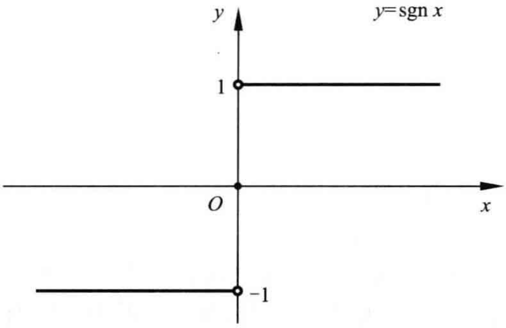


图 1-1-3

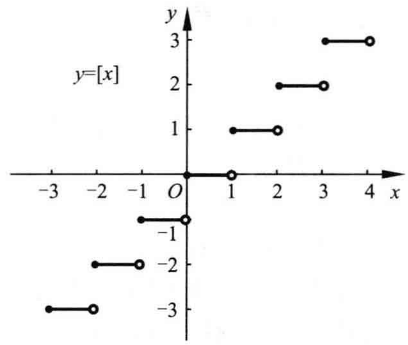


图 1-1-4

【例 5】 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$.

1.1.4 函数关系的建立

为解决实际问题，首先应将该问题量化，从而建立起该问题的数学模型，即建立函数关系. 要把实际问题中的函数关系正确地抽象出来，首先应分析哪个是常量，哪个是变量，然后确定选取哪个为自变量，哪个为因变量，最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域.

【例 6】 旅客乘坐火车可免费携带不超 20kg 的物品，超过 20kg 而不超过 50kg 的部分 1kg 交费 a 元，超过 50kg 部分 1 kg 交费 b 元. 求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品重量为 $x$kg，应交运费为 y 元. 由题意可知，这时应考虑三种情况：

情况一：重量不超过 20kg，这时

$$y=0, \qquad x\in[0,20]$$

情况二：重量大于 20kg，但不超过 50kg，这时

$$y=(x-20)\times a, \qquad x\in(20,50]$$

情况三：重量超过 50kg，这时

$$y=(50-20)\times a+(x-50)\times b, \qquad x\in(50,+\infty)$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases} 0 & \text{当 } x\in[0,20] \\ a(x-20) & \text{当 } x\in(20,50] \\ a(50-20)+b(x-50) & \text{当 } x\in(50,+\infty) \end{cases}$$

1.1.5　反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系.但在研究过程中,哪个作为自变量,哪个作为因变量(函数),是由具体问题来决定的.例如,设某作匀速直线运动的物体的运动速度为 v,运动时间为 t,则其位移 s 是时间 t 的函数:$s = vt$,这里 t 是自变量,s 是因变量;若已知位移 s,反过来求时间 t,则有 $t = \frac{s}{v}$,此时 s 是自变量,t 是因变量.以上两式是同一个关系的两种写法,但从函数的观点看,由于对应法则不同,它们是两个不同的函数,常称它们互为**反函数**.

一般地,有如下定义:

定义 3　$y = f(x)$ 为定义在 D 上的函数,其值域为 M.若对于数集 M 中的每个数 y,数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $y = f(x)$,这就是说变量 x 是变量 y 的函数.这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**,记为 $x = f^{-1}(y)$.其定义域为 M,值域为 D.

相对于反函数,函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

注:(1)习惯上,常用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 常改写为 $y = f^{-1}(x)$.

(2)在同一坐标平面内,函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 二者的图形是相同的,$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 二者的图形关于直线 $y = x$ 对称(见图 1-1-5).

(3)函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 之间存在着如下关系:

$$f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(x)) = x$$

(4)按此定义,只有单调函数才存在反函数.对于在定义域内不单调的函数,应限定在某一单调区间内才可求反函数.

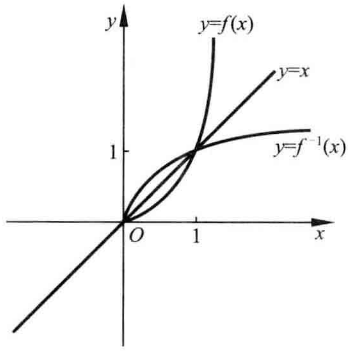


图 1-1-5

【**例 7**】　求函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解　由 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,可得 $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$,显然 $e^x > 0$,故只有

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

从而

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

即所求的反函数为

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

1.1.6 函数的基本性态

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$(注:当不需要特别说明区间是否包含端点、是否有限或无限时,常用 I 表示),对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,若恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**;若恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的,在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是单调减少的.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**;如果有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**;不是偶函数也不是奇函数的函数,称为**非奇非偶函数**.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的,如函数 $y=\cos x$;奇函数的图形是关于原点对称的,如 $y=\sin x$.

3. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对于一切 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**,通常所说的周期函数的周期是指其**最小正周期**(**注**:并非每一个周期函数都有最小正周期,如常数函数 $y=a$ 及狄利克雷函数).

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若存在一个正数 M,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 均成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,若这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**,这就是说,若对于任何正数 M,总存在 $x_1\in X$,使 $|f(x_1)|>M$,则函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如,因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数. 这里 $M=1$(当然,也可以取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立).

习题 1-1

1. 判断下列各组函数是否相同，并说明理由：

(1) $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$；　　(2) $y = 2x + 1$ 与 $x = 2y + 1$；

(3) $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$；　　(4) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$；

(5) $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$.

2. 求下列函数的(自然)定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$；

(2) $f(x) = \dfrac{\lg(3-x)}{\sin x} + \sqrt{5+4x-x^2}$；

(3) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

3. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2 & \text{当 } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

4. 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过部分每公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$；

(2) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　$(-1 < x < 1)$.

§1.2　初等函数

1.2.1　基本初等函数

在中学数学中我们已深入讨论了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这五类函数统称为**基本初等函数**，为以后学习方便，这里我们作简要复习.

1. 幂函数

幂函数 $y = x^\alpha$（α 是任意实数），其定义域要依 α 的取值而定. 当

$$\alpha = 2,1,\frac{1}{2},3,-1$$

时是最常用的幂函数(见图 1-2-1).

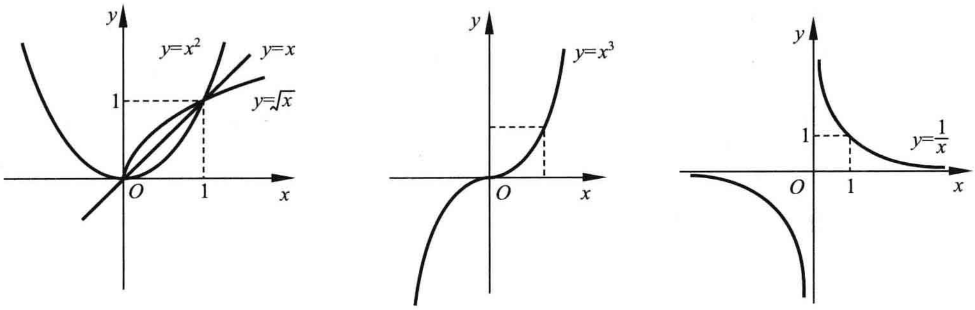


图 1-2-1

2. 指数函数

指数函数 $y = a^x$(a 为常数,且 $a > 0, a \neq 1$),其在底数 $a > 1$ 及 $0 < a < 1$ 这两种情况下的图像与性质如表 1-1 所示.

表 1-1

底数	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像	见图 1-2-2	见图 1-2-2
性质	(1)定义域:$(-\infty,+\infty)$	
	(2)值域:$(0,+\infty)$	
	(3)过点(0,1),即 $x = 0$ 时, $y = 1$	
	(4)在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加	在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少

指数函数中最常用的是以无理数 e = 2.718 281 8… 为底的函数 $y = e^x$.

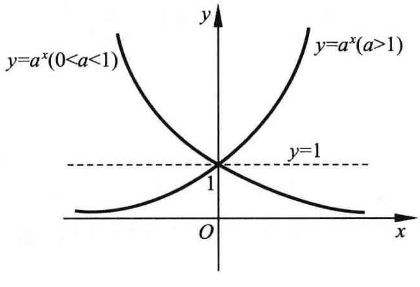


图 1-2-2

3. 对数函数

对数函数 $y=\log_a x$（a 为常数，且 $a>0, a\neq 1$），其在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图像与性质如表 1-2 所示.

表　1-2

	$a>1$	$0<a<1$
图像	见图 1-2-3	见图 1-2-3
性质	(1)定义域：$(0,+\infty)$	
	(2)值域：$(-\infty,+\infty)$	
	(3)过点(1,0)，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	(4)在 $(0,+\infty)$ 上单调增加	在 $(0,+\infty)$ 上单调减少

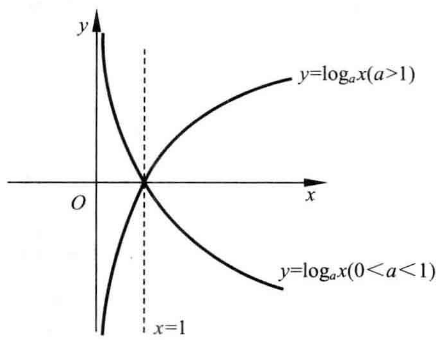


图 1-2-3

其中，以 e 为底的对数函数叫**自然对数函数**，记作 $y=\ln x$；以 10 为底的对数函数叫**常用对数函数**，记作 $y=\lg x$.

4. 三角函数

常用的三角函数有：

(1)正弦函数 $y=\sin x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是奇函数，是以 2π 为周期的周期函数，其图像如图 1-2-4 所示.

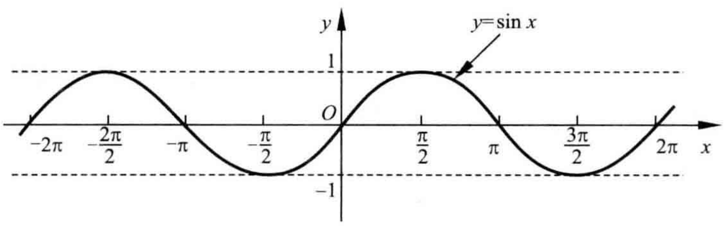


图 1-2-4