中学数学综合题解

靖江县教师进修学校

前　　言

解数学综合题是巩固学生所学数学知识，培养学生分析问题和解决问题的能力的有效措施之一。近两年来，大家在复习迎考中，常感缺乏这方面的习题。为此我们编印了这本《中学数学综合题解》，以供我县各中学参考使用。

本题解共选编了各种类型的综合题三百道。其基本特点是：思考性较强，知识面较广，有代表性，尤其在灵活应用基础知识方面具有一定的启示作用。由于是综合题，故很难分门别类，仅就每题解答结尾处注明所用主要定理，以便读者可以根据所学内容进行选用。

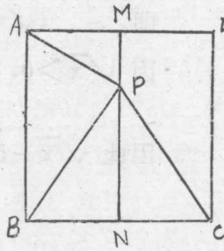
限于时间与水平，所编各题只列一种解法，且并非所有解法中的最简捷的一种，错误之处，欢迎读者批评指正。

靖江县教师进修学校数学组

一九七八年十一月

中学数学综合题解

1. 若MN为正方形ABCD一组对边AD、BC的中点连线，P是MN上的任意点，连结PA、PB，



求：① $\angle PAM$与$\angle PBN$的关系式，

② $\angle PAM$的何值时$\triangle PBC$是正三角形。

解：设$\angle PAM=\alpha$，$\angle PBN=\beta$　令正方形边长为2a，

在直角$\triangle AMP$中，$tg\,\alpha=\dfrac{MP}{AM}=\dfrac{MP}{a}$

$\therefore\quad MP=a\,tg\,\alpha$

在直角$\triangle BNP$中，$tg\,\beta=\dfrac{NP}{BN}=\dfrac{2a-MP}{a}$

$\therefore\quad MP=2a-a\,tg\,\beta$

于是　$a\,tg\,\alpha=2a-a\,tg\,\beta$

整理得　$tg\,\alpha+tg\,\beta=2$

若$\triangle PBC$是正三角形，则$\angle PBN=\beta=60°$

$\therefore\quad tg\,\alpha+tg\,60°=2$

$\therefore\quad tg\,\alpha=2-\sqrt{3}$

$\therefore$ α是锐角　　$\therefore$ $\alpha=15°$

即$\angle PAM=15°$时，$\triangle PBC$是正三角形。

（锐角三角函数、函数关系式）

2．若$x>0$ $y>0$且$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$

求：$\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$的值

解：由等式$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$

可化为：$(\sqrt{x})^2-2\sqrt{xy}-15(\sqrt{y})^2=0$

即：　$(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-5\sqrt{y})=0$

因 $\sqrt{x}>0$，$\sqrt{y}>0$，　$\therefore$　$\sqrt{x}+3\sqrt{y}>0$

因此 $\sqrt{x}-5\sqrt{y}=0$，就是$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=5$，　$\dfrac{x}{y}=25$

$$\therefore \quad \frac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}=\frac{2\dfrac{x}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+3}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-1}$$

$$=\frac{2.25+5+3}{25+5-1}=2$$

（实数、根式）

3．若 x、y 均为实数，且 $y=\dfrac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1}$

求：$\lg(x+y)$的值

解：$\because$　x、y 均是实数

$\therefore$　$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 0\end{cases}$

解这个不等式组得 $x=\pm1$

但 $x=-1$ 使原式无意义

所以 $x=1$ 代入 $y=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1}=0$

$\therefore$ $\lg(x+y)=\lg(1+0)=\lg 1=0$

（实数、根式的意义、对数）

4. 若x、y均为实数，且 $(2x-1)^2+(y-8)^2=0$

求：$\log_8 xy$ 的值

解：$\because$ x、y是实数

$\therefore$ $(2x-1)^2$，$(y-8)^2$ 是非负数

即 $(2x-1)^2\geqslant0$，$(y-8)^2\geqslant0$

但 $(2x-1)^2+(y-8)^2=0$

$\therefore$ 只有 $2x-1=0$ 和 $y-8=0$ 时等式才成立

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$，$y=8$

于是 $\log_8 xy=\log_8 4=\frac{2}{3}$

（实数、对数的基本性质）

5. 若x、y、z都是实数，且 $x^2+y^2=1$。

求证：$|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant1$

证明：$\because$ $x^2+y^2=1$

而 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

两式相乘得：$(x^2+y^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1$

展开 $x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+x^2\cos^2\alpha+y^2\cos^2\alpha=1$

配方 $x^2\sin^2\alpha+2xy\sin\cos\alpha+y^2\cos^2\alpha+x^2\cos^2\alpha$

$-2xy\sin\alpha\cos\alpha+y^2\cos^2\alpha=1$

就是 $(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2+(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2=1$

今 $(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2$ 和一个非负数 $(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2$的和为1，

$\therefore$ $(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2\leqslant 1$

即 $|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 1$.

（实数、配方、同角三角函数间的关系）

5. 若a、b、c、d均为实数，且满足关系式

$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$

求证：以a、b、c、d为边的四边形不是菱形，便是正方形

证明：$\because$ $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$

$\therefore$ $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$

于是有 $a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2a^2b^2$

$+2c^2d^2-4abcd=0$

即 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$

$\because$ a、b、c、d均是实数

$\therefore$ $(a^2-b^2)^2$，$(c^2-d^2)^2$，$(ab-cd)^2$均为非负数，而它们的和为零

可见必有 $a^2-b^2=0$，$c^2-d^2=0$，$ab-cd=0$

由前二等式知$a=b$ $c=d$代入第三式得$a=c$

于是有$a=b=c=d$

所以 以a、b、c、d为边的四边形不是菱形便是正方形

（实数、乘法公式、配方）

7. m为哪些实数值时 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3(m-1)\geqslant 0$ 是绝对不等式。

解：在二次三项式ax^2+bx+c中

当判别式$b^2-4ac=0$时，x除去取得的值恰等于二次三项式的根时，三项式的值的符号，永远与a相同。

当判别式$b^2-4ac<0$时二次三项式的值的符号永远与a相同，所以使$(m+1)x^2-2(m-1)x+3(m-1)\geqslant 0$是绝对不等式，必须

$$\begin{cases} m+1>0 \\ 4(m-1)^2-12(m+1)(m-1)<0 \end{cases}$$

解这个不等式组得：$m\geqslant 1$

（绝对不等式的概念、解二次不等式、二次三项式值的讨论）

8. 解方程：$2(10x+13)^2\cdot(5x+8)(x+1)=1$

解：化原方程为：

$$(10x+13)^2\cdot(10x+16)(10x+10)=10$$

$$(10x+13)^2(10x+13+3)(10x+13-3)=10$$

$$(10x+13)^2[(10x+13)^2-9]-10=0$$

$$(10x+13)^4-9(10x+13)^2-10=0$$

分解因式：

$$[(10x+13)^2-10][(10x+13)^2+1]=0$$

由 $(10x+13)^2-10=0$

解得 $x_{1、2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{10}}{10}$

由 $(10x+13)^2+1=0$

解得 $x_{3、4}=\dfrac{-13\pm i}{10}$

（分解因式、双二次方程、虚根）

9。若 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$

求证：$\dfrac{1}{a^{2n+1}}+\dfrac{1}{b^{2n+1}}+\dfrac{1}{c^{2n+1}}=\dfrac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$

证明： $\because \quad \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$

$\therefore \quad \dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{a+b+c}$

就是 $(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc$

即 $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=0$

当 $a=-b$时，上式为：$(-b^2)\cdot c+b^2c=0$

$\therefore$ 有因式 $a+b$

又因上式是轮换对称式且是三次齐次式，可以分解为

$$K(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

（K为异于零的常数）

$\therefore \quad a+b=0, \quad b+c=0, \quad c+a=0$ 。

即 $a=-b, \quad b=-c, \quad c=-a$ 。

将此关系轮流代入：

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$$

中、两端均相等，所以此题得证。

（轮换对称、因式分解）

10。已知：$0°<\theta<45°$　且

$$\lg tg\theta-\lg\sin\theta=\lg\cos\theta-\lg ctg\theta+2\lg 3-\frac{3}{2}\lg 2$$

求：$\cos\theta-\sin\theta$

解：原式可以化为：

$$\lg tg\theta-\lg\sin\theta-\lg\cos\theta+\lg ctg\theta=\lg 3^2-\lg 2^{\frac{3}{2}}$$

即 $\lg\dfrac{tg\theta\cdot ctg\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\lg\dfrac{9}{\sqrt{8}}$

$\therefore\ \dfrac{tg\theta\cdot ctg\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{9}{\sqrt{8}}$

即 $\dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{9}{\sqrt{8}}$

$\therefore\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{\sqrt{8}}{9}$

$\because\ 0<\theta<45°$　$\therefore\ \cos\theta>\sin\theta$

于是

$$\begin{aligned}\cos\theta-\sin\theta&=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}\\&=\sqrt{1-2\cdot\frac{\sqrt{8}}{9}}=\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{9}}\\&=\frac{1}{3}\sqrt{(\sqrt{8}-1)^2}=\frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)\\&=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

（对数运算，算术根、三角函数的基本公式）

11．若a、b 为方程 $x^3-3b^2x+2c^3=0$ 的二根，且 a、b、c 均为正数。

求证：以a、b、c为边的三角形，是一个正三角形。

证明：∵ a、b为方程 $x^3-3b^2x+2c^3=0$ 的根，

∴ 有 $a^3-3b^2a+2c^3=0$　　(1)

$b^3-3b^3+2c^3=0$　　(2)

由(2)得：　$b=c$　　代入(1)可得：

$$a^3-3ac^2+2c^3=0$$

分解为：$(a-c)^2(a+2c)=0$

∵ a、c 均为正数，　∴ $a+2c\neq0$

只有 $(a-c)^2=0$　　∴ $a=c$

今既有 $a=b=c$

可知 这个三角是一个正三角形

（方程的根的意义，一元二次方程、因式分解）

12．若 $(\sqrt[3]{x^{-2}}+x^2)^{2n}$ 的展开式的系数和比 $(\sqrt[3]{x^{-2}}+x^2)^n$ 的展开式的系数和大992，（n是自然数）

求：$(\sqrt[3]{x^{-2}}-x^2)^{2n}$ 展开式里含 $x^{\frac{4}{3}}$ 项的系数

解：由题意知 $2^{2n}-2^n=992$

即 $(2^n)^2-2^n-992=0$

$(2^n-32)(2^n+31)=0$

∴ $2^n=32$　　∴ $n=5$

$2^n=-31$（舍去）

于是 $(\sqrt[3]{x^{-2}}-x^2)^{2n}=(\sqrt{x^{-2}}-x^2)^{10}$

设 T_{K+1} 项含 $x^{\frac{4}{3}}$

于是： $T_{K+1}=C_{10}^{K}\cdot(-x^{2})^{K}\cdot(x^{-\frac{2}{3}})^{10-K}$

即 $T_{K+1}=C_{10}^{K}(-1)^{K}x^{2K-\frac{2}{3}(10-K)}$

因此 $2K-\frac{2}{3}(10-K)=\frac{4}{3}$

解之 $K=3$

∴ $x^{\frac{4}{3}}$ 的系数为：

$$(-1)^{K}\cdot C_{10}^{K}=(-1)^{3}\cdot C_{10}^{3}=-120$$

（二项式定理、展开式各项系数的和，通项公式的应用）

13．若 $\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)^{n}$ 的展开式中第十项的系数最大

求：n

解：∵ 第10项的系数是 $C_n^{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-9}$

第 9 项的系数是 $C_n^{8}\left(\frac{2}{5}\right)^{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-8}$

第11项的系数是 $C_n^{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-10}$

由于第10项系数最大

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{C_n^{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-9}}{C_n^{8}\left(\frac{2}{5}\right)^{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-8}}>1 & (1)\\[2ex] \dfrac{C_n^{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-9}}{C_n^{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-10}}>1 & (2)\end{cases}$$

解(1)得　$n>12\frac{1}{2}$

解(2)得　$n<14$，　因为n是自然数

$\therefore$　$n=13$

二项展开式中的通项公式的应用）

14．若　$(a+b)^{20}$的展开式里第4n项与第n+2项的系数相等

求：第 4n 项．

解：$\because$　$T_{4n}=C_{20}^{4n-1}\cdot b^{4n-1}\cdot a^{20-(4n-1)}$

$T_{n+2}=C_{20}^{n+1}\ b^{n+1}\ a^{20-n-1}$

$\therefore$　$C_{20}^{4n-1}=C_{20}^{n+1}$

即　$4n-1=n+1$　或　$4n-1=20-n-1$

解之得　$n_1=\frac{2}{3}$（舍去），　$n_2=4$

于是　$T_{4n}=T_{16}=C_{20}^{15}\cdot b^{15}\cdot a^{5}$

$=C_{20}^{5}\cdot a^{5}\cdot b^{15}$

$=15504\,a^{5}\,b^{15}$

（二项展开式的通项应用）

15．求：$\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$展开式中一切有理项

解：若有理项为 T_{K+1}项，则

$$T_{K+1} = C_{20}^{K}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{K}(\sqrt[3]{2})^{20-K}$$

$$= C_{20}^{K}(-1)^{K}\,2^{-\frac{K}{2}+\frac{20-K}{3}}$$

$$= (-1)^{K}\cdot C_{20}^{K}\cdot 2^{\frac{40-5K}{6}}$$

如此项为有理项则必须 $\frac{40-5K}{6}$ 是整数，且 $K\leqslant 20$

于是设M为整数，令 $\frac{1}{6}(40-5K)=M$

得 $K=8-M-\frac{M}{5}$

易见 M是5的倍数，

可令 $M=0$、±5、±10、……

若 $M=0$ 则 $K=8$

$M=5$ 则 $K=2$

$M=-5$ 则 $K=14$

$M=10$ 则 $K=-4$（舍去）

$M=-10$ 则 $K=20$

$\therefore$ $K=2$、8、14、20 时，T_{K+1} 项均为有理项，

就是 $T_3=C_{20}^{2}\cdot2^{5}$ ； $T_9=C_{20}^{8}\,2^{0}$

$T_{15}=C_{20}^{14}\cdot2^{-5}$ ； $T_{21}=C_{20}^{20}\cdot2^{-10}$

（二项展开式通项公式）

16．若 $\left\{(1+\frac{4}{x-2})(x-4+4x^{-1})-\sqrt{3}\left[1+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right.\right.$

$\left.\left.+(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}})^2+\cdots\cdots\right]\right\}\div\frac{x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-1}}{(\sqrt{x}+2)^{-1}}=(\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}$

求：数列 $(x+x)+(2x+x^2)+(3x+x^3)+\cdots\cdots$

$+(nx+x^n)+\cdots\cdots$ 的前n项之和

解：题中等式左边 $=\left(\frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{x^2-4x+4}{x}\right.$

$$\left.-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}\right)\div\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}+2}}$$

$$=\left[\frac{(x+2(x-2)}{x}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right]\div\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}+2}}$$

$$=\frac{x^2-3x-4}{x}\div\frac{x-4}{x}$$

$$=\frac{(x-4)(x+1)}{x}\cdot\frac{x}{x-4}=x+1$$

于是 $x+1=(\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}$， 即 $x+1=\frac{3}{2}$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}$$

所求数列前项的和为：

$$S_n=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+(\frac{2}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{3}{2}+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n})$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}{2}\cdot n+\frac{\frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{n^2+n}{4}+1-(\frac{1}{2})^n=\frac{2^{n-2}(n^2+n+4)-1}{2^n}$$

（分式化简、根式化简、无穷递缩等比数列所有各项之和、等差数列、一元二次方程）

17． 求：数列

$$a+(ax+b)+(ax^2+bx+b)+(ax^3+bx^2+bx+b)+\cdots+(ax^{n-1}+bx^{n-2}+bx^{n-3}+\cdots+b)+\cdots$$

的前 n 项之和

解： 原数列的前 n 项之和为：

$$S_n=a+(ax+b)+(ax^2+bx+b)+(ax^3+bx^2+bx+b)+\cdots+(ax^{n-1}+bx^{n-2}+bx^{n-3}+\cdots+b)$$

$$=(a+ax+ax^2+\cdots+ax^{n-1})+[(b+bx+b)+(bx^2+bx+b)+\cdots+(bx^{n-2}+bx^{n-3}+\cdots+b)]$$

$$= \frac{a(x^n - 1)}{x-1} + [b + b(x+1) + b(x^2+x+1) + \cdots$$

$$+ b(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1)]$$

$$= \frac{a(x^n - 1)}{x-1} + b\left[1 + \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right.$$

$$+ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} + \cdots$$

$$\left. + \frac{(x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1)}{x-1}\right]$$

$$= \frac{a(x^n - 1)}{x-1} + b\left(1 + \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x^3-1}{x-1} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{a(x^n - 1)}{x-1} + b + \frac{b}{x-1}\left[(x^2-1) + (x^3-1)\right.$$

$$\left. + \cdots + (x^{n-1}-1)\right]$$

$$= \frac{a(x^n - 1)}{x-1} + b + \frac{b}{x-1}\left[x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right.$$

$$\left. + x^{n-1} - (n-2)\right]$$

$$= \frac{a(x^n - 1)}{x-1} + b + \frac{b}{x-1}\left[\frac{x^2(x^{n-2}-1)}{x-1}\right.$$

$$\left. - (n-2)\right]$$

$$=\frac{a(x^n-1)}{x-1}+b+\frac{bx^n-bx^2}{(x-1)^2}-\frac{b(n-2)}{x-1}$$

$$=\frac{ax^{n+1}-(a-b)x^n-(a+bn)x+(a-b+bn)}{(x-1)^2}$$

（等比数列、乘法公式）

18. 若 x、y 均是实数，且 $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{4x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{3-4x}}+1$

求：无穷数列 $y+xy+x^2y+\cdots+x^{n-1}y+\cdots$ 的和。

解： ∵ x、y 均为实数

∴ 对 $\sqrt{\dfrac{2x+1}{4x-3}}$ 与 $\sqrt{\dfrac{2x+1}{3-4x}}$，必须有不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{2x+1}{4x-3}\geqslant 0 \\ \dfrac{2x+1}{3-4x}\geqslant 0 \quad (2)\end{cases}$$

解不等式（1）得 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 或 $x>\dfrac{3}{4}$

解不等式（2）得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{3}{4}$

∴ 上列不等式组的解为 $x=-\dfrac{1}{2}$

以 $x=-\dfrac{1}{2}$ 代入