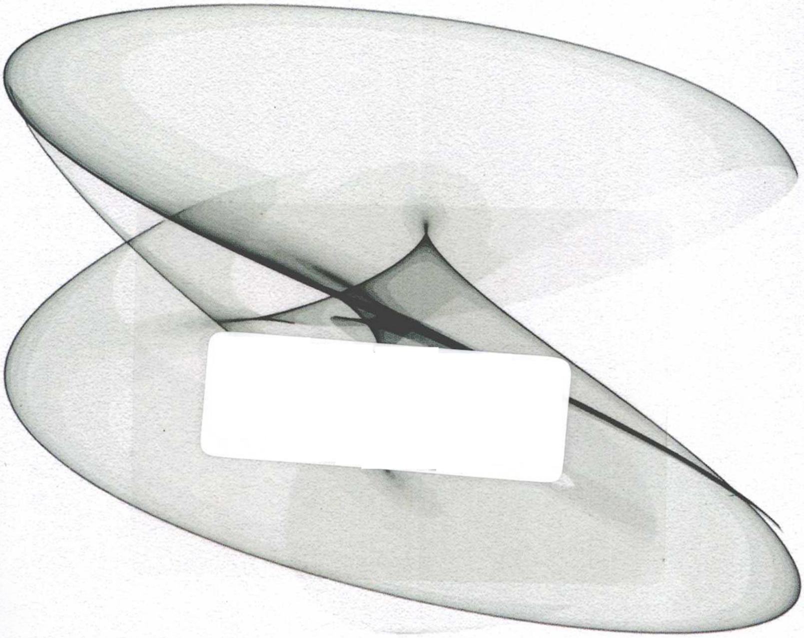
高等理工院校数学基础教材
GAODENG LIGONG YUANXIAO SHUXUE JICHU JIAOCAI

离散数学

LISAN SHUXUE

殷剑宏　邓　宝　陈华喜　陈　宇　编著



中国科学技术大学出版社

高等理工院校数学基础教材

GAODENG LIGONG YUANXIAO SHUXUE JICHU JIAOCAI

离散数学

LISAN SHUXUE

殷剑宏 邓 宝
陈华喜 陈 宇 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书以离散的观点描述自然科学研究中的具体问题，介绍离散数学的基本原理、具体方法和应用，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、函数与运算、群论初步、图论基础等，取材侧重于介绍典型离散结构，以及如何建立离散结构的数学模型，或如何将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理.每章都精选了适量例题与习题，且书末附有部分习题解答.

本书可作为高等院校计算机科学与技术、软件工程、网络工程、信息安全、物联网工程、数字媒体技术、数学与应用数学、信息与计算科学、信息管理与信息系统、电子商务、电子信息工程、电子科学与技术、通信工程、信息工程等专业本科生教材，也可作为相关专业教学、科研和工程技术人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/殷剑宏等编著. —合肥:中国科学技术大学出版社，2013.1
ISBN 978-7-312-03138-0

Ⅰ.离… Ⅱ.殷… Ⅲ.离散数学 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 280381 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥华星印务有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 20.75
字数 395 千
版次 2013 年 1 月第 1 版
印次 2013 年 1 月第 1 次印刷
定价 36.00 元

前　言

离散数学是研究离散的、有限量的结构及其相互关系的数学学科，以抽象和形式化为显著特征，是由数理逻辑、集合论、抽象代数、组合数学、图论、算法理论等汇集而成的一门综合学科，是现代数学的一个重要分支. 它广泛地应用于各学科领域，特别是计算机科学与技术领域.

数学方法是现代科技发展的一种必不可少的认识手段，它为科技研究提供了简洁精确的形式化语言、数量分析和计算的方法、逻辑推理的工具等. 离散和连续是现实世界中物质运动对立统一的两个方面，从数学的角度出发，数学本身可分为连续数学和离散数学，离散数学和连续数学是描述、刻画现实物质世界的重要工具. 最早的数学本质上是一种离散型的数学，尤以古老的东方数学为代表. 早在1667年，数理逻辑创始人莱布尼茨就发表了第一篇数学论文《论组合的艺术》，其基本思想就是把理论的真理性论证归结于一种计算的结果，其间闪耀的创新智慧和数学才华，蕴涵了数理逻辑的早期思想. 牛顿和莱布尼茨创立微积分后，整个数学的研究发生了深刻的变化，人们以一种连续的观点描述自然科学研究中的各种具体问题，形成了如分析、代数等连续数学，奠定了近代工业革命的基础. 随着计算机科学技术的兴起，“能行性”这个计算学科的根本问题决定了计算机本身的结构和它处理的对象都是离散的、有限的. 因而无论是计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何建立离散结构的数学模型，以及将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理的问题，而离散数学恰恰提供了描述离散结构的工具和方法，奠定了计算机革命的基础. 同时，以微电子为基础、计算机与通信为载体、软件为核心、密码为安全的信息科学技术的飞速发展，又大大促进了离散数学的快速发展，因而离散数学被称为信息时代的数学.

离散数学广博而深奥，具有严密的逻辑、准确的含义和很强的专业性，其理论有其深奥而且枯燥的一面，本科阶段学生的学科知识体系只是初步成形，再多的学时也不可能讲透离散数学的全部理论和方法，但即使这样，其教学内容也不能随意删减，更不能偷工减料. 为此，本书将离散数学学科内容做分门别类的精心整理、概括和总结，取材突出以下四个特色：

1. 经典与现代结合

每节以小标题的形式,提纲挈领,围绕知识点由易到难、由浅入深地铺展开来.由命题运算与集合运算的内在联系,抽象出代数系统的同态;由等价关系与划分解决相同的实际问题,引出两者的一一对应;由关系的复合到函数的复合再到置换的积,逐步引出置换群;由图的笛卡儿积导出超立方体等,适时突出重点,既阐述经典的概念、理论和方法,又展示日新月异的新理论、新技术、新成果、新应用,尤其是在计算机科学领域的广泛应用,促进离散数学与计算机科学相互促进与共同发展.

2. 思维与技术统一

强调命题翻译和谓词翻译的技巧,强调逻辑推理,反复训练学生的形式思维和逻辑思维能力.巧妙地导出关系是客观事物间联系的一种数学抽象,而图是客观事物间联系的另一种数学抽象,并用不同的数学模型描述关系和图;强调不同代数结构间的相互联系,不断训练学生的抽象思维能力.既注重通过对典型问题的描述、分析和解决,归纳与提炼解决问题的思想和方法,传授学科方法论,追求技术的精湛和高超,又强调选择适当的知识为载体,从引导学生思考与解决实际问题入手,模拟知识发现过程中大师们的思维过程,使学生能够较好地感受知识的创新过程,感受大师们的理性思维,激发数学创造潜能,追求思维的深奥和高远.

3. 理论与实践并举

由 n 元关系与关系数据库的渊源和等价关系的等价类来求解许多应用问题,从将哈斯图作为一种最基本的操作系统模型等角度,延伸关系的应用;用较大的篇幅阐述主合取范式与主析取范式、群、匹配、着色、最短路问题、欧拉图、哈密顿图、树、平面图等的广泛应用,且这些应用都真真切切地来自社会实践,使学生自然而然地理解离散数学与其他学科之间千丝万缕的联系,促进学生在充分体会理论与应用的结合点时,培养自己的探索兴趣与应用能力,培养运用离散数学理论知识的敏锐性.

4. 严谨与通俗相融

由命题逻辑的扩展潜移默化地导出谓词逻辑;从一种特殊集合引出关系,又从一种特殊关系导出函数,再从一种特殊函数引出运算等.在讨论集合时,将其限于合适定义范围内,采用经典集合论的原始描述,不但不会导致悖论,且所得结论和公理化集合论中的结论完全一致,又能避免展示过于复杂的公理化集合论.在讨论陪集的性质时,适时与等价类的性质相呼应,两者巧妙地殊途同归于 Lagrange 定理,充分展示数学的美妙与神奇.内容组织十分严谨,条理非常

清晰,注重运用形式化方法.课程深度与广度适当,没有符号堆积.行文通俗而不随便,严谨而不枯燥,深入浅出,娓娓道来.既降低了学习难度,又激发了学习兴趣.

全书分为命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、函数与运算、群论初步、图论基础六章,其中命题逻辑与谓词逻辑由陈宇撰写,集合与关系由陈华喜撰写,函数与运算、群论初步由殷剑宏撰写,图论基础由邓宝撰写,并由殷剑宏负责全书统编工作.

各章既相互独立、自成体系,又前后呼应,每个概念都阐述清晰、每个定理都证明透彻、每道例题和习题都精心设计,且书末附有详细习题解答,以近于公理化、模式化的逻辑体系呈现给读者,展示明确的学习范围、目标、步骤、方法和方向,既能引人快速地一步一个台阶进入知识的殿堂,又能抛砖引玉,授人以渔,打开离散数学这扇有趣的大门.

本书特别适合拓展大学生自主学习时间、压缩课堂教学学时之需,以短平快见长,无需特别的预备知识,既易入门,又易激发学习兴趣,具备很强的普适性.

限于作者水平有限,书中错误和疏漏在所难免,恳请各位同仁和读者不吝指正.

编　者

2012 年 7 月

目　　次

第1章　命题逻辑

早在17世纪，德国数学家莱布尼茨(Leibniz，1646～1716)就设想过用一种通用的科学语言来代替各种不同的推理过程.一般认为，数理逻辑的创立与发展从此开始.1847年，英国数学家布尔(Boole，1815～1864)发展了布尔代数，用一套系统来表示逻辑概念，以代数的方法来解决逻辑问题，奠定了数理逻辑的基础.1884年，德国数学家弗雷格(Frege，1848～1925)引入量词的概念，进一步完备了数理逻辑的符号系统.1930年，奥地利数学家哥德尔(Godel，1906～1978)证明了一阶逻辑完备性定理.数理逻辑的理论系统得到进一步完善.

数理逻辑(mathematical logic)又称符号逻辑，它运用数学方法，特别是引进一套符号的方法，建立严格的形式推理系统，运用形式语言来表达数学思维的形式结构和推理规律，把对数学思维规律的研究变换为对符号规律的研究，把严格的推理规律转换为简洁的逻辑关系.它既是数学，又是逻辑学.数理逻辑的内容大体可归纳为逻辑演算、公理化集合论、证明论、模型论、递归论等.

命题逻辑是数理逻辑的基础部分之一，它重点研究命题之间的关系，而不是研究一个具体命题的内容，也不是研究一个具体命题是否正确.

1.1　命　　题

1.1.1　命题的概念

命题是命题逻辑的基础，它构成了推理的各种前提和结论.

定义 1.1.1　**命题**(statement)是有真假意义且非真即假的陈述句.

判断为正确的命题，称为**真命题**(true statement)，或者称该命题的**真值**(truth value)为**真**(truth)，用1或T表示；判断为假的命题，称为**假命题**(false statement)，或者称该命题的真值为**假**(false)，用0或F表示.

一个命题的真值是唯一的.

例 1.1.1　判断以下语句是否是命题.

(1) 6 能被 2 整除.

(2) 明天会下雨吗?

(3) 中国是人口最多的国家.

(4) $x>y$.

(5) 举起双手!

(6) π 是自然数.

(7) 明年的今天有日食.

(8) 这种蛋糕真好吃啊!

(9) 人类登陆过火星.

(10) 地心有生命存在.

解 以上的 10 个句子中,(2)是疑问句,(5)是祈使句,(8)是感叹句,都不是陈述句,因而都不是命题.

(4)中含有变量 x 与 y,它既可以表示 $2>1$,也可以表示 $1>2$ 等,根据 x 与 y 的不同取值情况,它可真可假,即无唯一真值,所以不是命题.

(1)和(3)都是命题,且其真值均为真.

(6)和(9)都是命题,且其真值均为假.

(7)是命题,只是其真值要等到明年的今日才知道.

(10)是命题,其真值虽然现在不知道,但是其真值是客观存在且唯一确定的.

1.1.2 命题的分类

例 1.1.1 中的命题,都不能够分解成更简单的陈述句,称这样的命题为**原子命题**(atomic statement)或**简单命题**(simple statement);由简单命题通过联结词联结而成的命题称为**复合命题**(composite statement).

例 1.1.2 举几个复合命题的例子.

(1) 奇林没有学过日语.

(2) 小徐出差不是去厦门就是去张家港.

(3) 如果你喜欢古典音乐,那么你就会去听今晚的歌剧.

1.1.3 命题常量与命题变量

在数理逻辑中,命题常用大写英文字母 $A,B,\cdots$ 或小写英文字母 $a,b,\cdots$ 表示.例如,A:2 是整数.

表示命题的符号称为**命题标识符**(statement identifiers).如上述中的 A 就是命题标识符.

命题标识符分为命题常量与命题变量.一个命题标识符如果表示确定的命题,

就称其为**命题常量**(statement constant);一个命题标识符如果只表示任意命题的位置标识,就称其为**命题变量**(statement variable).因为命题变量可以表示任意命题,因而它没有确定的真值,因此命题变量不是命题.当命题变量 A 用一个特定命题取代时,A 才能确定真值,这时也称为对命题变量 A 进行**赋值**或**指派**(assignment).不特别说明时,常用 T 与 F 表示命题常量,其余的字符表示命题变量.

习题 1.1

判断下列语句是否是命题.如果是并且能判断其真值,指出其真值.

(1) 0 是最小的整数.

(2) 你下午会去看电影吗?

(3) 猫是哺乳动物.

(4) 如果 $x>y$,那么 $x+1>y+1$.

(5) 请把作业交上来!

(6) 爷爷是爸爸的父亲.

(7) 明天体育馆会有演出.

(8) 小林的舞跳得真好啊!

(9) 地球的体积比月球大.

(10) 全国姓王的人最多.

1.2 命题联结词

原子命题通过一些连词联结而成更复杂的命题,这些表示原子命题之间相互关系的连词,在数理逻辑里面用联结词来定义和符号化.下面介绍五种常用的联结词:否定、合取、析取、条件和双条件.

1.2.1 否定

定义 1.2.1 设 P 是命题变量,"$\neg P$"读作"P 的否定"或者"非 P"."$\neg$"称为**否定联结词**(negation connective).$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假.$\neg P$ 在不同指派下的真值如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 1.2.1 P:今天是星期天;$\neg P$:今天不是星

期天.

自然语言的"不""没有""不是""非"等词语,都可以符号化为联结词"$\neg$".

1.2.2 合取

定义 1.2.2 设 P,Q 是命题变量,"$P\wedge Q$"读作"P 和 Q 的合取",或者"P 且 Q"或"P 与 Q".符号"$P\wedge Q$"也称为 P 和 Q **的合取式**(conjunction of P and Q),"$\wedge$"称为**合取联结词**(conjunction connective).$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 同时为真.$P\wedge Q$ 在不同指派下的真值如表 1.2.2 所示.

表 1.2.2

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.2.2 P:小李喜欢滑冰;Q:小李喜欢打排球;R:5 是偶数.那么,$P\wedge Q$:小李既喜欢滑冰,又喜欢打排球;$P\wedge R$:小李既喜欢滑冰,并且 5 是偶数.

自然语言的"且""虽然……但是……""既……又……""不仅……而且……"等词语,都可以符号化为联结词"$\wedge$".

1.2.3 析取

定义 1.2.3 设 P,Q 是命题变量,"$P\vee Q$"读作"P 和 Q 的析取"或者"P 或 Q".符号"$P\vee Q$"也称为 P 和 Q 的**析取式**(disjunction of P and Q),"$\vee$"称为**析取联结词**(disjunction connective).$P\vee Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 中至少有一个为真(或者 $P\vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 同时为假).$P\vee Q$ 在不同指派下的真值如表 1.2.3 所示.

例 1.2.3 P:小徐学习成绩好;Q:小徐动手能力强;R:$x>y$.那么,$P\vee Q$:小徐学习成绩好,或者动手能力强;$P\vee R$:小徐学习成绩好,或者 $x>y$.

表 1.2.3

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

自然语言的"或""或者"等词语,都可以符号化为联结词"$\vee$".值得注意的是,析取式表示的"或",是**可兼或**(inclusive or)(**相容或**);而自然语言中的"或"有时还可以表示**不可兼或**(exclusive or)(**异或**).

例 1.2.4 符号化语句:"整数不是奇数就是偶数."

解 P:整数是奇数;Q:整数是偶数.

如果把语句符号化为 $P\vee Q$,就忽视了 P 和 Q 的不相容性.正确的表示方法为

$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q).$$

本书将在 1.6 节对异或加以讨论.

1.2.4 条件

定义 1.2.4 设 P,Q 是命题变量,"$P\rightarrow Q$"读作"P 到 Q 的条件"或者"若 P 则 Q". 符号"$P\rightarrow Q$"也称为**条件式**,其中 P 称为条件式的**前件**(antecedent),Q 称为条件式的**后件**(consequence)."$\rightarrow$"称为**条件联结词**. $P\rightarrow Q$ 为假当且仅当前件 P 为真,后件 Q 为假. $P\rightarrow Q$ 在不同指派下的真值如表 1.2.4 所示.

值得注意的是,当前件 P 为假时,$P\rightarrow Q$ 为真. 自然语言里的"若 P 则 Q",P 和 Q 往往有一定联系,但是命题逻辑里二者之间不需要有联系.

表 1.2.4

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.2.5 P:小徐喜欢看电影;Q:小徐喜欢唱歌;R:2 是整数. 那么,$P\rightarrow Q$:如果小徐喜欢看电影,那么他也喜欢唱歌;$P\rightarrow R$:如果小徐喜欢看电影,那么 2 是整数.

自然语言的"如果……那么……""当……就有……"等联结词,都可以符号化为联结词"$\rightarrow$".

1.2.5 双条件

定义 1.2.5 设 P,Q 是命题变量,"$P\leftrightarrow Q$"读作"P 与 Q 的双条件"或者"P 当且仅当 Q". 符号"$P\leftrightarrow Q$"也称为**双条件式**,"$\leftrightarrow$"称为**双条件联结词**. $P\leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 的真值相同. $P\leftrightarrow Q$ 在不同指派下的真值如表 1.2.5 所示.

表 1.2.5

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.2.6 判断下列命题的真值.

(1) 2 是偶数当且仅当 3 是奇数;

(2) 2 是偶数当且仅当 3 是偶数;

(3) 2 是奇数当且仅当 3 是偶数;

(4) 2 是奇数当且仅当 3 是奇数.

解 设讨论的范围为整数集,且设 P:2 是偶数;Q:3 是偶数. 显然 P 的真值为真,Q 的真值为假. 于是可符号化各命题且易求得真值,如下:

(1) $P\leftrightarrow\neg Q$,其真值为真;

(2) $P\leftrightarrow Q$,其真值为假;

(3) $\neg P\leftrightarrow Q$,其真值为真;

(4) $\neg P\leftrightarrow\neg Q$,其真值为假.

当然,本题也可不设定讨论范围而直接符号化求其真值.

自然语言的"……当且仅当……""……是……的充要条件"等词语，都可以符号化为联结词"$\leftrightarrow$".

习题 1.2

1. 设 P：天气晴朗；Q：我们去郊游.找出含义相同的字符串.

(1) $\neg P$； (2) $\neg P \wedge \neg Q$； (3) $\neg P \vee \neg Q$；

(4) $P \rightarrow Q$； (5) $P \leftrightarrow Q$； (6) $\neg\neg P$；

(7) $\neg(P \vee Q)$； (8) $\neg(P \wedge Q)$； (9) $\neg Q \rightarrow \neg P$；

(10) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$； (11) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$.

2. 下列字符串分别在哪些指派下为假?

(1) $\neg P \wedge Q$； (2) $P \vee \neg Q$； (3) $(P \vee Q) \rightarrow P$； (4) $(P \wedge Q) \leftrightarrow R$.

1.3 命题公式及其真值表

1.3.1 合式公式

命题联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$等又可称为命题运算符，其中否定联结词$\neg$是一元运算，合取联结词$\wedge$、析取联结词$\vee$、条件联结词$\rightarrow$、双条件联结词$\leftrightarrow$等都是二元运算.本书没有规定联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$运算的先后次序(但一元运算总是优先于二元运算)，而是通过圆括号体现，圆括号的次序从里到外.

若干个命题变量或命题常量按一定顺序进行有限次这样的运算以后，得到一个由命题标识符、联结词和括号构成的字符串，称为命题演算的**合式公式**(formed formula)或**命题公式**(statement formula)，含有 n 个命题变量的合式公式称为 **n 元命题公式**(n-place statement formula).下面递归地定义合式公式.

定义 1.3.1 命题演算的合式公式或命题公式，规定为：

(1) 命题常量和命题变量是合式公式；

(2) 若 A 是合式公式，则$\neg A$ 也是合式公式；

(3) 若 A 和 B 是合式公式，则 $A \wedge B$，$A \vee B$，$A \rightarrow B$，$A \leftrightarrow B$ 均是合式公式；

(4) 有限次使用(1)～(3)而成的字符串是合式公式.

例如，$R \leftrightarrow (P \vee (\neg Q \wedge R))$，$(P \wedge \neg R) \leftrightarrow (P \vee (Q \wedge R))$都是合式公式，但 P

$\wedge Q \to R$，$P \wedge Q \vee R$ 都不是合式公式.

注意 (1) 为了减少使用圆括号的数量，约定命题公式中最外层圆括号可以省略，比如，$R \leftrightarrow (P \vee (\neg Q \wedge R))$ 可简记为 $R \leftrightarrow (P \vee (\neg Q \wedge R))$.

(2) 在命题公式中，只要不特别说明，1 或 T、0 或 F 均表示命题常量，其余字母均表示命题变量.

定义 1.3.2 若 B 是命题公式 A 的一部分且 B 本身是命题公式，则称 B 是 A 的**子公式**(subformula).

例 1.3.1 写出命题公式 $(P \wedge Q) \to R$ 的所有子公式.

解 所求子公式有：P，Q，R，$P \wedge Q$ 和 $(P \wedge Q) \to R$.

用恰当的合式公式来表示命题的过程，称为**翻译**(explain)或**符号化**(symbolic representation).

例 1.3.2 符号化下列命题.

(1) 如果天下雨，我就既不去看电影，又不去逛街；

(2) 6 是偶数当且仅当 6 能被 2 或 3 整除.

解 (1) P:天下雨；Q:我去看电影；R:我去逛街.命题符号化为 $P \to (\neg Q \wedge \neg R)$.

(2) P:6 是偶数；Q:6 能被 2 整除；R:6 能被 3 整除.命题符号化为 $P \leftrightarrow (Q \vee R)$.

例 1.3.3 符号化下列命题.

(1) 辱骂和恐吓绝不是战斗；

(2) 我们要做到德、智、体、美全面发展，为祖国建设而奋斗；

(3) 如果爸爸和妈妈不同意，那我就不去探险；

(4) 喝酒不开车，开车不喝酒.

解 (1) $P \vee Q$，其中 P:辱骂不是战斗；Q:恐吓不是战斗.

(2) $(A \wedge B \wedge C \wedge D) \leftrightarrow P$，其中 A:我们要做到德育发展；B:我们要做到智育发展；C:我们要做到体育发展；D:我们要做到美育发展；P:我们为祖国建设而奋斗.

(3) $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg R$，其中 P:爸爸同意；Q:妈妈同意；R:我去探险.

(4) $(P \to \neg Q) \vee (Q \to \neg P)$，其中 P:喝酒；Q:开车.

1.3.2 命题公式的真值表

设有 n 元命题公式 A，按字典序排序，其命题变量为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，每个命题变量的真值要么是 1，要么是 0，因此命题变量 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的不同指派有 2^n 种.例如，公式 $P \wedge \neg Q$ 中命题变量的不同指派有四种：00，01，10 和 11.当 P 为真，Q 为假时，$P \wedge \neg Q$ 为真；其余三种情况下，$P \wedge \neg Q$ 均为假.

定义 1.3.3 设 A 是 n 元命题公式，其命题变量为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，给命题变量 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 指定一组真值，称为命题公式 A 的一个**真值指派或赋值**，简称**指派**(assignment). 使得 A 为真的指派，称为 A 的**成真指派**(true assignment)或**成真赋值**；使得 A 为假的指派，称为 A 的**成假指派**(false assignment)或**成假赋值**. 例如，公式 $P\wedge\neg Q$ 的成真指派为 10(即 P 的真值为 1，Q 的真值为 0)，成假指派为 00,01 或 11.

n 元命题公式 A，总共有 2^n 种不同的真值指派. 将命题公式 A 在所有指派(一般可按照二进制数大小从小到大排列)下的真值汇总成表，称为 A 的**真值表**(truth table).

构造命题公式 A 的真值表，一般可按照以下几个步骤：

(1) 按字典序找出 A 的所有命题变量 $P_1,P_2,\cdots,P_n$；

(2) 把 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的 2^n 种不同真值指派用对应的 n 位二进制数从小到大表示；

(3) 按照联结词运算的先后顺序，逐步求出 A 的真值.

例 1.3.4 列出命题公式 $(P\wedge\neg Q)\to R$ 的真值表.

解 该命题公式的真值表如表 1.3.1 所示.

表 1.3.1

P	Q	R	$\neg Q$	$P\wedge\neg Q$	$(P\wedge\neg Q)\to R$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

例 1.3.5 列出命题公式 $((P\wedge Q)\wedge R)\to P$ 的真值表.

解 该命题公式的真值表如表 1.3.2 所示.

表 1.3.2

P	Q	R	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\wedge R$	$((P\wedge Q)\wedge R)\rightarrow P$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

例 1.3.6 列出命题公式$((P\leftrightarrow\neg P)\wedge Q)\wedge R$的真值表.

解 该命题的真值表如表 1.3.3 所示.

表 1.3.3

P	Q	R	$\neg P$	$P\leftrightarrow\neg P$	$(P\leftrightarrow\neg P)\wedge Q$	$((P\leftrightarrow\neg P)\wedge Q)\wedge R$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

1.3.3 命题公式的类型

例 1.3.4 中的命题公式$(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$既有成真指派,又有成假指派.例 1.3.5 中的命题公式$((P\wedge Q)\wedge R)\rightarrow P$只有成真指派.例 1.3.6 中的命题公式$((P\leftrightarrow\neg P)\wedge Q)\wedge R$只有成假指派.按照在指派下真值的情况,可将命题公式分为以下三类.

定义 1.3.4 若命题公式 A 既有成真指派又有成假指派,则称 A 为**可满足式**(contingency);若命题公式 A 的每个指派均为成真指派,则称 A 为**永真式**(tautology)或**重言式**;若命题公式 A 的每个指派均为成假指派,则称 A 为**永假式**(contradiction)或**矛盾式**.