高等代数学习指导书

下

华东师范大学函授教材

高等代数学習指导書(

教学用書　僅供参考

編　　者　雷
出 版 者　华　东　师　范
發 行 者　新华書店上海邮
印 刷 者　商务印書館上海

开本 787×1092 耗 1/27　1957 年 7 月第一版
印張 13/27　字数 23,300　印
工本費 0.20 元

華東師範大学函授教材

高等代数学習指導書

雷　垣　編

下　册

华　东　师　範　大　学

目　錄

引　　言

2. 多項式理論初步

这一部分的中心問題是多項式的根的存在与求法，以及与此有关的多項式的因式分解。这些問題，除一些基本性質外，都須先确定所討論的范圍（什么样的体）而后分别的予以解决。因此必須先求各种数量的范圍（羣，环，体）來建立理論的基礎。然后具体地研討最基本的，最大的数体——复数体，因为很多的代数問題，特别是与中学数学有关的，都是在复数体中的。随后我們在一般的体上來討論多項式的一些基本性質（例如可除性及根的存在定理），再逐漸縮小范圍，从复数体，实数体，到有理数体上來分别的研討上述有关多項式的問題。

第五章　基礎概念

函授生应閲讀教本奥庫涅夫的高等代数第三章 §21, §22 和第一章 §5 (到 26 頁第七行止)，并作下列練習題：

1. §21, 175 頁，習題 1, 2。

2. §22, 207 頁—209 頁，習題 1, 2, 3, 4, 5。

3. 補充題：

a) 把三次(三个数字的)置換羣的所有子羣一一寫出，并作它們各自的乘法表。

b) 証明：关于矩陣的加法和乘法，所有形式如$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的二階矩陣構成一个环，其中 a 代表任意数。并指出它有沒有乘法單位元和零因子。

c) 証明：关于矩陣的加法和乘法，所有形式如$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$其中 a 代表任意整数，b 代表任意偶数，这种矩陣的全体構成 b) 題中的环的擴环，也構成 §22 習題 5 中的环的子环。并指出它有沒有乘法單位元和零因子。

d) 証明：以 6 为模的剩余類是环，并找出其子环与零因子。

学　習　指　導

一、这一章主要是学習羣，环，体三个概念。必須注意这三种集合都要具有代数运算，羣有一个这類运算而环和体則有二个。若这一条件不滿足，則根本不能構成羣，环，体。因此讀者首先应当明确熟諳代数运算这一基本概念，然后学習羣，环，体。

二、学習上述这些概念时，要多多結合具体例子。書上的例子旣要

研究，書外的例子也要侭量加以考慮，要做到有把握地对各种例子能甄别那些是代数运算，那些非代数运算，那些是羣，环，体，那些不是。在对某一集合作研究时，必須时刻認清这集合的特証，例如：若所給集合为 $\{a+b\sqrt{2}/a, b$ 是不同时为 0 的有理数$\}$，則它的元素或为非零的有理数或为$\sqrt{2}$的有理数倍，或为这兩种数之和，但沒有一个元素是 0 的；因此加法对它就不是代数运算了。上例中若無"不同时为 0"的条件，集合的特征就兩样了，因而可以推出那集合是加羣了。这种地方必須非常小心。讀者当仔細閱讀教本 172 頁的例 4，注意其驗証过程的嚴密性。

三、学習羣时，要掌握它所要求的运算的基本性質，勿困擾于"加"与"乘"表面上的差異之中。所有关于羣的論断，对"加"与"乘"是平行的，对加羣与乘羣是同样有效的；只是若运算叫"加"时就含有可交換的性質，而运算是"乘"时則不一定可交換。

四、教本 174 頁例 5 是一个置換羣的例子。讀者可先閱讀第一章 §5，从 22 頁起到 26 頁第七行止。然后來研究 $n=3$ 的特例三次置換羣：在此我們共有六个置換(羣的全部元素)，即

$$I=\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\ S_1=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},\ S_2=\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},$$

$$S_3=\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\ S_4=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix},\ S_5=\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}。$$

I	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	S_2	I	S_4	S_5	S_3
S_2	I	S_1	S_5	S_3	S_4
S_3	S_5	S_4	I	S_2	S_1
S_4	S_3	S_5	S_1	I	S_2
S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	I

我們可以为它們作一个乘法表：表中每一元素等于其同行的第一列元素乘以其同列的第一行元素所得之積。例如第四行第五列的元素是 S_2，它的同行第一列的元素是 S_3 同列第一行的元素是 S_4，則表顯示 $S_3 S_4=S_2$，事实上 $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$。由 §5 中一般情形的証明，我們知道置換乘法是代数运算，且適合結合律。从表上可以看出 I

是單位元，S_1 与 S_2 互为逆元；S_3，S_4，S_5 的逆元就是它們自己。另外可看出这乘法是不能交换的，如 $S_4S_3 \neq S_3S_4$。这样的表对于研究有限羣是非常有用的。置换羣的学習是对一般有限羣研究的基礎。

五、教本178頁的定理3是从羣的代数运算所滿足的三个条件推出來的。我們也可以从这个定理和那三个条件的第一条(結合律)推出其他兩个条件(請讀者自己推一下)。因此可以把这个定理与結合律作为構成羣的代数运算需要滿足的条件，以替代原來的三个条件。所以从193頁上体的定义可立卽推出体的全部元素，除掉0外，構成一个乘羣，因此書上的(4)，(5)，(6)三式自然成立了。

六、在一个坏中，兩个运算的性質是不平行的。一个叫"加"的运算是滿足羣的条件的，而另一个叫"乘"的运算只滿足結合律。"乘"对"加"滿足左右兩个分配律(在"乘"法可交换时变成一个分配律)，但"加"对"乘"并不滿足分配律，如 $a+(bc) \neq (a+b)(a+c)$。

七、有的环含有乘法單位元，有的环沒有。一个环的子环，擴环和它自己可以各有其乘法單位元，不必相同；也可能它自己沒有乘法單位元，而其擴环子环有。有的环含有零因子，有的环沒有。要注意零因子决非零元素，一个元素要成为零因子必須存在有另一零因子(当然也非零元素)与它乘起來得到0。

八、要研討矩陣环，先要定义矩陣的"加"与"乘"。矩陣乘法在第三章§19中是通过变数的平直变换來定义的，讀者已学習过了。我們可以把变换中的变数，如 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$，看作 n 維向量的坐标，如同第二章§13中那样。于是平直变换 S 把向量 $\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ 变到向量 $\vec{y}=(y_1, y_2, \cdots\cdots y_n)$，平直变换 T 再把 $\vec{y}$ 变到 $\vec{z}=(z_1, z_2, \cdots z_n)$，这相当于平直变换 U 把 $\vec{x}$ 直接变到 $\vec{z}$，卽 $U=TS$。从而得到对应的矩陣乘法：$C=BA$。今設另一平直变换 S' 把向量 $\vec{x}$ 变到向量 $\vec{y}'=(y_1', y_2', \cdots\cdots y_n')$。用下列式子來表变换公式：

$$\vec{y}=S\vec{x}, \qquad \vec{y'}=S'\vec{x},$$

其中与 S, S', 对应的矩陣分别为:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 与 \quad A'=\begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots\cdots & a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots\cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}。$$

若令 $\vec{w}$ 表向量 $(y_1+y'_1, y_2+y'_2, \cdots\cdots, y_n+y'_n)$, V 表对应于矩陣

$$D=\begin{pmatrix} a_{11}+a'_{11} & \cdots\cdots & a_{1n}+a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+a'_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn}+a'_{nn} \end{pmatrix}$$

的平直变换，则 $\vec{w}=\vec{y}+\vec{y'}=V\vec{x}$, 这表示平直变换 V 把 $\vec{x}$ 变到 $\vec{w}$。因此若把 V 定义作 S 与 S' 之和，即 $V=S+S'$, 则这种"加"法是平直变换間的代数运算，同样也是与它們对应的矩陣間的代数运算；这样就定义出矩陣的"加"法: $D=A+A'$, 就是說，把兩矩陣中同等地位的元素兩兩相加所得矩陣即为原兩矩陣之和。容易看出，这"加"法適合交换律，結合律，与前面定义好的"乘"法適合"乘"对"加"的左右兩分配律。

对于这"加"法我們有零元素 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$, 它所对应的变换把任意向量变到零向量 $\vec{0}=(0, 0, \cdots, 0)$。与矩陣

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots\cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

对应的变换把 $\vec{x}$ 变到 $-\vec{y}=(-y_1, -y_2, \cdots\cdots -y_n)$。以上說明了矩陣的"加"法，如同其"乘"法一样，可从平直变换導出。至于确定 n 階矩陣的集合構成环，則教本 183, 184 頁講得很清楚了。

九、教本 198 頁体的例 3 中把全部整数分成兩類 A_0 和 A_1, 其中 A_0 包含所有偶数，也就是所有被 2 整除的整数，A_1 包含所有奇数，

也就是被2除后余1的所有整数。这样的分類可以推廣到把全部整数分成n類：A_0, A_1, A_2, ……A_{n-1}，其中A_0包含被n整除的所有整数，A_1包含被n除后余1的所有整数，A_2包含被n除后余2的所有整数，……，A_{n-1}包含被n除后余$n-1$的所有整数。所謂類A_i与類A_j的和A_i+A_j是指A_0, A_1, A_2, ……, A_{n-1}中的一个，它是由類A_i的每一个数与類A_j的每一个数相加而得來的。所謂類A_i与類A_j的積$A_i A_j$是指類A_0, ……, A_{n-1}中的一个，它是由類A_i的每一个数和類A_j的每一个数相乘而得來的。根据这个定义，像例3一样，可以証明集合A_0, A_1, A_2, ……, A_{n-1}構成一个交換环。这种類就叫做剩余類，对任一自然n，就有n个剩余類構成的剩余類环。特別，若n是一質数，則A_0, A_1, A_2, ……, A_{n-1}構成体。由n所决定的剩余類就叫以n为模的剩余類。例3中的奇数類与偶数類就是以2为模的剩余類。讀者可自己观管以3为模的剩余類环（体）与以4为模的剩余類环，以熟習这一概念。

十、体的示性数(或称特征数)与整数剩余類环的模有相同的性質，只是示性数必然是質数(由于体中無另因子的原故)而模不一定是質数。

十一、兩集合同構必須滿足兩个条件：第一，它們的元素要能一一对应；第二，对应元素的运算結果也要对应(符合同一对应法則)。关于一一对应，讀者可閱讀教本33頁和34頁，以求明确。在証明兩者同構时，只要建立一个(随便那一个)符合条件的对应法則就兴了；在証明兩者不同構时，只举出一个或几个不合条件的对应法則是不能下結論的，必須就集合的某一性質（例如它含有或不含有另因子）使一般的对应法則都不能符合同構条件來断定兩者是不同構（当然若元素間根本不能一一对应，例如元素数目不同的兩有限集合，則顯然同構不会成立）。

自我檢查問題

(1) 举出一些数集的运算，它們是代数运算；另外举一些，則非代

数运运算。

(2) 举出一些羣与非羣的例子。

(3) 証明：若集合 G 有代数运算"乘"法，適合結合律，且对 G 的任二元素 a, b 存在 G 的元素 x, y 使 $ax=b$, $ya=b$，则 G 是羣。

(4) 若乘羣 G 的一部分元素 H 满足条件：对 H 的任二元素 a, b 必有 ab^{-1} 也屬于 H，証明 H 是 G 的子羣。

(5) 証明：若 a 为乘羣 G 的元素則 $(a^{-1})^{-1}=a$,

(6) 証明集合 $\left\{ ma \middle/ \begin{matrix} m \text{ 为某整数} \\ a \text{ 为任意整数} \end{matrix} \right\}$ 为整数加羣的子羣。

(7) 証明在一羣中的二个子羣的共同元素構成一个子羣。

(8) 証明在环中消去律(若 $a\neq 0$，而 $ab=ac$，則 $b=c$) 成立的充分而必要条件是另因子不存在。

(9) 証明以 7 为模的剩余類环是体。

(10) 設体 P 的示性数为 p，証明对 P 的任二元素 a, b 必有 $(a+b)^p=a^p+b^p$ 成立。

(11) 証明环 $\{3a/a$ 为任意整数$\}$ 与偶数环不同構。

(12) 証明集合 $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle/ a, b \text{ 为任意实数} \right\}$ 是体，它与复数体同構。

第六章 複数体

函授生应閱讀教本奧庫涅夫的高等代数第八章 §38, §39, 并作下列練習題:

1. §38, 106 頁, 習題 a), b), c); 108 頁, 習題 1, 2。
2. §39, 117 頁, 習題 1, 2, 3, 4, 5, 6。
3. 補充題:

a) 試用六次單位根与 64 的一个实六次根來求出 64 的全部六次根。

b) 八次單位根中那些是本原單位根?

学 習 指 導

一、§38 主要說明为了解某些实系数的代数方程式(例如 $x^2+1=0$), 怎样構造一个实数体的擴体——复数体。由于二維向量的定义和一些性質(如加法, 以及与数的乘法等)我們早就建立起來了, 也就是說, 这样的集合是可以認为存在了, 因此我們就有了擴体的材料。在給予这集合以乘法运算后, 我們証明它是一个体, 且含有一个与实数体同構的子体, 因此它也可以作为实数体的擴体, 而所有实系数方程式的根都可在它里边找到(这一点当然在以后第九章中还須証明)。这就是复数体的來源。要明确我們構造这个擴体主要是依据加法乘法等运算的定义, 至它的元素的形式則可以是通常的向量形式 (a, b), 也可以是标准形式 $a+bi$, 也可以是三角形式 $r(\cos\phi+i\sin\phi)$; 这些不同的形式却代表着同一个东西——复数。实数, 作为这擴体的一部分, 自然也取得 $(a, 0)$ 作为其新形式了。

二、求复数 α 的全部 n 次方根时，可以利用 n 次單位根（即 1 的 n 次根：$\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, $\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}$ ……, $\varepsilon_{n-1}=\cos\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}$）。因为若 α 的一个 n 次根已知是 u，则 $u\varepsilon_1, u\varepsilon_2, \cdots, u\varepsilon_{n-1}$ 就是其余的 n 次根，事实上 $(u\varepsilon_j)^n=u^n\varepsilon_j^n=\alpha\cdot 1=\alpha$, $j=1, 2, \cdots\cdots, n-1$。例如 -8 的一个 3 次根为 -2，而 1 的三次根有 1, $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，于是立刻知道 -8 的全部三次根为 -2, -2ω, $-2\omega^2$。熟練复数的求根，以及乘，除，乘方等运算为本章主旨。

三、若 n 次單位根 $\varepsilon_j\neq 1$, $\varepsilon_j^2\neq 1$, ……, $\varepsilon_j^{m-1}\neq 1$，而 $\varepsilon_j^m=1$，则称 ε_j 屬于指数 m。可以証明指数 m 必然整除 n。事实上，設 $n=mq+r$, $0\leqslant r<m$，則 $\varepsilon_j^n=\varepsilon_j^{mq+r}=\varepsilon_j^{mq}\varepsilon_j^r=\varepsilon_j^r=1$，但比 m 小的整数 r 不能使 $\varepsilon_j^r=1$，除非 $r=0$。若 n 次單位根屬于指数 n，則这种單位根称为本原單位根（例如 n 次單位根 ε_1，以及三次單位根 ω 与 ω^2）。

自我検查問題

(1) 解二次方程式 $(1-8i)x^2+(2+7i)x-(1+i)=0$。

(2) a) 解 $x^8+1=0$; b) 利用五次單位根解 $x^5-10=0$。

(3) 指出全部六次單位根所屬各指数；那些是本原單位根？

(4) 簡化 $\frac{(3-2i)(6+i)-(3+2i)(6-i)}{(1-3i)^3+(1+3i)^3}$（偌量利用复数的共軛性）。

第七章　任意体上的多項式环

函授生应閱讀教本奥庫涅夫的高等代数第五章全部，以及第八章§41中133頁上的根的存在定理（証明下面另補）和141頁上的可分体的定义以及可分体的存在定理与証明，并作下列練習題。

1. §27, 25頁，習題a), b)。
2. §28, 39頁，習題1, 2。
3. §29, 47頁，習題a), d)。
4. §30, 50頁，習題a), d)。
5. 補充題：

　　a) 設 $f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots\cdots a_n\alpha^n$, $g(\alpha)=b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\cdots\cdots+b_m\alpha^m$，求 $f(\alpha)\cdot g(\alpha)$ 的首項，末項，及一般項。

　　b) 設 $f(x)=x^3-x^2+3x-10$, $g(x)=x^3+6x^2-9x-14$，求它們的最高公因式 $D(x)$，并求多項式 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 滿足 $f(x)\phi(x)+g(x)\psi(x)=D(x)$。

学 習 指 導

一、这一章主要是討論多項式环的可除性理論，多項式的最高公因式，分解多項式成旣約多項式的乘積，以及多項式的根的問題。首先要明确多項式环是添加一个代数元或一个超越元到一个有乘法單位元無另因子的交換环所成的擴环，而我們主要是討論添加一个未知量 x（超越元）[1]到环 R 所成的擴环 $R[x]$。所添加的未知量（超越元）的來源（也就是 R 的交換擴环 Ω 的存在性）在教本的第八章中有說明，但我

[1] 多項式中的未知量也称不定元。由于 x 是未知的，不定的，所以不会有多項式等于0的等式在 $R(x)$ 中出現，除非是系数皆为0的多項式，这說明了 x 对于 R 的超越性。

們將不要求函授生閱讀。这里只要求明确超越元的定义，以及它与代数元的區别。

二、为了研究多項式的最高公因式，因式分解，以及多項式的根等，讀者除深入理解关于可除性及既約多項式的理論外必須熟練多項式的輾轉相除法，歐几里得序列求法，綜合除法（即和那方法），以及多重因式的分离法等。

三、§27，24頁上例示的求最高公因式的演算过程中，为了簡化，常在被除部分乘以相当的数然后再施行除法，这样自然要影响到商式，但不会影响到歐氏序列所需求的余式，这一点讀者必須仔細体会，以便正确运用此法。

四、§41 中根的存在定理的証明要用到 §40 的內容。我們旣略去 §40，就必須作另一証明。首先我們來作体 P 上多項式的剩余類环 $\{C_0, C_e, C_a, C_b, \cdots\cdots, C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots\cdots\}$，其中 0 表 P 的零元素，e 表 P 的乘法單位元，$a, b, \cdots\cdots$ 表 P 的任何元素，$r_1, r_2, \cdots\cdots$ 表次数比定理中多項式 $F(x)$ 低的 P 上多項式；C_0 包含所有被 $F(x)$ 整除的 P 上多項式，C_e 包含所有被 $F(x)$ 除后余 e 的 P 上多項式，C_a 与 C_b 等包含所有被 $F(x)$ 除后余 a，余 b 等等的 P 上多項式，C_{r_1} 与 C_{r_2} 等包含所有被 $F(x)$ 除后余 r_1，余 r_2 等等的 P 上多項式。所謂類 C_i 与 C_j 的和 C_i+C_j 是指这許多類中的一个，它是由類 C_i 的每一个多項式与類 C_j 的每一个多項式相加而得來的。所謂類 C_i 与 C_j 的積 C_iC_j 是指这許多類中的一个，它是由類 C_i 的每一个多項式与類 C_j 的每一个多項式相乘而得來的。这样定义了这些以 $F(x)$ 为模的剩余類以及它們間的"加""乘"运算，我們得到一个有無限多元素的交換环。它有乘法單位元 C_e。除零元素 C_0 外，可証明每一元素有逆元素。事实上，任取一類如 C_{r_1}，其中任一多項式 $\phi(x)$ 必与 $F(x)$ 互質（因 $\phi(x)$ 被 $F(x)$ 除后有余式 r_1，而 $F(x)$ 根据定理条件是既約的），故存在 P 上多項式 $U(x)$ 与 $V(x)$ 满足 $F(x)U(x)+\phi(x)V(x)=e$，或 $\phi(x)V(x)=F(x)[-U(x)]$

$+e$; 因此多项式 $\phi(x)V(x)$ 被 $F(x)$ 除后余 e, 它就屬于類 C_e。若 $V(x)$ 屬于類 C_V, 則 $C_{r_1}C_V=C_e$, 就是説, C_V 是 C_{r_1} 的逆元素。所以我們所得到的不僅是环, 而且是体, 其中 $C_0, C_e, C_a, C_b, \cdots\cdots$ 等部分元素則構成与体 P 同構的子体。把这个体記作 P', 則它可作为 P 的擴体。若 $F(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$, 其中 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n\in P$, 則可推知在 P' 中有 $C_0=C_{a_0}+C_{a_1}C_x+\cdots\cdots+C_{a_n}, C_x^n$, 也就是 $0=a_0+a_1C_x+\cdots\cdots+a_nC_x^n$, 所以 C_x 是 $F(x)$ 的一个根。因此我們所構造的体 P' 含有 $F(x)$ 的根, 这就証明了根的存在定理。

自 我 檢 查 問 題

(1) 求多項式 x^5-x^2-x+1 与 $x^4-2x^3-4x^2+2x+3$ 的最高公因式。

(2) 分离有理数体上多項式 $x^6-5x^5+4x^4+10x^3-11x^2-5x-6$ 的多重因式。

(3) 确定 $\frac{1}{2}$ 是 $32x^5-32x^4+8x^3+4x^2-4x+1$ 的几重根(用綜合除法)。

(4) 若 $f(x)=x^4-8x^3+2x^2-5x+9$, 試用綜合除法求 $f(-2)$ 及 $f(3)$。

(5) 若 P 为有理数体, 証明 $1+\sqrt{2}$ 为关于 P 的代数数, 且有 $P(1+\sqrt{2})=P(\sqrt{2})$。

(6) 若 P 为实数体, 証明在 $P(x)$ 中以 $F(x)=x^2+1$ 为模的剩余類集合 $\{C_0, C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots\cdots\}$ 与复数体同構。[提示: 使 $r_1=a_1+b_1x$, C_{r_1} 与 a_1+b_1i 对应]。

(7) 証明: 示性数为 0 的体上任一旣約多項式在 P 的任何擴体中皆無重根。

(8) 求有理数体上多項式 x^4-5x^2+6 的可分体, 并寫出其元素的一般形式。