高等学校教学参考书

简明微积分

第三册

龚昇 张声雷 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

简明微积分

第三册

龚昇 张声雷 编

高等教育出版社

本书第一、二册以介绍微积分的概念和方法为主，突出微分与定积分这一对矛盾，未对微分与积分的基础理论多加探讨．本册是在第一、二册基础上，用 ε-N, ε-δ 语言，对微积分的基础理论作进一步讨论．在本书中，编者将连续与离散作为一对矛盾，在这个观点下，介绍了无穷级数与无穷积分，Fourier 级数与积分．本书重点突出，叙述严谨、清楚．通过一、二、三册的学习，可使读者对微积分有一个较全面、深刻的了解与认识．本书可作理科各专业的教学参考书．

本册由黄正中教授审阅．

高等学校教学参考书

简明微积分

第三册

龚　昇　张声雷　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 6.125　字数 148,000

1983 年 9 月第 1 版　1984 年 3 月第 1 次印刷

印数 00,001—15,300

书号 13010·0921　　定价 0.78 元

目　录

第九章　ε-δ 语言

第一节　数列极限的 ε–N 语言

1.1　数列极限的定义

在本书的前二册中，已经介绍了单变量与多变量函数的微积分．单变量函数的微分与积分是由微积分基本定理，即通常说的牛顿-莱布尼茨公式揭示它们是一对矛盾 多变量函数的微分与积分是由 Stokes 公式揭示它们是一对矛盾．在这一章中，我们要进一步用精确化的语言，将前二册中学过的内容再重新叙述一遍．

因为极限是微积分的基础概念，我们首先从极限的概念开始．

在第一章第一节 1.1 中已经介绍了极限的概念．对于无穷数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

来说，当项数 n 无限增大时，数列的项如果无限趋近于一个固定的常数 a，就是说，无论预先给定怎样小的正数，在数列里都能找到一项，从这项起，以后所有项与 a 的差的绝对值，都小于预先给定的小的正数，那末固定常数 a 就叫做这无穷数列的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

这也就是，以 a 为中心画出一个小区间$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$，当 n 大到一定程度以后，a_n 皆落入到小区间以内．若小区间再小，只要 n 大到更大的程度以后，a_n 又落入小区间以内，不管小区间多小，都是如此．因此，数列极限可定义为：设有数列 a_n，如果有一定数 a，

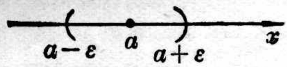

图 9.1

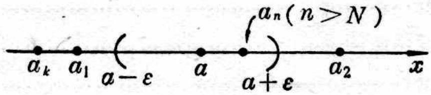

图 9.2

对于不管怎样小的一个正数 ε，都相应地存在一个自然数 $N=N(\varepsilon)$（它随 ε 而变动），只要 $n>N$，就有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则说 a 为数列 a_n 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 或简记为 $\lim a_n=a$，也可记为 $a_n\to a(n\to\infty)$，或简记为 $a_n\to a$. 由此立即可推出，在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外，只能有有限个 a_n.

上述定义用语，习惯上称为"ε-N"语言.

例1 证明 $\lim\frac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$.

证 任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$，只要 $n^\alpha>\frac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. 因此，只要取一自然数 N①$>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，则当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\frac{1}{N^\alpha}<\varepsilon.$$

例2 证明 $\lim a^{\frac{1}{n}}=1\ (a>1)$.

证 因 $a>1$，故 $a^{\frac{1}{n}}>1$，令 $\alpha_n=a^{\frac{1}{n}}-1$，则 $\alpha_n>0$，于是

$$a=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\cdots+\alpha_n^n>n\alpha_n$$

所以 $\alpha_n<\frac{a}{n}$. 因此，任给 $\varepsilon>0$，只要取自然数 $N>\frac{a}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|=\alpha_n<\frac{a}{N}<\varepsilon$$

若数列 a_n 以一数 a 为其极限，则说数列 a_n 是收敛的，a_n 收敛于 a. 反之，则说数列 a_n 是发散的.

---

① 或只要取 $N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$（$[a]$表示 a 的整数部分）

1.2 数列极限的一些性质

有了 ε-N 语言后，我们可以证明数列极限的一些基本性质. 例如,第一册中一开始就说,如果两个数列有极限，那末这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限,分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商(作为除数的数列极限不能为零). 就是说,如果

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b,$$

那末

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\ (b\neq0)$$

现在用 ε-N 语言证明第一个式子.

由于

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|=|(a_n-a)\pm(b_n-b)|$$
$$\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|,$$

任给 $\varepsilon>0$,则有自然数 N_1,当 $n>N_1$ 时,

$$|a_n-a|<\varepsilon/2$$

又有自然数 N_2,当 $n>N_2$ 时,

$$|b_n-b|<\varepsilon/2$$

因此,当 $n>N=\max(N_1,N_2)$时,

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

这就证明了第一个式子. 其他几个式子都可以用同样办法证明.

由

$$\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=a\cdot b$$

可以得到：如果 k 为常数，那末

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = ka$$

由 ε-N 语言，还容易证明如下一些极限的性质.

1. 若数列有极限，则只有一个极限.

证 设 a_n 有两个极限 a 与 b $(a\neq b)$，取 $\varepsilon=|a-b|/3$，这样，小区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 与 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 不相交，无公共点，因为 a 是 a_n 的极限，故只有有限项在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外，所以只有有限个 a_n 落在 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 内. 但 b 也是 a_n 的极限；这是不可能的，得到矛盾.

若有正数 M，使 $|a_n|\leqslant M$ $(n=1, 2, \cdots)$，则说 a_n 有界. 若有一数 A，使得 $a_n\leqslant A(n=1, 2, \cdots)$，则说 A 是数列 a_n 的**上界**. 若有一数 B，使得 $a_n\geqslant B(n=1, 2, \cdots)$，则说 B 是数列 a_n 的**下界**. 既有上界又有下界的数列称为**有界数列**.

2. 收敛数列必有界.

证 设数列 a_n 收敛，极限为 a. 取 $\varepsilon=1$，则有自然数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|$. 取 $M=\max(|a_1|, |a_2|, \cdots|a_N|, |a|+1)$，显然 $|a_n|\leqslant M$ 对一切 $n=1, 2, \cdots$ 都成立，即 a_n 有界.

3. 若 $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$, 且 $a_n\leqslant b_n(n=1, 2, \cdots)$, 则 $a\leqslant b$.

证 设 $a>b$，取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，则有自然数 N，当 $n>N$ 时，$b_n<\dfrac{a+b}{2}<a_n$，这与假设相矛盾.

注意，如果假设是 $a_n<b_n$，则结论仍是 $a\leqslant b$，并不一定有 $a<b$. 看例子 $0<\dfrac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$，但

$$\lim 0=0=\lim\frac{1}{n}.$$

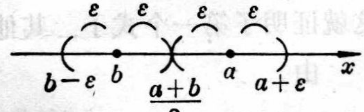

图 9.3

4. 若 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$, 且 $\lim b_n = \lim c_n = a$, 则 $\lim a_n = a$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 由假设, 有自然数 N, 当 $n > N$ 时,

$$a-\varepsilon < b_n < a+\varepsilon, \quad a-\varepsilon < c_n < a+\varepsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时,

$$a-\varepsilon < b_n \leqslant a_n \leqslant c_n < a+\varepsilon, \text{即 } a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon.$$

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^2+4}{5n^3+6n+7}$.

解 由于

$$\frac{2n^3+3n^2+4}{5n^3+6n+7}=\frac{2+3\cdot\dfrac{1}{n}+4\cdot\dfrac{1}{n^3}}{5+6\cdot\dfrac{1}{n^2}+7\cdot\dfrac{1}{n^3}}\to\frac{2+0+0}{5+0+0}=\frac{2}{5}$$

故当 $n\to\infty$ 时, 极限为 $\dfrac{2}{5}$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 3 若 $a>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

证 当 $a>1$ 时, 证明见 1.1 例 2.

当 $a=1$ 时, 结论是显然的.

当 $0<a<1$ 时, 由于 $a^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}$, 而 $\dfrac{1}{a}>1$, 故 $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\to 1$ $(n\to\infty)$, 从而 $a^{\frac{1}{n}}\to 1(n\to\infty)$. 因此, 当 $a>0$ 时, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\to 1$ $(n\to\infty)$.

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

解 当 $\lambda>0$ 时，因

$$(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n$$

所以

$$(1+\lambda)^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2,\text{ 命 }\lambda=\sqrt[n]{n}-1,\text{则有}$$

$$n>\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

故当 $n\geqslant 2$ 时，

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}=0$，因之，$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

1.3 极限存在的判别准则

什么样的数列有极限？如果有，这极限是什么？当然我们可以根据数列极限的定义进行验证．但困难的是，要根据定义来验证，先要知道 a 是什么？一般来说，这是事先不知道的．当然我们可以用一些 a 去试试，可是这样做带有很大的盲目性．能否不必先知道 a，直接从数列本身来判断它是否收敛呢？这里介绍二种收敛判别准则．

所谓一个数列 a_n 是**单调增加**的，是指 $a_n\leqslant a_{n+1}$ 对所有的 $n=1,2,\cdots$ 都成立．同样，如果 $a_n\geqslant a_{n+1}$ 对所有 $n=1,2,\cdots$ 都成立．则称 a_n 为**单调减少**的．

有了这些定义后，可以有如下的判别准则：

1. 单调增加（减少）数列如有上（下）界必有极限．

这个准则，直观上易于看出是正确的，但严格的证明却不大容易．

我们称所有的无穷小数(有穷小数也可以看作无穷小数)为实数，即实数 a 可表为一个整数部分 α_0，及小数部分 $0\cdot\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$，这里每个 $\alpha_i(1\leqslant i<\infty)$ 为 0, 1, 2, …, 9 中这十个数字之一. 如果这个无穷小数只有有限位，或是一个循环小数，那末这个实数是一个有理数，即 a 可以写成 p/q，此处 p, q 均为整数. 如这个无穷小数是一个不循环的无穷小数，则称为无理数.

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots$ 为一单调增加数列，且有上界 M，即

$$a_n\leqslant M,\ n=1,2,\cdots$$

由于每个 a_n 为一实数，故为一无穷小数. 先来比较所有 a_n 的整数部分，由于 a_n 有上界，故 a_n 的整数部分，除掉前面有限项以外，从某一项开始，一定是一个不再变化的数，例如为 α_0，再来比较它们的第一位小数，也一定从某一项起都相同，例如为 α_1，如此继续进行下去，就得到一个无穷小数 $a=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$，这个实数 a 就是极限. 现在证明 a 的确为数列 a_n 的极限.

事实上，任取 $\varepsilon>0$，可取一自然数 k，使

$$a-\varepsilon<\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$$

因 $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 不是 a_n 的上界，故必有 a_N，使得

$$a-\varepsilon<\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k<a_N\leqslant a$$

由于 a_n 是单调增加的，故当 $n>N$ 时，

$$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant a<a+\varepsilon$$

即 a_n 收敛于 a.

同样可证，单调减少数列如有下界必有极限.

例 1 设 $\alpha\geqslant 2$，

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},\quad (n=1,2,\cdots)$$

证明 a_n 收敛.

证 a_n 显然是单调增加的，故只须证明数列 a_n 有上界. 事实上,

$$a_n<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{n}<2\quad(n=1,2,\cdots).$$

例 2 试证

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\quad(n\text{ 重根式})$$

有极限.

证 先证 $a_n<2$. 当 $n=1$ 时, $\sqrt{2}<2$, 假定 $a_k<2$, 则 $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<2$. 故由归纳法知 $a_n<2$. 另一方面, a_n 是单调增加数列, 故有极限.

最重要的例子, 也许是

例 3 证明

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

有极限.

证 先证 a_n 单调增加.

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)<1$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)=a_{n+1}$$

再证 a_n 有上界

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)<3$$

我们已在第一册(第 29 页)中知道，a_n 的极限就是

$$e=2.718281828459045\cdots.$$

在这个判别准则中，如果数列没有单调性，是否还有极限呢？当然不一定．如果一个数列不仅有上界，而且有下界(这时称数列是有界的)，那末，我们可以从这个数列中选出一个子列，使得这个子列是有极限的．这就是

2. Bolzano-Weierstrass 判别准则

在一有界数列中，一定可以选出一个有极限的子列．

证 由假设，数列 a_n 有界，故有区间$[A,B]$，使得所有 a_n 都落在这区间内．将$[A,B]$平分成二个区间，那末其中必有一个是含有无穷个点的，假定含有无穷个点的那个区间为$[A_1,B_1]$，显然有

$$B_1-A_1=\frac{1}{2}(B-A)$$

同法将区间$[A_1,B_1]$再一分为二，则其中必有一个是含有无穷个点的．等等．第 k 次分出的区间$[A_k,B_k]$也同样含有无穷多个点．

这些区间，每一个都包含在前一个中，且每个区间的长度为前一个区间的长度的一半，所以第 k 个区间的长度为

$$B_k-A_k=\frac{1}{2^k}(B-A)$$

当 k 趋于无穷时，这长度趋于零．如此得出二个单调数列

$$A_1\leqslant A_2\leqslant A_3\leqslant\cdots\leqslant A_k\leqslant A_{k+1}\leqslant\cdots$$

$$B_1\geqslant B_2\geqslant B_3\geqslant\cdots\geqslant B_k\geqslant B_{k+1}\geqslant\cdots$$

显然这二个数列都有界，故都有极限．又由 $A_k-B_k\to 0$ 可知，这两个极限相等，记为 a，即

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}B_k=a.$$

但$[A_k, B_k]$中含有数列 a_n 中的无穷多个点，我们任取一个，命它为 a_{n_k}，由于

$$A_k\leqslant a_{n_k}\leqslant B_k$$

及

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}B_k=a$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$$

所以我们可以从数列 a_n 中选出一个子列 a_{n_k}，使得数列 a_{n_k} 是有极限的．

由 Bolzano-Weierstrass 判别准则，立即得到十分重要的

3. Cauchy 判别准则

设有数列 a_n，如果对于不管怎样小的一个正数 ε，都相应地存在一个自然数 $N=N(\varepsilon)$（它随 ε 而变动），只要 n，m 都大于 N，就有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon$$

那末数列 a_n 一定有极限．

证 由假定，任给一个 $\varepsilon>0$，必有 N 存在，当 m，$n>N$ 时，都有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon$$

固定 m，则对所有的 $n>N$，有

$$a_m-\varepsilon<a_n<a_m+\varepsilon$$

即在$[a_m-\varepsilon, a_m+\varepsilon]$内有无穷个点，依据 Bolzano-Weierstrass 判别准则，可以找到一个子列 a_{n_k}，使得

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$$

所以仅须证明 a_n 也趋于 a. 我们可以选取充分大的 n_k, 使

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$$

不妨要求 $n_k>N$, 于是当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a_{n_k}|<\varepsilon$$

所以得到: 当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<2\varepsilon$$

这就是说 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

Cauchy 判别准则十分重要, 事实上它是数列有极限的充分必要条件. 上面已经证明了, 如果数列满足 Cauchy 判别准则, 则数列有极限, 反过来, 如果数列 a_n 有极限, 那末必然满足 Cauchy 判别准则. 证明这点十分容易.

如果 a_n 有极限 a, 那末按照定义, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|<\varepsilon/2$$

因之, 对于任意 $m, n>N$, 有

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a|+|a_n-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

由于 Cauchy 判别准则中没有用到极限值 a, 所以用起来更方便, 同时它又是数列有极限的充分必要条件, 所以我们也可以把 Cauchy 判别准则作为数列有极限的定义.

例 4 求证数列

$$a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$$

收敛.

证 由于

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}$$

对一切自然数 p 都成立，所以任给 $\varepsilon>0$，一定存在 $N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 从而 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 对一切自然数 p 成立，即当 $m,n>N$ 时，$|a_m-a_n|<\varepsilon$ 成立. 由 Cauchy 判别准则，数列 a_n 有极限.

这个数列是非单调的，因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}$的符号时正时负，不能用本节中的第一个判别准则来判别，而且 a_n 的极限值也不是一眼看得出的，所以用定义来直接验证也很困难，但用 Cauchy 判别准则却很容易判别.

由于 Cauchy 判别准则是数列收敛的充分必要条件，所以也能用它判断数列是否发散.

例 5 试证

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

发散.

证 由于

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}$$

当 $p=n$ 时，就有

$$|a_{2n}-a_n|>\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$$

所以如果选定 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，不管 n 多大，总有

$$|a_{2n}-a_n|>\varepsilon.$$

这不符合 Cauchy 判别准则的收敛条件，因之数列 a_n 发散.