普通高等教育“十二五”规划教材 | 普通高等院校数学精品教材

线性代数简明教程

陈必红 ✦ 编著

XIANXINGDAISHU JIANMING JIAOCHENG

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

线性代数简明教程

陈必红　编著

华中科技大学出版社

中国·武汉

内 容 提 要

本书介绍了线性代数课程中的基本知识，如行列式、矩阵及运算、求解线性方程组、矩阵的对角化、二次型等基本理论和算法，并附有习题．本书的读者对象为非数学专业的本科生、大专生及中专生，他们只需要对线性代数的理论和运算有一个简单的了解，并不需要进行深入的探究，学时也较少，只用掌握最基本的概念和算法就能够达到要求．本书可作为一般大中专学校的非数学专业学生学习线性代数课程的教科书，也可作为一般科技人员自学研究和参考的书籍．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/陈必红　编著．—武汉：华中科技大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-5609-8417-9

Ⅰ.线…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 236792 号

线性代数简明教程　　　　陈必红　编著

责任编辑：王汉江
封面设计：范翠璇
责任校对：刘　竣
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：华中科技大学印刷厂
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：7
字　　数：194 千字
版　　次：2012 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：18.00 元

前　　言

从事大学的非数学专业的线性代数课程多年的教学实践，使我萌生了要编写一本相对通俗的线性代数教材的想法. 现在大学有一些专业，需要应用数学的一些知识，但是确实要求并不高，只需要掌握最基本的概念和运算即可，而且重在计算而非证明. 现有的一些线性代数教材相对于这些专业的学生来说，学习起来仍然比较困难. 因此，需要有一本通俗的、层次较低的、适合一般非数学专业学生学习线性代数基本知识的教材.

为达到这个要求，本书在以下两个方面做出了努力.

一是在各种基本概念的叙述方面，尽量使用通俗易懂的文字，使读者阅读起来感觉流畅，介绍的例子也都是选择浅显易懂的. 一些较难的定理，尽量采用简洁易懂的方法进行阐述和证明. 在例题的选择上也尽量不讲难题.

二是在习题的选取上，尽量避开证明题，加大对基本练习题的练习力度，其主要目标是让学生熟练掌握习题的基本算法. 考虑到学生在将来工作中如果真要用到线性代数的知识时都是利用现成软件，或者计算机编程运算，所以在习题的设计上尽量避免复杂的却是低水平的分数运算. 这是因为，这些习题的计算是帮助学习者掌握一般的算法流程，建立起正确的概念，却不打算提高学习者的笔算能力和分数运算能力. 将来如果用到线性代数的知识，真正要做的计算都是由计算机完成的，因此让学生陷入复杂的却是低水平的分数运算并无必要. 本书基本上没有相对较难的题，都是基本的训练.

此外，本书的第 3 章主要介绍了一般非数学专业的低层次学生容易掌握的有关初等列变换解题的各种方法.

在附录中给出了利用“应用数学家园”网站学习线性代数的方法，对于教学的效率会有较大的帮助.

此外，由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正.

编　者

2012 年 8 月

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 二、三阶行列式

对于各种不同的方程或者方程组,人们都探索出了一些有效的解法.例如,一元二次方程就可以用配方法来解,二元一次和三元一次线性方程组就用消元法或者加减法来解.但是,除了这样的解法外,人们也喜欢弄出一些解的公式,这样就不用解,直接套公式求解.例如,人们就得出了一元二次方程的解的公式.解的公式有助于人们对于方程的进一步的研究,例如,一元二次方程的解的公式给出之后,人们就知道方程什么时候有实根,什么时候没有实根,什么时候有重根,等等.

对于二元一次、三元一次乃至多元一次线性方程组,历史上也有人给出过一般的公式.而这些公式都是一些加减乘除的组合.而整理这些公式通常都是通过通分的方法将除法放到最后进行,只做一次除法,这就将公式弄成了一个大分式.而分式的分母和分子都是一些系数的加减和乘法的组合,然后继续将公式整理成先乘再加减的组合.整理成这样的标准的加减乘除的公式之后,人们对之进行研究,最后得出行列式的概念,并且能够将公式化为简洁的表达式.

1. 二阶行列式

设有 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 四个数,规定记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 代表 $a_{11}a_{22}$

$-a_{12}a_{21}$，称之为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

为了方便记忆，可参考图 1-1 的画线方法. 因此这也被称为对二阶行列式的斜线法计算.

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2-1\times3=1.$

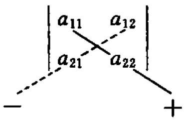

图 1-1

在实际应用中，二阶行列式经常是以其中有函数或者变量的形式出现的，人们经常关心的是一个给定的二阶行列式是否等于零.

从式(1.1)可以看出，当二阶行列式中的元素中有一行或者一列都是零的时候，行列式就为零. 如果四个元素都不为零，行列式却等于零，这个时候有

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

将此式整理，得

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad 或 \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

也就是说，这个时候二阶行列式的两行及两列的数据都是成比例的.

例如，行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$，它的第 2 行是第 1 行的 2 倍，它的第 2 列是第 1 列的 3 倍.

2. 三阶行列式

9 个数构成的三阶行列式的定义是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.2}$$

为了方便记忆公式(1.2)，通常采用如图 1-2 所示的斜线法来记忆. 其中三条实的斜线称为正斜线，它们经过的元素相乘后前面冠“+”号，而三条虚的斜线称为反斜线，它们经过的元素相乘后冠“−”号. 因此用公式(1.2)来计算一个三阶行列式的数值的办法也称为斜线法.

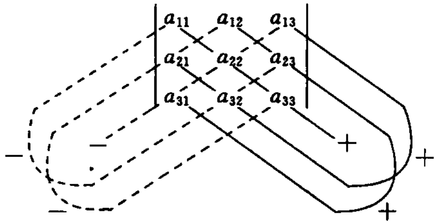

图 1-2

在后面我们将要介绍利用性质来计算行列式的其他办法. 和其他办法相比，如果 9 个数都不等于零，则斜线法不是一个高效率的计算方法. 但是斜线法的优势在于，如果行列式中的 9 个数中有两个以上的 0 的时候，斜线法的计算还是相当简单的.

例如，

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\times2\times2+5\times1\times(-1)-(-1)\times3\times4=23$$

只有三项不为 0，熟练斜线法的人只要心算就可以直接得出答案.

1.2　n 阶行列式

前面的二阶、三阶行列式的斜线法计算，很容易产生误导，就是认为多阶($n\geqslant4$)行列式也是可以用斜线法计算的，这是错误的. 四阶以上的行列式完全没有什么斜线法计算.

一般而言，n^2 个数构成一个 n 阶行列式，记号是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它是由 n^2 个数算出的一个数，称为这 n^2 个数的一个行列式的值. 而这 n^2 个数中的每一个也被称为行列式的元素. 例如，四阶行列式的记号就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

根据解线性方程组而研究出来的这些行列式的值，写成先乘后加减的形式，发现它们是所有的不同行不同列的 n 个数相乘后，再相加减构成的.

以上面的四阶行列式为例，a_{11}，a_{22}，a_{33}，a_{44} 就是不同行不同列的 4 个元素，因此它们乘在一起构成了四阶行列式中的一项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. 同样，$a_{21}a_{43}a_{32}a_{14}$ 和 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$ 也都是 4 个不同行不同列的元素乘在一起，因此也是四阶行列式中的项. 尤其注意 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$，从它的位置看就不可能用一条斜线来表示. 注意乘项中的元素必须是不同行不同列的元素，同行的元素和同列的元素都没有机会相乘. 例如，乘积 $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}$ 就肯定不是四阶行列式中的项，因为 a_{24} 和 a_{23} 都是在第 2 行.

对于一个 n 阶行列式，这样的乘积项总共有多少？因为每一个项都必须是不同行不同列的元素相乘，因此我们可以用排列组合的办法来计算，首先从第 1 行找一个元素，共有 n 种办法，然后在第 1 行元素取定的情况下，从第 2 行找的元素必须避开第 1 行找的那个元素所在的列，因此只有 $n-1$ 种办法，同样，第 3 行只有 $n-2$ 种元素可选，等等. 因此，n 阶行列式总共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$ 个乘积项相加或相减.

因此,我们从二阶行列式共有 2! =2 项,三阶行列式共有 3! =6 项看,这个规律是成立的.问题的麻烦在于,给定了行列式中的一个乘积项,那么它的前面是冠以正号“+”还是负号“-”呢?

例如,四阶行列式中的 $a_{21}a_{43}a_{32}a_{14}$ 项,前面应当是一个正号“+”还是一个负号“-”,与这 4 个元素处于阵列中的什么位置有关,也就是与它们所处的行和列有关系.$a_{21}a_{43}a_{32}a_{14}$ 项是取自第 2,4,3,1 行及第 1,3,2,4 列,这里的 2,4,3,1 和 1,3,2,4 各自都是自然数 1,2,3,4 的一个排列,我们称它们为一个乘积项中的行排列和列排列.因此,每一个行列式中的乘积项都具有一个行排列和一个列排列,这两个排列按一种规则决定了它们前面是取正号还是取负号.

这个规则是这样的:首先看行排列 2,4,3,1,其中,1 和它左边的三个数都构成了逆序,就是说它小于左边的三个数,因此就有 3 个逆序;把 1 去掉后剩下的三个数的排序是 2,4,3,其中 2 是最小的也在最左边,因此没有逆序;把 2 也去掉后剩下的两个数 4,3,3 有 1 个逆序,因为 4 在 3 的左边.因此,行排列 2,4,3,1 总共有 3+1=4 个逆序.

再看列排列 1,3,2,4,其中,1 在最左边,因此没有逆序,2 的左边有一个 3,因此有 1 个逆序,将 1,2 去掉后,3 没有逆序,因此总共有 1 个逆序.

将行排列的 4 个逆序和列排列的 1 个逆序加起来得 5,因此称乘积项 $a_{21}a_{43}a_{32}a_{14}$ 的总逆序数是 5,这是一个奇数,因此这个乘积项的前面应当冠负号.

也就是说,行列式中的每一个乘积项前面是冠正号还是冠负号,是由这个乘积项的总的逆序数的奇偶性所决定的,如果是奇数,前面就要冠负号,如果是偶数,就要冠正号.

但是还有一个问题要解决,就是乘积是满足交换律的,因此乘积项 $a_{21}a_{43}a_{32}a_{14}$ 也可以写成 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$,这时总的逆序数为 3,还可以写成 $a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}$,这时总的逆序数也是 3,因此我们看到,虽

然总的逆序数有可能不同，但是都是奇数这一点不会随着乘积项中各个元素的位置交换而改变，这一点是有定理保证的.下面我们来正式描述 n 阶行列式的定义.

定义 1.1 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列被称为一个 n 级排列，在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_u 排在较小的数 i_v 的左边，称这构成一个**逆序**，称一个 n 级排列中逆序的总数为这个 n 级排列的**逆序数**，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$. 如果一个排列的逆序数是偶数，称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**，这样的性质称为此 n 级排列的**奇偶性**. 在一个排列 $i_1\cdots i_u\cdots i_v\cdots i_n$ 中，如果将数 i_u 和 i_v 对调，其他数不变，得到另一个排列 $i_1\cdots i_v\cdots i_u\cdots i_n$，这样的操作称为一个**对换**.

定理 1.1 任何一个 n 级排列经过一个对换后，奇偶性改变.也就是说，对换前逆序数是偶数，则对换后逆序数是奇数，而对换前逆序数是奇数，对换后逆序数是偶数.

证 首先证明，对于一个 n 级排列的相邻的两个数的对换，是一定会改变奇偶性的，这是因为，如果左边的数原来是小于右边的数，则相邻对换后增加了一个逆序，如果左边的数原来是大于右边的数，则相邻对换后减少了一个逆序，因此都导致逆序数的奇偶性改变.

对于一个中间相隔了 m 个数的两个数 i 和 j 的对换，就是原来是 $\cdots ik_1k_2\cdots k_mj\cdots$，可以通过一系列的相邻对换来完成，首先让 j 依次和 $k_m,k_{m-1},\cdots,k_2,k_1,i$ 作 $m+1$ 次相邻对换移到 i 的左边，然后再将 i 依次和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 作 m 次相邻对换，换到原来 j 的位置，则总共作了 $2m+1$ 次也就是奇数次的相邻对换，奇偶性改变了奇数次，当然导致对换改变了排列的奇偶性. 证毕.

下面正式对 n 阶行列式下定义，在这个定义中，对于给定的一个不同行不同列的 n 个数的乘积项，不妨交换次序使其行排列为自然顺序排列，这时行排列的逆序数为 0，因此行排列和列排列的总逆序数就是列排列的逆序数.

定义 1.2 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 如果 $n=1$,则一阶行列式 $|a|$ 就是 a. 行列式也可简记为 $|a_{ij}|$. 对于 $n>1$,行列式的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n\text{是}n\text{级排列}} (-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.3}$$

定理 1.2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般乘积项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.4}$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

证 这是因为给定行排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的乘积项中的 n 个数,总可以根据乘法交换律相互交换,使行排列为自然顺序排列 $123\cdots n$,这时列排列假设为 $p_1p_2\cdots p_n$. 而每次交换都相当于行排列和列排列都作了一次对换,因此总的逆序数的奇偶性不变,有

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}$$

即可知式(1.4)与式(1.3)中的乘积项等价. 证毕.

一般情况下,按式(1.3)或式(1.4)来计算行列式都是相当复杂且没有效率的,因此不推荐读者用这样的办法来计算行列式,有一些线性代数的教材甚至改变行列式的定义,用展开法来定义行列式. 但是用逆序数法的定义也有它的好处,就是作理论研究时更容易证明一些定理或者行列式的性质. 事实上,除了二阶、三阶行列式外,在实际应用中,大多数行列式都是用下一节导出的行列式的性质来计算的.

但是对于某些特殊的行列式，用定义来计算行列式却是很方便的，那就是在式(1.3)中只有一项不等于0，而且这一项的逆序数很容易计算的时候. 这就是对角行列式、下三角行列式和上三角行列式.

如果行列式$|a_{ij}|$中，除了$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$这样的行标和列标都相同的数之外的其他元素统统都是0，这个时候行列式除了乘积项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$外的所有乘积项都为0，这个可能不等于0的项的行排列和列排列都是自然顺序排列，因此逆序数都是0，总的逆序数也是0，因此是偶排列，根据定义知这个乘积项就是行列式的值，这样的行列式被称为**对角行列式**，即具有如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.5}$$

有的时候行列式中等于0的数也可以省略不写，因此，对角行列式也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) \times 3 \times 5 = -30$，

$\begin{vmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{vmatrix} = 56$，等等.

对角行列式中数$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$所占据的位置也称为行列式的对角线. 各个乘积项中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$才有可能不是0，而其他

乘积项都是 0 的行列式，也并不是只有对角行列式才这样，还有另外两种行列式，分别称为上三角行列式和下三角行列式，它们也是只有这一个乘积项可能不等于 0.

如果行列式的对角线的左下方的数全部是 0，则称为**上三角行列式**，即具有如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为行列式的乘积项都是不同行不同列的元素相乘，我们只关心可能不为 0 的乘积项，因此先考虑第 1 列，只有第 1 行的数 a_{11} 可能不为 0，再考虑第 2 列，当然只考虑第 2 列第 2 行之后的数了，就只有 a_{22} 可能不为 0，接着考虑第 3 列，以此类推，最后发现只有对角线的乘积项可能不为 0，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

如果行列式的对角线的右上方的数全部是 0，称这样的行列式为**下三角行列式**，具有如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按同样的办法也可以证明它的值也是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & -3 \\ & 1 & 5 & 6 \\ & & -1 & 8 \\ & & & 1 \end{vmatrix} = -1$，$\begin{vmatrix} 2 & & & \\ 34 & 2 & & \\ 2 & -6 & 3 & \\ 9 & 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 12$.

对角行列式既是上三角行列式，也是下三角行列式.

1.3 行列式的性质

将行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行与列互换得到的行列式，称为 D 的**转置**，记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下面介绍行列式的一些重要性质，实际上计算大多数的行列式，无论是手算还是计算机算，都是利用性质来计算的.

性质 1.1 将行列式转置，行列式的值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 将行列式转置后，所有的乘积项都还是不同行不同列的数的相乘，相应的行排列是原来的列排列，而相应的列排列是原来的行排列，因此总的逆序数不变，总的逆序数的奇偶性也不变，所以行列式的值也和转置前的相同. 证毕.

由性质 1.1 可知，凡行列式的行所具有的性质，其列也具有同样的性质.

性质 1.2 交换行列式的两行或者两列，得到的新行列式的值是原行列式的值的相反数.

证 先证明交换行列式的两列的情况. 这个时候每个行列式的乘积项的行排列是自然顺序的情况下，列排列都相当于同时做了一个对换，导致奇偶性统统改变，所有的乘积项都是原行列式乘积项的相反数，因此新行列式的值是原行列式的值的相反数. 对于交换两行的情况，参考性质 1.1 即得. 证毕.