大学数学系列教材

高等数学

下册

主编　干晓蓉

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

下册

主编　干晓蓉

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是为普通高等院校应用型本科专业学生编写的高等数学教材。全书分上、下两册。上册包含函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程与差分方程、无穷级数五章，下册包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分四章。每章各节都配有一定数量的习题，书末附有部分习题答案与提示。内容包含微积分在几何、物理和经济上的应用，可供不同专业的高等数学教学选用。全书叙述简明扼要，条理清楚、通俗易懂，方便教学。

本书可作为普通高等院校应用型本科各专业的高等数学教材，也可作为成人教育各专业的高等数学教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/干晓蓉主编．—北京：高等教育出版社，2013．3

ISBN 978-7-04-036830-7

Ⅰ．①高… Ⅱ．①干… Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第008985号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　特约编辑 张建军　封面设计 姜　磊
版式设计 余　杨　插图绘制 尹　莉　责任校对 杨凤玲　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	煤炭工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.5	版　　次	2013年3月第1版
字　　数	210千字	印　　次	2013年3月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	17.40元

物 料 号　36830-00

目　录

第六章　向量代数与空间解析几何

本章作为学习多元函数微积分的预备知识，内容包含向量代数与空间解析几何.

在向量代数部分，首先介绍向量的概念及其线性运算，在建立空间直角坐标系以后，导出了向量的坐标表示，进一步介绍向量的方向余弦和向量的数量积、向量积及混合积等运算.

在空间解析几何部分，主要内容包括常见的空间曲面和曲线方程，空间平面和直线方程以及有关知识.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在客观世界中，我们经常遇到两类物理量：标量（数量）和向量（矢量）. 标量（数量）：只有大小，没有方向的量，如时间、温度、质量、密度、体积等. 向量（矢量）：既有大小，又有方向的量，如力、速度、加速度、位移、力矩等.

1. 向量的表示

在数学中，用一条有方向的线段（称为有向线段）来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 图 6－1 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 向量可用黑体字母表示，也可用上加箭头字母表示，例如，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$.

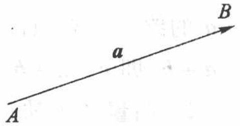

图 6－1

2. 自由向量

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学中我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称向量. 因此，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，相等的向量经过平移后可以完全重合. 未作特殊声明，本书研究的向量均指自由向量.

3. 向量的模

向量的大小叫做向量的模. 用有向线段表示向量，模就是它的长度，向量 $\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AB}$的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$.

4. 单位向量

模等于 1 的向量叫做单位向量.

5. 零向量

模等于 0 的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

6. 负向量

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

7. 向量的平行

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，零向量认为是与任何向量都平行.

8. 两向量共线

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此，两向量平行又称**两向量共线**.

9. k 个向量共面

设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 **k 个向量共面**.

二、向量的线性运算

在物理学中，作用于同一质点的两个不平行力的合力可按平行四边形或三角形法则求得. 同样的方法也可用于速度、加速度的合成，为此启发我们定义向量的加减法.

1. 向量的加法(三角形法则)　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 6－2).

2. 向量的加法(平行四边形法则)　当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 6－3).

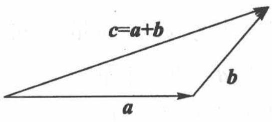

图 6－2

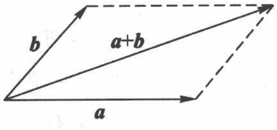

图 6－3

向量的加法具有以下性质：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) 三角不等式:$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$(三角形两边之和大于第三边).

n 个向量的加法(多边形法则) 由于向量的加法符合交换律与结合律,故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{a}_n$,并按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的多边形法则,即用前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量就是 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{a}_n$(图 6-4).

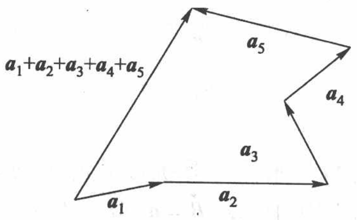

图 6-4

若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$,则记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,称为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差,如图 6-5 所示. 显然,有 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

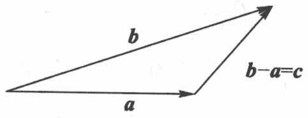

图 6-5

3. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量. 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 特别地,当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的. 当 $\lambda=\pm1$ 时,$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$(图 6-6).

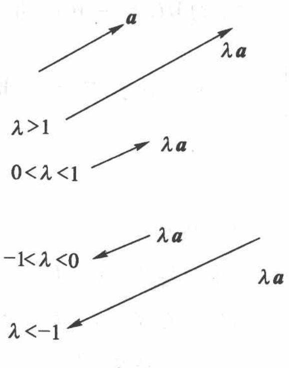

图 6-6

由定义可知向量数乘有以下性质:

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(3) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(4) $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位长向量(因为 $|\boldsymbol{a}^0|=\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$);

(5) 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$(又称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线)$\Leftrightarrow$存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\lambda>0$;$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时 $\lambda<0$);

(6) 设有数轴 u,如图 6－7 所示,O 为坐标原点,P 为轴上一点,其坐标为 u,$\boldsymbol{e}$ 是指向数轴 u 正方向的单位向量,则有$\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{e}$.

图 6－7

向量的加法及向量与数的乘法运算统称为向量的线性运算.

例　在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试通过 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的线性运算表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$,其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解　如图 6－8,由于平行四边形的对角线互相平分,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$,故 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$,于是$\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

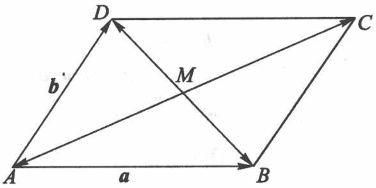

图 6－8

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$,所以$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 又因 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. 由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

习 题 6－1

1. 填空:

(1) 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 应满足________;

(2) 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 应满足________.

2. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{s}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{r}-3\boldsymbol{s}$.

3. 试用向量方法证明:对角线互相平分的四边形必是平行四边形.

4. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

第二节　空间直角坐标系及向量的坐标表示

一、空间直角坐标系及两点间的距离公式

1. 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三条以 O 为原点且两两互相垂直的数轴，依次称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），三条数轴具有相同的单位长度，它们的正方向符合右手法则，即右手握住 z 轴，拇指指向 z 轴正方向，其余四指指向 x 轴正方向，把四指弯曲 90 度后，恰好指向 y 轴的正向. 这样的三条坐标轴就构成空间的直角坐标系，称为空间直角坐标系 $Oxyz$，点 O 称为坐标原点.

在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴可以确定一个平面，这种平面称为**坐标面**. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个坐标面是 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限，其边界含有三个正半轴的卦限叫做第一卦限，它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方，按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方，与第一卦限对应的是第五卦限，按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示，如图 6－9 所示.

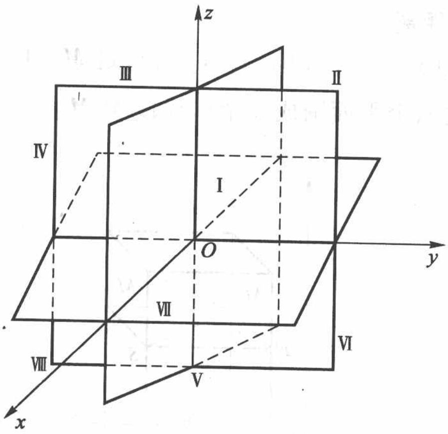

图 6－9

对于空间中任意一点 M，过点 M 作三个平面，分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴，且与这三个轴分别交于 P，Q，R 三点，设这三点在三条坐标轴上的坐标分别为

a,b,c,就得到一个数组(a,b,c);反之,给定一个数组(a,b,c),就可在 x 轴,y 轴和 z 轴上确定坐标为 a,b,c 的点 P,Q,R,过 P,Q,R 作垂直于三条坐标轴的平面,得到交点 M. 因此,空间的点 M 与数组(a,b,c)之间建立了一一对应,称数组(a,b,c)为空间点 M 的直角坐标,a 为横坐标,b 为纵坐标,c 为竖坐标,如图 6－10 所示.

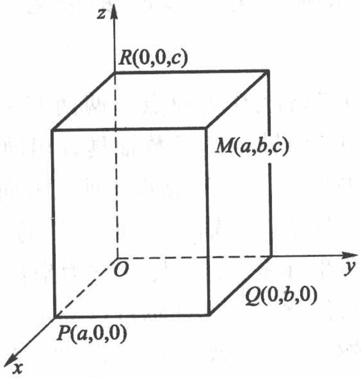

图 6－10

显然,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$,x 轴,y 轴和 z 轴上的点,其坐标分别为$(x,0,0)$,$(0,y,0)$和$(0,0,z)$,xOy 面,yOz 面和 zOx 面上的点,其坐标分别为$(x,y,0)$,$(0,y,z)$和$(x,0,z)$.

2. 空间两点间的距离

设空间两点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,过 M_1,M_2 各作三个平面,分别垂直于三个坐标轴,这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为一条对角线的长方体,如图 6－11 所示.

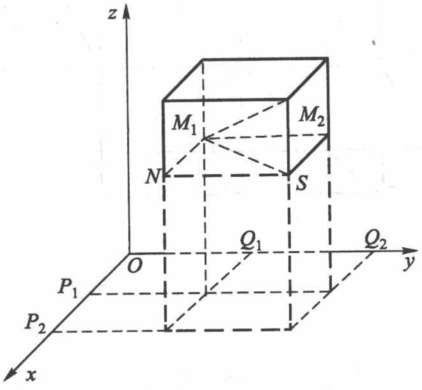

图 6－11

由图 6 - 11 可知，有

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1S|^2 + |M_2S|^2 = |M_1N|^2 + |NS|^2 + |M_2S|^2\\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |M_2S|^2\\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,\end{aligned}$$

因此，得到两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 1　求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证　因为 $|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$,

$$|M_1M_3|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

所以 $|M_1M_3| = |M_2M_3| = \sqrt{6}$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

（证毕）

二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标表示

如图 6 - 12，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴的正向的单位向量，叫做基本单位向量. 设 $\boldsymbol{a}$ 是空间一个向量，平移向量 $\boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{a}$ 的起点位于原点，终点为 $M(a_x,a_y,a_z)$，因为点 M 的坐标 a_x,a_y,a_z 也是点 A,B,C 分别在 x 轴，y 轴和 z 轴上的坐标，由向量与数的乘积的性质(6)，有

$$\overrightarrow{OA} = a_x\boldsymbol{i}\,,\quad \overrightarrow{OB} = a_y\boldsymbol{j}\,,\quad \overrightarrow{OC} = a_z\boldsymbol{k},$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\\ &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**，简记为 (a_x,a_y,a_z)，即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = (a_x,a_y,a_z),$$

a_x,a_y,a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中的坐标；$a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

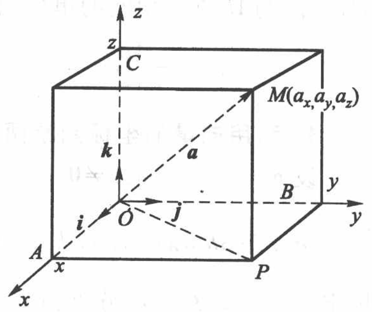

图 6 - 12

由图 6 - 12 可知，向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的模（即长度）等于点 $M(a_x,a_y,a_z)$ 到原点的距离，故

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

2. 利用坐标表示作向量的线性运算

利用向量的坐标表达式可以把向量的加法、减法和数乘法的运算转变为对应分量的代数运算，把向量运算变成了对应数的运算.

设　$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,

则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x,a_y,a_z)=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).\end{aligned}$$

给定空间一点 $M(x,y,z)$，连接原点 O 到点 M 的向量$\overrightarrow{OM}$常记为 $\boldsymbol{r}$，称为点 M 的**位置向量**，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$（这里向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M 都表示为 (x,y,z)，通过上下文可以分清是点还是向量）.

给定空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则连接 M_1,M_2 的向量为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\end{aligned}$$

例 2　已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解　因为$\overrightarrow{AB}=(7-4,1-0,3-5)=(3,1,-2)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$，故与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量为

$$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right).$$

3. 利用向量的坐标判断两个向量平行

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda.$$

规定上式中如有一项分母为零，则该项分子亦为零.

例 3　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求一点 $M(x,y,z)$，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解　如图 6－13，由于$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-$

$z)$，由$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$，得

$$\begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x) \\ y-y_1=\lambda(y_2-y) \\ z-z_1=\lambda(z_2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

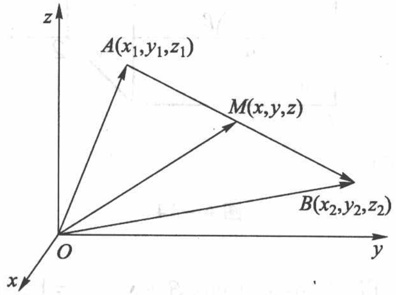

图 6－13

点 $M(x,y,z)$ 即点 $M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

当 $\lambda=1$，点 M 是有向线段$\overrightarrow{AB}$的中点，故有向线段$\overrightarrow{AB}$的中点 $M(x,y,z)$ 的坐标公式为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

三、向量的方向角、方向余弦和投影

1. 方向角与方向余弦

如图 6－14，非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 由图 6－14，有

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,$$

故向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

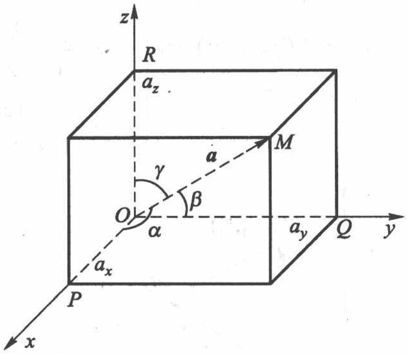

图 6－14

计算上面三式的平方和，得到 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，因此，

$$\boldsymbol{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

为 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位向量.

例 4　设已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(3,1,0)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{AB} = (3-2, 1-2, 0-\sqrt{2}) = (1, -1, -\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{AB}$ 的模为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$，

$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$，　$\cos\beta = -\dfrac{1}{2}$，　$\cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\overrightarrow{AB}$ 的方向角为 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$，　$\beta = \dfrac{2\pi}{3}$，　$\gamma = \dfrac{3\pi}{4}$.

2. 向量在轴上的投影

如图 6－15，任给向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$，$u$ 轴过点 O 且与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 φ，$\boldsymbol{e}$ 是 u 轴正向的单位向量，过点 M 作平面垂直于 u 轴并与 u 轴相交于点 M'，点 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影，向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的投影向量，易见

$$\overrightarrow{OM'} = (|\boldsymbol{a}|\cos\varphi)\boldsymbol{e},$$

其中数 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$，即

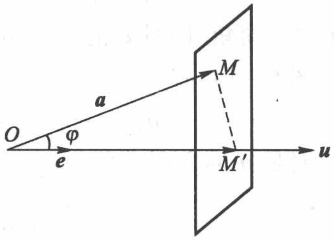

图 6－15

$$\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi.$$

当 φ 为锐角时，$\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} = |\overrightarrow{OM'}|$，当 φ 为钝角时，$\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} = -|\overrightarrow{OM'}|$.

按此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x, a_y, a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即 $a_x = \mathrm{Prj}_x \boldsymbol{a}, a_y = \mathrm{Prj}_y \boldsymbol{a}, a_z = \mathrm{Prj}_z \boldsymbol{a}$.

例 5　如图 6－16，设立方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|\overrightarrow{OA}| = a$，求 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦及 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA}$.

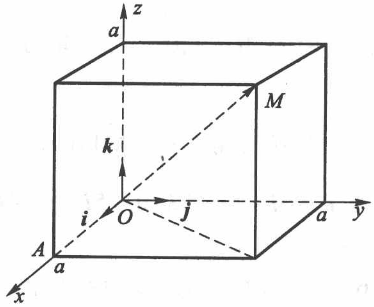

图 6－16

解　$\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示为 $\overrightarrow{OM} = (a, a, a)$，其模为 $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$，$\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是，$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

习 题 6－2

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1, -2, -3)$；　$B(2, 3, -4)$；　$C(2, -3, -4)$；　$D(-2, -3, 1)$.

2. 指出下列各点所在的坐标面或坐标轴：

$A(1, 2, 0)$；　$B(0, 3, 4)$；　$C(2, 0, 0)$；　$D(0, -3, 0)$.

3. 求点 (a, b, c) 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 自点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，求出垂足的坐标.

5. 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？