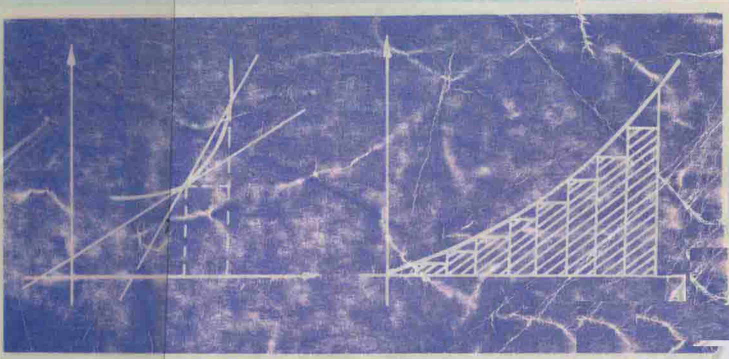
电大与成人高等学校教学参考用书
高等教育自学考试辅导用书

经济应用数学基础(一)

微积分习题详解



王文士 编著

广西教育出版社

序

成人自学，没有老师讲课，学习时间亦只能在业余挤取，因而，一本能起“无声的老师”作用、在有限时间可获得好的学习效果的辅导书，实为自学者最迫切的需求。王文士副教授编著的《微积分习题详解》，就是一本能满足自学者需求的，具有较高质量和水平的辅导书。

高等数学对经济类各专业的重要性已日益为人们所重视，但成人高校或参加高等教育自学考试的学生的数学基础相对来说还是较薄弱的，妨碍了学生的全面发展。王文士的这套题解的出版就是想解决这个矛盾的一个尝试，力图使学生在自修高等数学时，有一个好的“无声的老师”，以增强学好高等数学的信心。若持之以恒，效果必好。这套题解详细而富有启发性，“通俗”而不失科学性，文字流畅，针对性强，便于学生自学，对教师的备课和教学也是一个好帮手，是一本较好的高等数学题解。

这套题解的出版是值得欢迎的。

广西数学学会理事长
广西大学数信系教授　李世余

1993 年 4 月 26 日

目　　录

第一章 函　　数

习 题 一

(A)

集合及其性质与运算

1　按下列要求举例：

(1)　一个有限集体；　　(2)　一个无限集合；

(3)　一个空集合；

(4)　一个集合是另一个集合的子集。

解　(1)　例如 $A=\{x|x^2-1=0\}=\{-1,+1\}$ 是有限集合。

(2)　例如 $B=\{x|x=n^2,n$ 为正整数$\}$ 是无限集合。

(3)　例如 $C=\{x|x^2+1=0\}$ 是空集合。

(4)　例如 $D=\{1\},D\subset A,D$ 是是 A 的子集。

2　用集合的描述法表示下列集合：

(1)　大于 5 的所有实数集合；

(2)　园 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合；

(3)　抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 的交点集合。

解　(1)　设大于 5 的所有实数集合为 A，则 $A=\{x|x>5\}$。

(2)　设园 $x^2+y^2=25$ 内部的一切点的集合为 B，则

$B = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 25\}$。

(3) 设抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 点的交点的集合为 C，

则 $C = \{(x,y) | y = x^2, \text{且 } x - y = 0\}$

3 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根的集合；

(2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合；

(3) 集合 $\{x | |x - 1| \leqslant 5$ 的整数$\}$。

解法 先用题意给的描述集合中与 x 或与 x、y 有关的条件 $P(x)$ 或 $P(x,y)$，求出集合的元素，后列举表示集合，本题的 $P(x)$ 及 $P(x,y)$ 是方程及联立方程（或不等式）。

解 (1) 解方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$：$(x - 3)(x - 4) = 0$，得极 $x_1 = 3, x_2 = 4$，设(1)的集合为 A，则 $A = \{3,4\}$。

(2) 设所求的集合为 B，先解联立方程：$\begin{cases} y = x^2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$x(1 - x) = 0$，得解为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

故 $\beta = \{(0,0),(1,1)\}$

(3) 设所求集合为 C，先解求 $|x - 1| \leqslant 5$ 中的整数 $-4 \leqslant x \leqslant 6$，故集合 C 的元素为 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$。

于是 $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

4 下列集合哪些是空集合：

$A = \{x | x = 1 = 0\}$， $B = \{x | x^2 + 1 = 0, x$ 为实数$\}$

$C = \{x | x > 1$ 且 $x < 0\}$ $D = \{x | x > 0$ 且 $x < 1\}$

$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3$,x、y 均为实数$\}$

解法　先解集合描述法中的方程(组)或不等式组,有解者(无解者)则集合非空(空)集合

解　$A=\{x\mid x+1=0\}$,因 $x+1=0$ 的解为 $x=-1$,故 $A=\{-1\}\neq\varnothing$。

$B=\{x\mid x^2+1=0$,x 为实数$\}$,因 $x^2+1\neq0$,故 $x^2+1=0$ 无解,故 $B=\varnothing$。

$C=\{x\mid x>1$ 且 $x<0\}$,因 $x>1$ 且 $x<0$ 无公共部分,故 $C=\varnothing$。

$D=\{x\mid x>0$ 且 $x>0$ 且 $x<1\}=\{x\mid 0<x<1\}$,故 $D\neq\varnothing$。

$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3$,x,y 为实数$\}$,因单位园 $x^2+y^2=1$ 与直线 $x+y=1$ 不相交,故 $E=\varnothing$。

5　写出 $A=\{0,1,2\}$ 的一切子集。

解　(用子集定义)A 的子集有:$B=\varnothing\subset A$　$C=\{0\}\subset A$,$D=\{1\}$,$E=\{2\}\subset A$,$F=\{0,1\}\subset A$,$G=\{0,2\}\subset A$,$H=\{1,2\}\subset A$ 及 $A=\{0,1,2\}=A$。

6　如果 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{1,2\}$,下列各种写法,哪些是对的?哪些不对?

$$1\in A\quad 0\overline{\in}B\quad \{1\}\in A\quad 1<A\quad \{1\}<A$$

$$0<A\quad \{0\}<A\quad A=B\quad A\supset B\quad \varnothing\subset A\quad A\subset A$$

解法　用集合元素、子集及相等等记法去判断记法对否。

解　写法对的是:

$1\in A$　($\because A$ 中含有 1),$0\overline{\in}B$　($\because B$ 不含有 0)

$\{1\} \subset A$ （$\because \{1\}$ 是 A 的子集，即 $1 \in \{1\}, 1 \in A$）

$\{0\} \subset A$ （$\because 0 \in \{0\}, 0 \in A$） $A \supset B$ （$\because \forall a \in B$，有 $a \in A$）

$\varnothing \subset A$ （$\because$ 空集是任意集合的子集） $A \subset A$ （$\because$ 集合 A 是其子集）

不对的是：

$1 \subset A$ （$\because 1$ 是 A 的元素，不是子集） $0 \subset A$ （0 不是集合，更谈不上它是 A 的集子） $\{0\} \subset B$ （$\because 0 \in \{0\}$ 而 $0 \overline{\in} B$）

$A = B$ （$\because A \supset B$，而 A 不 $\subset B$）

7 设 $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,4,6\}$，求：

（1） $A \cup B$ （2） $A \cap B$ （3） $A \cup B \cup C$

（4） $A \cap B \cap C$ （5） $A - B$

解法 用集合 A、B 的并、交及差的定义。

（1） 已知 $A = \{1,2,3\}$；$B = \{1,3,5\}$，由并的定义，得

$$A \cup B = \{1,2,3\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,5\}$$

（2） 已知 $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}$，由交的定义，得

$$A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{\{1,3,5\} = \{1,3\}$$

（3） $A \cup B \cup C = \{1,2,3\} \cup \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\}$
$= \{1,2,3,5\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

（4） $A \cap B \cap C = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} \cap \{2,4,6\}$
$= \{1,3\} \cap \{2,4,6\} = \varnothing$

（5） $A - B = \{1,2,3\} - \{1,3,5\} = \{2\}$ （$\because 2 \in A$，而 $2 \overline{\in} B$）

8 如果 A 表示某单位会英语的人的集合，B 表示会日语的人的集合，那么，A'，B'，$A - B$，$(A \cup B)'$，$(A \cap B)'$ 各表示什么样人的集合？

解法　用集合 A、B 的补集 A'、B' 及差集 $A-B$ 的定义以及全集 $U=(A\cup B)$ 的定义。

解　设 U 表示某单位全部人的集合。

因　$A'=\{x|x\in U,且\ x\overline{\in}A\}$，即 A' 表示某单位不会英语的人的集合。

因　$B'=\{x|x\in U,且\ x\overline{\in}B\}$，故 B' 表示某单位不会日语的人的集合。

　　$A-B=\{x|x\subset A,且\ x\overline{\in}B\}$，故 $A-B$ 表示某单位会英语不会日语的人的集合。

因　$(A\cup B)'=\{x|x\in U,且\ x\overline{\in}A\cup B\}$，故 $(A\cup B)'$ 表示某单位不会英语或不会日语的人的集合。

因　$(A\cup B)'=\{x|x\in \overline{U},且\ x\overline{\in}A\cap B\}$，故 $(A\cap B)'$ 表示某单位英、日语均不会的人的集合。

9　如果 $A=\{x|3<x<5\}$，$B=\{x|x>4\}$，求：

(1)　$A\cup B$　　(2)　$A\cap B$　　(3)　$A-B$

解　(用集合并、交及差的运算)

(1) 因　$A\cup B=\{x|x\in A 或\ x\in B\}$，故 $A\cup B$

$=\{x|3<x<5 或\ x>4\}$

$=\{x|3<x<+\infty\}$

(2) 因　$A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$，故 $A\cap B$

$=\{x|3<x<5,且\ x>4\}$

$=\{x|4<x<5\}$

(3)　$A-B=\{x|3<x<5,且\ x\not>4,即\ x\leqslant 4\}$

$=\{x|3<x\leqslant 4\}$

10　如果 $A=\{(x,y)|x-y+2\geqslant 0\}$

$B=\{(x,y)|2x+3y-6\geqslant 0\}$

$$C=\{(x,y)\mid x-4\leqslant 0\}$$

在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域。

解法 $A\cap B\cap C$ 在几何图形上表示区域：在直线 $x-y+2=0$（即 $y=x+2$）的下方（含在该直线上），在直线 $y=-x+2$ 的上方（含在直线上）及在直线 $x=4$ 的左方（含在直线上），故作直线 $x-y+2=0$、$3x+3y-6=0$ 及 $x-4=0$，即可表示 $A\cap B\cap C$。

解 在 $x0y$ 坐标平面上作直线 $x-y+2=0$（即 $y=x+2$）、$2x+3y-6=0$（即 $y=-\frac{2}{3}x+2$）及 $x-4=0$（即 $x=4$），则分别在这三直线上及其下、上及左方的区域便表示集合 $A\cap B\cap C$（图如 1—1 所示）。

（注：方便作图表 $A\cap B\cap C$，变形：

$$A=\{(x,y)\mid x+2\geqslant y\}$$

$$B=\{(x,y)\mid y\geqslant -\frac{2}{3}x+2\}$$

$$C=\{(x,y)\mid x\leqslant 4\}）$$

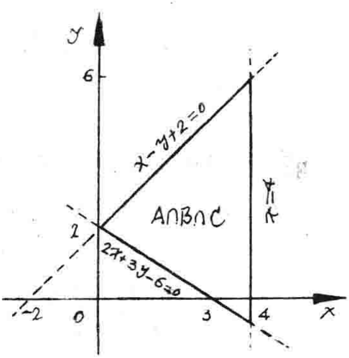


图 1—1

又解 $A\cap B\cap C$

$$=\{(x,y)\mid x-y+2\geqslant 0，且\ 2x+3y-6\geqslant 0，又且\ x-4\leqslant 0\}$$

故 $A\cap B\cap C$ 为满足联立二元不等式：

$$\begin{cases} x - y + 2 \geqslant 0 \\ 2x + 3y - 6 \geqslant 0 \\ x - 4 \leqslant 0 \end{cases} .$$

的一切点(x,y)构成的集合，几何上是由直线 $x - y + 2 = 0$、$2x + 3y - 6 = 0$ 及 $x - 4 = 0$ 构成的三角形（如图 1—1 所示）区域。

11　如果 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{1,2,3\}$，$B = \{2,4,6\}$，求：

(1)　A'　　(2)　B'　　(3)　$A' \cup B'$

(4)　$A' \cap B'$

解　（用补集定义及集合并、交的运算）

(1)　$A' = \{x | x \in U \text{ 且 } x \overline{\in} A\} = \{4,5,6\}$

(2)　$B' = \{x | x \in U \text{ 且 } x \overline{\in} B\} = \{1,3,5\}$

(3)　$A' \cap B' = \{4,5,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,3,4,5,6\}$

(4)　$A' \cup B' = \{4,5,6\} \cap \{1,3,5\} = \{5\}$

12　U、A、B 同第 11 题，验证 $A - B = A \cap B'$。

验证　$A - B = \{1,2,3\} - \{2,4,6\} = \{1,3\}$（$\because A - B = \{x | x \in 4, x \overline{\in} B\}$）

$A \cap B' = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3\}$

故　　$A - B = A \cap B'$

13　如果 A 是非空集合，下列各等式哪些是对的？哪些不对？

$A \cup A = A$　$A \cap A = A$　$A \cap A = \varnothing$　$A \cup \varnothing = A$

$A \cup \varnothing = \varnothing$　$A \cup U = U$　$A \cap U = A$　$A \cap \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$　$A - A = A$　$A - A = \varnothing$

解法　用集合并、交及差运算的性质（改过来）。

解　因　$A \cup A = \{x|x \in A$ 或 $x \in A\} = A$，故 $A \cup A = A$ 对。

因　$A \cap A = \{x|x \in A$ 且 $x \in A\} = A$，故 $A \cap A = A$ 对，

因　$A \cap A = A$ 对，而已知 $A \neq \varnothing$，故 $A \cap A = \varnothing$ 不对

因　$A \cup \varnothing = \{x|x \in A$ 或 $x \in \varnothing\} = \{x|x \in A\} = A$，

故　$A \cup \varnothing = A$ 对。

$A \cup \varnothing = \varnothing$ 错，例如 $A = \{1,2\}$，$\varnothing \subset A$　$A \cup \varnothing = A \neq \varnothing$

$A \cup U = \{x|x \in A$ 或 $x \in U\} = U$，故 $A \cup U = U$ 对。

$A \cap U = \{x|x \in A \subset U\} = A$，故 $A \cup U = A$ 对。

$A \cap \varnothing = A$ 不对，因 $A \neq \varnothing$，$\varnothing$ 不含元素、空集故

$A \cap \varnothing = A$ 不对。

$A \cap \varnothing = \varnothing$ 对。

$A - A = A$ 不对，例如 $A = \{1,2\}$，$A - A = \{x|x \in A$ 且 $x \bar{\in} A\} = \varnothing$

$A - A = \varnothing$ 对，上已推证。

14　已知集合 $A = \{a,3,2,4\}$，$B = \{1,3,5,b\}$，若 $A \cap B = \{1,2,3\}$，求 a 和 b。

解　(用集合交及相等的定义)

已知　$A = \{a,2,3,4\}$，$B = \{1,3,5,b\}$，又知 $A \cap B = \{1,2,3\}$

由　$1 \in \{1,2,3\}$ 得 $1 \in A = \{a,2,3,4\}$ 且 $1 \in \{1,3,5,b\}$

知得 $1 = a$，即 $a = 1$。

又由　$2 \in \{1,2,3\}$ 得 $2 \in A = \{a,2,3,4\}$ 且 $2 \in B = \{1,3,5,b\}$

故得　$2 = b$，即 $b = 2$。

15　调查了某地区100个公社，其中70个公社小麦亩产量在250公斤以上，以集合 A 表示这些公社；40个公社棉花亩产量在60公斤以上，以集合 B 表示这些公社；小麦亩产在250公斤以上而棉花亩产在60公斤以下的有55个公社。试用集合表示下列各类公社，并计算出各类公社的数目：

(1)　麦、棉两项亩产均达到上述指标的公社；

(2)　小麦亩产达到250公斤以上而棉花亩产在60公斤以上的公社；

(3)　麦、棉至少有一项达到上述指标的公社；

(4)　麦、棉两项均未达到上述指标的公社。

解　已知集合 A 表示小麦亩产在250公斤以上的公社，A 含有70个公社，集合 B 表示棉花亩产在60公斤以上的公社，B 含40个公社，设集合 C 表示小麦亩产在250公斤以上而棉花亩产在60公斤以下的公社，C 含有55个公社，U 表示某地区全部公社的集合，U 含公社100个。

(1)　设集合 D 表示麦、棉亩产均达到上述指标的公社，$D = A \cap B$，D 的公社数是 C 与 B 的公社数之差：$55 - 40 = 15$(个)。

(2)　设集合 E 表示小麦亩产未达到250公斤以上而棉花亩产在60公斤以上的公社：$E = A' \cap B$ 或 $E = B - A$，E 的公社数等于 B 的公社数减 D 的公社数：$40 - 15 = 25$(个)。

(3)　设集合 F 表示麦、棉至少有一项达到上述指标的公社，$F = A \cup B$，F 含的公社数是集合 C、D 是 E 含的公社数之和：$55 + 15 + 25 = 95$(个)。

(4)　设集合 G 表示麦、棉两项指标均未达到上述指标的

公社：

$$G = A' \cap B' \text{ 或 } G = (A \cup B)'$$

G 含的公社数目是全集合 U 的公社数与集合下的公社数之差：$100 - 95 = 5$(个)

16　如果 $A = \{a,b,c,d\}$，$B = \{c,d,e\}$，$C = \{d,e,f\}$，验证 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

验证法　把已知的 A、B、C 代入所验证的恒等式左右，验证所得的两个集合含相同的元素即得。

验证　把 $A = \{a,b,c,d\}$、$B = \{c,d,e\}$、$C = \{d,e,f\}$ 分别代入所验证的等式左、右两边，得

$$A \cap (B \cup C) = \{a,b,c,d\} \cap (\{c,d,e\} \cup \{d,e,f\})$$

$$= \{a,b,c,d\} \cap \{c,d,e,f\} = \{c,d\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{a,b,c,d\} \cap \{c,d,e\})$$

$$\cup (\{a,b,c,d\} \cap \{d,e,f\}) = \{c,d\} \cup \{d\} = \{c,d\}$$

故　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

17　用第 8 题的集合 A 与集合 B，验证摩根律。

验证法　把集合的并、交及补集定义用数学语言叙述，从而验证摩根律的左、右两边的集合表示的人全相同，故相等。

验证　已知 A 表示某单位会英语的人的集合，B 表示某单位会日语的人的集合，设 U 表示某单位的人的全集合。

验　(i)　$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = \{x \mid x \in U, x \overline{\in} A \cup B\} = \{x \mid x \in U, x \in A'$ 且 $x \in B'\}$ 表示某单位不会英语且不会日语的人的集合，

$A' \cap B' = \{x \mid x \in U, x \overline{\in} A$ 且 $x \overline{\in} B\} = \{x \mid x \in U, x \in A'$ 且 $x \in B'\}$ 表示某单位不会英语且不会日语的人的集