金榜

全新升级版

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题权威解析

数学三

SHUXUE LINIAN ZHENTI QUANWEI JIEXI (SHUXUESAN)

3

主编 李永乐 王式安

编委 "高数"：武忠祥 刘喜波
"线代"：李永乐 "概率论"：王式安

权威名师与命题专家联手打造 考试知识复习与能力培养并重
多角度讲解试题开拓解题思路 分析解答透彻易懂更有针对性
详尽地归纳总结典型解题方法 综合提高运用知识的分析能力

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

金榜

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题权威解析

数学三

SHUXUE LINIAN ZHENTI QUANWEI JIEXI (SHUXUESAN)

主编 李永乐 王式安

编委 "高数"：武忠祥 刘喜波
"线代"：李永乐 "概率论"：王式安

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学. 3/李永乐，王式安主编. —北京：海豚出版社，2011.12

ISBN 978-7-5110-0731-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①政治理论—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①D0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 276286 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，请读者注意识别。

书　　名：数学历年真题权威解析(数学三)
主　　编：李永乐　王式安
责任编辑：董锋　徐婵媛
出　　版：海豚出版社
网　　址：http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址：北京市百万庄大街 24 号
邮　　编：100037
电　　话：010-68997480(销售)
　　　　　010-68998879(总编室)
传　　真：010-68994018
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：18
字　　数：280 千字
版　　次：2012 年 3 月第 1 版
印　　次：2012 年 3 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5110-0731-5
定　　价：38.00 元

图书如有印装质量问题，请与印刷厂联系调换　　电话：(010)51906740

前言

从真题中你能够了解一个真实的考研数学，寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶，题目经典，又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律，全面提高解题能力，进而更好地驾驭考试，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合近10年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

历年来，研究生入学考试数学各学科知识点没有太大变化，而且各学科考查的重难点比较稳定，都是往年考试反复考查的内容，依据往年考题把握了这些重难点，我们就等于成功了一半。练真题，反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题，如何与没有考过的知识点结合起来考查，进而复习没有考过的知识点，这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了，也因此，真题能够最有效的暴露我们的不足和复习误区，提供更有效的复习思路和策略，甚至可以说，真题就是最好的“辅导老师”，它告诉我们考试会考什么，怎么考，反过来又指导我们思考如何应对，也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学，经过命题人的反复推敲，是市面上的练习题所无法比拟的，市面上的练习题，难易适中，命制科学，贴近考试要求的很少，做真题，反复揣摩，这能节省我们宝贵的复习时间，达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题，在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书将真题按考点所属内容分类并进行解析，各章编排如下：

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点，从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律，分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，给出相应的注意事项，对每一道真题都给出解题思路的分析，以便考生真正的理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题，只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心选取历年真题其他卷别的试题作为练习题，供考生练习，以

便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，练习题都配备了详细的参考答案和解析，以便考生遇到解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中，时刻想到将各个方面的知识融会贯通，做好知识的串联和总结，从而检验自己对问题的把握程度，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在网络上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。详情见“金榜教育网”首页(www.jinbangjiaoyu.com)。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2012 年 3 月

	2011 年	2010 年	2009 年	2008 年	2007 年	2006 年	2005 年
1	P44,14	P42,11	P46,17	P46,16	P43,12	P41,10	P39,6
2	P83,15	P111,5	P43,13	P72,4	P49,2	P51,4	P110,1
3	P103,3	P54,9	P59,15	P86,2	P71,3	P88,6	P87,4
4	P72,5	P35,1	P75,8	P94,3	P100,10	P161,2	P174,2
5	P165,3	P177,7	P167,6	P166,5	P66,22	P243,3	P237,4
6	P185,4	P195,4	P164,2	P201,5	P56,13	P261,1	P243,2
7	P245,7	P240,2	P237,3	P244,5	P176,5	P56,12	P60,16
8	P261,3	P240,3	P250,11	P256,4	P200,4	P48,1	P93,1
9	P51,5	P75,7	P36,2	P45,15	P236,1	P102,2	P102,1
10	P89,9	P83,14	P86,3	P74,6	P244,4	P110,2	P53,8
11	P53,7	P67,24	P104,4	P97,5	P39,7	P90,10	P61,18
12	P50,3	P55,10	P66,23	P111,4	P51,6	P175,4	P166,4
13	P199,2	P162,4	P191,1	P162,3	P88,7	P164,1	P175,3
14	P254,2	P261,2	P267,6	P254,1	P111,3	P239,1	P263,1
15	P37,3	P40,9	P90,11	P39,8	P169,7	P38,5	P38,4
16	P91,13	P97,6	P69,1	P88,8	P237,2	P94,2	P87,5
17	P70,2	P91,12	P95,4	P99,9	P55,11	P58,14	P98,7
18	P60,17	P80,11	P64,21	P76,9	P99,8	P83,13	P106,5
19	P101,11	P63,20	P113,7	P107,7	P62,19	P106,6	P79,10
20	P172,1	P184,3	P183,2	P181,1	P109,8	P178,8	P186,5
21	P196,6	P195,5	P198,1	P176,6	P187,6	P193,2	P199,3
22	P257,6	P251,13	P251,12	P249,10	P194,3	P255,3	P246,8
23	P252,14	P257,5	P244,6	P266,5	P247,9	P264,3	P263,2
24					P265,4		

目录

第一篇

第二篇

第三篇

第一篇

绝密★启用前

2012年全国硕士研究生入学统一考试
数学(三)

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字幕填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B)$(-1)^n(n-1)!$.

(C)$(-1)^{n-1}n!$. (D)$(-1)^n n!$.

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr=$

(A)$\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$. (B)$\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$.

(C)$\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$. (D)$\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dx$.

(4) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则

(A)$0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$. (B)$\dfrac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$.

(C)$1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2}$. (D)$\dfrac{3}{2}<\alpha\leqslant 2$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ (C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ (D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间(0,1)上的均匀分布，则 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=$

(A)$\dfrac{1}{4}$. (B)$\dfrac{1}{2}$. (C)$\dfrac{\pi}{8}$. (D)$\dfrac{\pi}{4}$.

(8) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为

(A)$N(0,1)$. (B)$t(1)$. (C)$\chi^2(1)$. (D)$F(1,1)$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}} =$ ________.

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\geqslant 1,\\ 2x-1, x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}} =$ ________.

(11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} =$ ________.

(12) 由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{BA}^*| =$ ________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C}) =$ ________.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

(17)（本题满分 10 分）

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000（万元）. 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$（万元／件）与 $6+y$（万元／件）.

（Ⅰ）求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）；

（Ⅱ）当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小成本；

（Ⅲ）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

(18)（本题满分 11 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}\quad(-1<x<1)$.

(19)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从参数为 1 的指数分布,记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$.

(Ⅰ)求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(Ⅱ)求 $E(U+V)$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题参考答案

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【分析】 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{x^2-1} = 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$

得 $y = 1$ 是曲线的一条渐近线且曲线没有斜渐近线

由 $\lim\limits_{x\to1} y = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \infty$ 得 $x = 1$ 是曲线的一条渐近线

由 $\lim\limits_{x\to-1} y = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$ 得 $x = -1$ 不是曲线的渐近线

所以曲线有两条渐近线,故应选(C).

(2)**【答案】** (A).

【分析】 由 $f(0) = 0$ 得 $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to0} \dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to0} \dfrac{(e^{\Delta x}-1)(e^{2\Delta x}-2)\cdots(e^{n\Delta x}-n)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to0}(e^{2\Delta x}-2)\cdots(e^{n\Delta x}-n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

故应选(A).

(3)**【答案】** (B).

【分析】 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则 $r = 2$ 所对应的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2^2$, $r = 2\cos\theta$ 所对应的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r^2) r dr$ 的积分区域

$$2\cos\theta < r < 2 ,\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

得在直角坐标下的表示为

$$\sqrt{2x-x^2} < y < \sqrt{4-x^2},\quad 0 < x < 2 ,$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r^2) r dr = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$. 故选 (B).

(4)**【答案】** (D).

【分析】 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛,且当 $n \to \infty$ 时, $\left|(-1)^n \sqrt{n} \sin \dfrac{1}{n^\alpha}\right| \sim \dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$,故 $\alpha - \dfrac{1}{2} > 1$,即 $\alpha > \dfrac{3}{2}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛知,$\alpha < 2$. 应选 (D).

【评注】 本题考查绝对收敛和条件收敛的性质,及 P- 级数的收敛性.

(5)**【答案】** (C)

【分析】 n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = 0$

显然 $$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关.

(6)**【答案】** (B)

【分析】 本题考查初等矩阵，由于 $\boldsymbol{P}$ 经列变换(把第 2 列加至第 1 列)为 $\boldsymbol{Q}$，有 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)$

那么
$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} &= [\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)]^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)] \\ &= \boldsymbol{E}_{21}^{-1}(1)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(7)**【答案】** (D)

【答案】 由题意得 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

$P\{X^2+Y^2 \leqslant 1\} = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 D 是单位圆在第一象限中部分所以根据二重积分的几何意义可知 $P\{X^2+Y^2 \leqslant 1\} = \frac{\pi}{4}$. 故选 D.

(8)**【答案】** (B)

【分析】 $$\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$$ 由正态分布的性质可知：$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}$ 均服从正态分布又两者相互独立，所以 $\dfrac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$ 的分布为 $t(1)$，

即 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布为 $t(1)$. 故选 B.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9.**【答案】** $\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$.

【分析】 该极限是 1^∞ 型.

$$\text{由} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x - 1)\frac{1}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \tan x\tan\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[x-\frac{\pi}{4}](1+\sin x\sin\frac{\pi}{4})}{-\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

得$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{-\sqrt{2}}$

(10)**【答案】** $\frac{1}{e}$

【分析】 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e}=f'(f(x))f'(x)\Big|_{x=e}=f'(\frac{1}{2})f'(e)=2\cdot\frac{1}{2e}=\frac{1}{e}$ 所以应填$\frac{1}{e}$

(11)**【答案】** $2dx-dy$.

【分析】 由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 以及 $z=f(x,y)$ 连续可得 $f(0,1)=1$,且

$f(x,y)-f(0,1)=2x-(y-1)+o(\sqrt{x^2+(y-1)^2})$, $(x\to0,y\to1)$.

由可微的定义得 $f'_x(0,1)=2,f'_y(0,1)=-1$,即

$$dz\Big|_{(0,1)}=f'_x(0,1)dx+f'_y(0,1)dy=2dx-dy.$$

应填 $2dx-dy$.

(12)$S=\int_0^2dy\int_{\frac{y}{4}}^{y}dx+\int_2^4dy\int_{\frac{y}{4}}^{\frac{4}{y}}dx=\frac{3}{2}+4\ln2-\frac{3}{2}=4\ln2$

(13)**【答案】** -27

【分析】 两行互换$\boldsymbol{A}$变成$\boldsymbol{B}$,所以$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$,再由行列式乘法公式及$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$立即有

$$|\boldsymbol{BA}^*|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}|^2=-27$$

或者,按题意

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\text{ 即 }\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$$

那么 $\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_{12}=3\boldsymbol{E}_{12}$

从而 $|\boldsymbol{BA}^*|=|3\boldsymbol{E}_{12}|=3^3|\boldsymbol{E}_{12}|=-27.$

(14)**【答案】** $\frac{3}{4}$

【分析】 $P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})},P(\overline{C})=1-P(C)=\frac{2}{3}$ $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$

因为A与C互不相容,即$AC=\varnothing$,即$P(AC)=0$,又$ABC\subset AC$,所以$P(ABC)=0$,代入原式得$P(AB\overline{C})=\frac{1}{2}$,故$P(AB\mid\overline{C})=\frac{3}{4}$.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)**【详解】** $$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}\cdot e^{2-2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{12x}$$

$$= \frac{1}{12}$$

(16)(本题满分 10 分)

【详解】 $\iint\limits_D e^x xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy\,dy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x(1-x^2)\Big|_0^1 + \int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} + xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(17)**【详解】** (Ⅰ)总成本函数 $C(x,y) = 10000 + 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2}$(万元).

(Ⅱ)由题意知,求 $C(x,y)$ 在当 $x+y=50$ 时下的最小值. 构造拉格朗日函数:

$F(x,y,\lambda) = C(x,y) + \lambda(x+y-50) = 10000 + 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2} + \lambda(x+y-50)$,

解方程组 $\begin{cases} F'_x = 20 + \frac{x}{2} + \lambda = 0, \\ F'_y = 6 + y + \lambda = 0, \\ x + y - 50 = 0. \end{cases}$ 得 $x = 24, y = 26$.

因可能极值点唯一，且实际问题存在最小值，故当总产量为 50 件时，甲乙两种产品的产量分别为 24，26 时可使总成本最小. 且此时投入总费用

$C_{\min}(x,y) = 10000 + 20\times 24 + \frac{24^2}{4} + 6\times 26 + \frac{26^2}{2} = 11118$ (万元).

(Ⅲ)甲产品的边际成本函数:$C'_x(x,y) = 20 + \frac{x}{2}$,于是,当总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本

$$C'_x(x,y) = 20 + \frac{24}{2} = 32 .$$

其经济意义为：当甲乙两种产品的产量分别为 24，26 时，若甲的产量每增加一件，则总成本增加 32 万元 .

(18)**【证明】** 记 $f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 1$,则

$$f'(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x,$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2} - 1 - \cos x.$$

当 $-1<x<1$ 时，由于 $\frac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4$，$1+\cos x\leqslant 2$，所以 $f''(x)\geqslant 2>0$，从而 $f'(x)$ 单调增加.

又因为 $f'(0)=0$，所以，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<$ 时，$f'(x)>0$，于是 $f(0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值.

从而当 $-1<x<1$ 时，$f(x)\geqslant f(0)=0$，即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}.$$

(19)【解】（Ⅰ）联立 $\begin{cases}f''(x)+f'(x)-2f(x)=0\\ f''(x)+f(x)=2e^x,\end{cases}$

得 $f'(x)-3f(x)=-2e^x$，因此

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{\int 3dx}\left(\int(-2e^x)e^{-\int 3dx}dx+C\right)\\&=e^x+Ce^{3x},\end{aligned}$$

代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$，得 $C=0$，所以

$f(x)=e^x$.

（Ⅱ）$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1,$$

$$y''=2x+2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

当 $x<0$ 时，$y''<0$； 当 $x>0$ 时，$y''>0$，又 $y(0)=0$，所以曲线的拐点为 $(0,0)$.

(20)【解】（Ⅰ）按第一列展开，

$$|\boldsymbol{A}|=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$$

（Ⅱ）当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 有可能有无穷多解，由（Ⅰ）知 $a=1$ 或 -1

(1) 如 $a=1$

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&-1&0&1&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right]$$

$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$ 方程组无解，舍去.

(2) 当 $a=-1$ 时

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$. 方程组有 ∞ 解，取 x_4 为自由变量，得方程组通解为

$$(0,-1,0,0)^T+k(1,1,1,1)^T,（k 为任意常数.）$$

(21)【解】（Ⅰ）因为 $r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换