

小学数学应用题解法分析

数学小博士系列丛书



4

+

8



河北教育出版社

数学小博士系列丛书

小学数学应用题解法分析

吕 岚 编著

河北教育出版社

数学小博士系列丛书
小学数学应用题解法分析
吕 岚 编著

河北教育出版社出版发行(石家庄市城乡街 44 号)
河北新华印刷一厂印刷

787×1092 毫米 1/32 9.5 印张 200 千字 1994 年 10 月第 2 版
1997 年 6 月第 4 次印刷 印数 31 301—46 300 定价 8.10 元

ISBN 7-5434-0389-7/G · 324

内 容 提 要

对应用题在解法上进行科学系统的分析,是学好应用题的关键。本书对组成题目里的已知条件首先进行数量关系的数理浅析,严格地区分各种题目的性质;强调了图形解析法,运用图解的直观性以加深读者的解题分析能力;着重于对解答应用题的几种基本解法的论述,特别对其中的分析法、假定法、分析综合法结合实例进行了论述,以利于读者掌握运用;为了提高读者解题能力,强调了一题多解的重要性;对于较重要的章节,总结了有关应用题常见的变化规律;在最后一章分类解法中,运用了以上解法分析诸点,巩固加深了所学知识。

内容通俗易懂,既有浅易的理论,又有较多实例。适用于小学高材生自学以及小学数学教师、师范学校的学生参考之用。

本书的编写,得到中国数学学会理事、天津市数学学会副理事长、天津师范大学副校长、原数学系系主任侯国荣教授的鼓励,在此深表谢意!

编者于天津市

代 序

吕岚同志是中国数学会天津分会的一名小学教师会员。

两年前,我与吕岚同志相识。那时,他正积极申请加入天津数学分会,他就是带着这本书的原稿来找我的。在我得知这册字迹极其工整的十余万字的油印本已编写了三年之久,几易其稿,并且从刻写、印刷到装订又完全出自他一人之手时,深为他严谨的治学态度和认真的工作作风所感动。吕岚同志虽然没有大学学历,但在中、小学校已工作了36年,对中、小学的数学教学尤其是对小学的数学教学有着丰富的经验,本书是他的经验总结,有他自己独特的思想,在取材和叙述方式上也有其独到之处,是一本较好的教学参考著作。

吕岚同志的这本书成稿在5年以前。最近,他要我为此书写一篇代序,于是我有机会再粗读本书的原稿,发现作者近两年来又做了许多有益的变动,甚至改写了部分章节,这种对读者负责,对工作精益求精的精神也是应该推崇的。

本书的编写意图和特点,作者在“内容提要”中已作了阐述,我作为一名数学工作者愿意在此向广大读者推荐,是出自以下原因:

1. 一名没有机会深造的小学教师,工作之余积极从事教学研究,从事写作,总结自己的教学经验;出版社的同志又予以极大的关注和帮助,这是应该大大称道的。
2. 用算术解应用问题,是小学数学教学中的一个难点,是

对小学生进行综合基本训练的一个重要内容,也是学习中等数学的基础。所以在这方面开展探索、研究工作,藉以交流经验、促进教学改革是非常有益的,应该予以肯定。

3. 本书的编写侧重于介绍方法,这对小学数学教学来说无疑是十分重要的。作者不是就题论法,而是从分析问题的数量关系入手,把问题分类,然后介绍基本解法;在编写上,也是从问题入手,经过分析,归纳出结论。这种注重对学生思维能力和分析问题能力的培养,是本书的一个特点。此外,本书提供的解法比较齐会,选题恰当,有理有例,便于自学、参考。读后既可加深对教科书局部内容的理解,又能统观全书,使知识更条理化、系统化。我想这不仅对普通小学、师范学校的师生有参考作用,就是对已掌握小学数学的其他读者来说,也是一本辅导孩子学习值得一读的参考书。

4. 小学教育是基础教育的一个组成部分,发展基础教育搞好小学教学改革,理应得到全社会的关心和重视。我在此仅表示我的一点支持。

我对小学数学教学工作是外行,上面这些话难免有不妥之处,欢迎大家指正。

最后,我以与作者同样之情感谢出版社为本书出版所给予的热情支持。

侯国荣

目 录

第一章 小学数学应用题的数理分析	(1)
第一节 应用题中数的关系	(1)
第二节 对应用题里数量关系的分析	(4)
第二章 小学数学应用题的图解法	(25)
第一节 线段图的科学性	(25)
第二节 网式图解法	(29)
第三节 几何图形解析法	(31)
第四节 线段图解法	(34)
第三章 四则应用题的基本解法	(38)
第一节 比较法	(38)
第二节 综合法	(39)
第三节 分析法	(41)
第四节 假定法	(45)
第五节 分析综合法	(49)
第六节 消元法	(53)
第四章 四则应用题的多解法	(57)
第一节 按基本解法去解答	(57)
第二节 按不同性质的问题去解答	(67)
第五章 几种应用题的基本变化形式及其解法	(80)
第一节 分数乘法的基本变化形式及其解法	(80)
第二节 分数除法的基本变化形式及其解法	(84)
第三节 求一个数是另一个数的百分之几的基本变化 形式及其解法	(92)

第四节	和倍、差倍、和差问题的主要变化形式及其解法	(94)
第五节	变倍、定倍问题的基本变化形式及其解法	(99)
第六节	行程问题的基本解法	(102)
第六章	几种四则应用题的基本解法	(106)
第一节	平均问题	(106)
第二节	归一问题	(112)
第三节	植树问题	(120)
第四节	还原问题	(126)
第五节	工程问题	(131)
第六节	和差问题	(140)
第七节	和倍问题	(149)
第八节	差倍问题	(158)
第九节	变倍、定倍问题	(169)
第十节	一般三类倍数问题	(179)
第十一节	行程问题	(208)
第十二节	盈亏问题	(228)
第十三节	鸡兔问题	(233)
习题参考答案		(243)

第一章 小学数学应用题的数理分析

第一节 应用题中数的关系

解答应用题首先要注意审题,所谓审题就是要求我们看清题目里的已知条件和提出的主要问题。要解出主要问题必须要认清题目里数的性质,然后辨析数与数之间的数量关系,列出解题的算式。在这里,第一步是辨析题目里数的性质。

在数量关系简单的题目里,数的性质比较容易被识破。在数量关系复杂的题目里,数的性质不能孤立地加以判断,必须综合已知条件里所有的数进行比较分析,最后才能肯定某个数的性质。请看下面的几个例子:

(1) 某学校,有男生 630 人,女生人数是男生的 $1\frac{2}{3}$ 倍。全校共有学生多少人?

(2) 红白两种糖共 1050 千克,红糖数量占白糖的 $\frac{2}{3}$,求红白糖各有多少千克?

(3) 青砖比红砖少 7000 块,青砖块数是红砖的 80%,求两种砖共多少块?

(4) 3 名工人 4 小时生产配件 8640 个。今用工人 7 名,生产这种配件 40320 个,这样需要用几个时?

第一题所叙及的 630 人是一个已知数。女生人数是男生

的 $1\frac{2}{3}$ 倍,这个数是用女生人数除以男生人数(630 人)得出的商,即女生人数与男生人数倍数比的关系。

第二题所叙及的红白两种糖共 1050 千克,这个数是两数和的关系。题中说红糖数量占白糖的 $\frac{2}{3}$,是以红糖数量除以白糖数量得出的倍数比的关系,即红白两种糖数量的比是 2 : 3 的关系。

第三题所叙及的青砖比红砖少 7000 块,这是两种砖块数间差的关系。青砖块数占红砖的 80%,这个数是用青砖的块数除以红砖块数得出的百分比的关系。

第四题所叙及的生产配件 8640 个,这个数是三个因数连乘所得出的积的关系,即以每人每小时生产的数量乘以 3,再乘以 4 得出的积,而 3 名和 4 小时都属于这个积的因数的关系。题中又提到的 7 名工人,系一个已知因数,想生产的 40320 个配件这个数,也是三个因数的连乘积的关系,即用原工效乘以 7,再乘以另外一个未知因数所得出的积的关系。

以上四题中的数的关系比较简单,数的性质容易被我们所识破。这些数不外乎是一个已知数、两个数和及两个数差,两个数之间的倍数比的关系以及几个因数与它们连乘所得出的积的关系。

以下的题目里的数的关系就较复杂了:

(1) 两城相距 624 千米,两汽车往返其间。甲汽车时速 48 千米,乙汽车时速 56 千米,今各从一城同时相向开出,各要行出多大的距离才能相遇?

(2) 甲时速 13 千米,乙时速 9 千米,两人于 S 城同时去 G 市。当甲抵 G 时,乙距离 G 仍有 72 千米。求 S、G 两城相距

几千米？

(3) 牛肉单价占猪肉的 $1\frac{1}{4}$ 倍。今某人买猪肉 5 千克，牛肉 4 千克，两种肉共付 80 元。求两种肉每千克各售多少元？

(4) 甲掘土机每小时掘土 72 立方米，乙掘土机每小时掘土 48 立方米。今乙机比甲机早工作 2 小时，完工时却比甲机共少掘土 96 立方米。两台掘土机各工作了几小时？

第一题里 624 千米这个数，是属于两组因数各自相乘所得出的一双乘积相加的和的关系。即是以一个已知因数 48 千米乘以相遇时间的积，加上另一个已知因数 56 千米乘以相遇时间的积所得出的乘积的和。两辆汽车的速度都是属于两个乘式中的被乘数的关系，对两个乘积来说它们都是因数的关系。

第二题所叙及的，当甲抵 G 时乙距 G 仍有 72 千米，这个数是属于两组因数各自相乘所得出的一双乘积相减所得差的关系。即是用甲速 13 千米乘以他行完全程所用时间的积为被减数，用乙速 9 千米乘以甲行完全程所用时间的积为减数，相减得出的乘积差的关系。甲速和乙速各属于两个乘式中一双被乘数的关系。

第三题所叙及的，牛肉单价占猪肉的 $1\frac{1}{4}$ 倍，这个数是以牛肉单价除以猪肉单价所得出的倍数比的关系。猪肉 5 千克，牛肉 4 千克这两个数都属于两组因数各自相乘式中的两个乘数的关系。题中说两种肉共付钱 80 元，这个数是属于两组乘式的积相加得出的乘积和的关系。

第四题所叙及的，72 立方米和 48 立方米是两组乘式中的两个被乘数的关系。乙掘土机比甲掘土机早工作的 2 小时，

这个数属于两个乘式中一双乘数相减所得出的差的关系。最后乙机比甲机共少掘土 96 立方米,这个数是两组乘式中一双乘积相减得出的乘积差的关系。

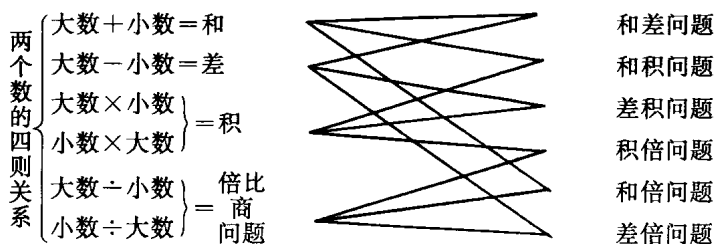
以上四题里的数较前四题里的数的关系较复杂。就所涉及到的数来分析,它们不外乎分属于两组因数各自相乘的乘法等式中一双被乘数和乘数的关系,一双乘积和的关系,一双乘积差的关系,一双相关因数相减得出差的关系,以及一双相关因数相除得出的倍数比的关系。

第二节 对应用题里数量关系的分析

从上节对应用题中数的关系分析得知,应用题中的数是多样性质的:除了单一的原数以外,都是由原数的和、差、积、商以及由两组因数各自相乘中的一双乘积的和、乘积的差这四则运算的结果,用其中的两个数或几个数互相搭配结合而构成的。今就组成倍数应用题里数的搭配关系列表如下,供读者参考。

组成倍数应用题的数理浅析

原 数	已知	a. 小数占大数的几分之几,求小数→分数乘法
		b. 是小数的几又几分之几倍,求小数→分数除法
	已知	a. 大数占小数的几又几分之几倍,求大数→分数乘法
		b. 是大数的几分之几,求大数→分数除法



从数理浅析图中不难看出,分数乘法、分数除法和求一个数是另一个数的几分之几,这三类应用题的组成与其它 6 类应用题是有区别的。这三类倍数应用题在题目已知条件里都含有一个或两个原数,这个原数在乘法中是题目里已知的标准数,在除法中是题目里未知的标准数,在倍比问题中有时出现一个,另一个常以与前一个数的和或差的形式出现。因为它们有这样的特点,所以人们通常称乘法应用题、除法应用题及倍比问题为“一般三类倍数应用题”,它们的主要的变化形式都恰有 12 种,它们是小学数学应用题的重要组成部分,也是本书编写的重点内容。

其它六种倍数应用题则不然,它们都是由原数的和、差、积、商(比)里的两个数结合而成的。例如和差问题是由原数间的和与两个数的差组成题目里的已知条件;和倍问题是由原数间的和与数与数之间的倍数比组成题目里的已知条件;差倍问题是由两个原数的差与数与数之间倍数比组成题目里的已知条件。至于和积、差积、积倍这三类倍数问题所以不列入小学研究的范围,是因为涉及到数的开方问题,到代数中可以列方程解答。

下面举例说明应用题中的数量关系

一、题目里包含着两个数,求的是相应的两个数之间倍数

比的关系:

(1) 六年一班有男生 24 人,女生 30 人。求男生比女生少几分之几? 女生比男生多几分之几?

(2) 一件农具原价 192 元,现在降低到 168 元。求降低原价的百分之几?

(3) 新华机床厂去年生产机床 6750 台,超过指标 500 台。求完成了百分之几? 超过指标百分之几?

(4) 和平中学去冬用煤 87 吨,实际上节约了 29 吨,求烧了百分之几? 节约了百分之几?

以上四题尽管取材不同,但从数量关系上分析却是属于同类应用题。这是因为第一题里所叙及的,男生 24 人和女生 30 人,这纯属一双原数。从提出的主要问题分析,都要求人数的差做为比较数,以差除以女生数得出的分率为第一问题,以差除以男生数得出的分率为第二问题。这两个主要问题都是求差各占不同标准数的分率的问题。第二题里所叙及的,原价 192 元系被减数,减去一个未知的减数,所得的差是 168 元。求的是所减少的这个数占原被减数的百分数,所以仍属于求百分比的问题。第三题里所叙及的去年产机床 6750 台,这个数系两个数和的关系,超过指标 500 台这个数,属于增加的数的关系。这得要求出第一个原加数这个标准数是几。所求的完成了百分之几或超额百分之几,都是求的和原计划的百分比,所以本题属于倍比问题。第四题所叙及的,去冬用煤 87 吨这个数,对原计划用煤量来说,可以看成减数,也可以看成差的关系,原计划数系被减数。实际节约的 29 吨这个数,可以看成差,也可以看成减数。不管是求烧了百分之几还是求节约了百分之几,都得求出原计划这个标准数,用组成原计划数的两

个分量做比较数,分别除以总量原计划数得出各占计划数的百分比。

以上四题都是求的一个数是另一个数的几倍、几分之几或百分之几,都是求的两个同类数量间倍数比的问题,我们把这类求倍数比的应用题通常简称为倍比问题。

二、题目里包含着已知的标准数以及数与数之间的倍数比的关系:

(1) 做一套成人制服,上身用布 2.8 米,下身比上身少用布 $\frac{1}{7}$ 。这样做 1200 套共用布几米?

(2) 家禽场里养鹅 320 只,养的鸭数比鹅多 75%,养的鸡数比鹅鸭之和多 $2\frac{1}{8}$ 倍。这个家禽场所养的三种家禽共多少只?

(3) 有三种粮食,已知玉米数量比大豆的 2 倍多 140 千克,稻谷数量比玉米又多出 3 倍。如果大豆有 630 千克,求三种粮食共有多少千克?

(4) 电线全长 720 米,第一次切下全长的 25%,第二次切下所余的 $\frac{4}{9}$ 。求切下的部分比余下的部分多出几米?

以上四题从取材上看虽是不相同的内容,但这只是一种表面现象,但每题的数量关系之间有它们的共同点。这是因为第一题里所叙及的,上身用布 2.8 米,对下身的用布量来说这个数是它的标准数。下身用布量比上身少 $\frac{1}{7}$,这个数是上身用布量 1 倍减去下身用布量占有上身的分率后所得的倍数比的差的关系。题中说做这样的制服 1200 套这个数,是与每套用布量相乘的关系。第二题里所叙及的,鹅有 320 只这个数是本

题标准数。鸭数比鹅数多 75% 这个数是鸭鹅只数比的百分率差的关系,这样可以求出鹅鸭数量的和。题里提及的鸡数比鹅鸭之和多 $2\frac{1}{8}$ 倍,这个数是以鸡数除以鹅鸭只数的和再减去鹅鸭只数之和的 1 倍所得出的倍数比差的关系。所以本题仍是属于求一个已知数的几倍的问题。第三题所叙及的大豆 630 千克这个数,是玉米数量计数的标准数。玉米数量比大豆的 2 倍多 140 千克,这是以玉米数量除以大豆数量商 2 余下 140 千克的意思。稻谷数量比玉米多 3 倍,这意味着稻谷的重量是玉米的 $1+3=4$ (倍)。所以本题仍属于求已知数的几倍的问题。第四题里叙及的电线全长 720 米这个数,系本题里的标准数。第一次切下全长的 25%,这个数是以第一次切的实长除以全长得出的百分比。第二次切所余的 $\frac{4}{9}$,这个数的计数的标准是全长的 $1-25\%=75\%$ 。用切下部分的和当被减数,余下部分当减数,减得差即为所求。所以本题仍是属于求已知数的几倍的问题。

以上四题都是属于求一个已知标准数的几倍、几分之几或百分之几是多少的应用题。

三、题目里包含着一个未知的标准数的倍数比及乘积的关系,求的是这个未知数:

(1) 一个奶牛场去年有奶牛 135 头,比前年增加了 $\frac{1}{8}$ 。求去年比前年增加了多少头?

(2) 袋中有米若干,吃去总数的 $\frac{7}{11}$ 。如果吃去的比余下的多 36 千克,求袋中原有米多少?

(3) 某人看书,上周看完全书页数的 $\frac{1}{4}$ 零 20 页,本周看

的页数比上周多 $\frac{1}{2}$,最后乘下全书页数的 $\frac{1}{6}$ 未看。求全书共有多少页?

(4) 一条电线,切下的部分比全长的 $\frac{1}{3}$ 少 6 米,如果余下的比切下的部分多 2 倍,求电线全长多少米?

以上四题尽管取材不同,但略加分析比较不难得知它们都是属于同种类型的题目。这是因为第一题里所叙及的 135 头这个数,是前年奶牛头数这个未知的因数乘以已知的 $1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ 这个因数所得的乘积的关系。第二题里所叙及的 36 千克这个数,也是一个乘积的关系,是袋中米这个未知的因数乘以 $\frac{7}{11} - \left(1 - \frac{7}{11}\right) = \frac{3}{11}$ 这个因数所得出的积的关系,即是一个未知数的 $\frac{3}{11}$ 等于 36 千克的意思。第三题中本周看的页数比上周的多 $\frac{1}{2}$,这意味着本周既看了全书页数 $\frac{1}{4}$ 的 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。又看了 20 页的 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 的意思。这两周共看的页数,既有全书页数的 $\frac{1}{4}$ 的 $\left(1 + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}$,即 $\frac{5}{8}$,又有 20 页的 $\left(1 + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}$,即 50 页。分析得知 50 页是一个乘积,它是用未知的全书页数做为一个因数,乘以 $\left(1 - \frac{5}{8} - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{24}$ 的积的关系。第四题里所叙及的,切下的部分比全长的 $\frac{1}{3}$ 少 6 米,假定多切 6 米,则切下的部分恰占全长的 $\frac{1}{3}$ 。如果余下的部分仍要保持切下部分增 6 米后的 $1 + 2 = 3$ (倍),则要相应