经济数学系列教材

Calculus

微积分（一）

邹玉仁 万建香 严淑梅 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

经济数学系列教材

微积分(一)

Weijifen

邹玉仁　万建香　严淑梅　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书根据“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，以培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才为指导思想，结合编者多年的教学实践经验，系统介绍了微积分中微分部分的知识。

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、多元函数微分学。本书力求做到深入浅出、通俗易懂、突出重点、循序渐进。各章有学习目标和学习要点，各节后一般都有小结，本书附有部分练习与习题参考答案。

本书可以作为高等学校经济管理类专业微积分课程的教材和全国硕士研究生入学统一考试的教学参考书，也可供工科各专业参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分. 1 / 邹玉仁，万建香，严淑梅编著. －北京：高等教育出版社，2012. 9

ISBN 978－7－04－035801－8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①邹… ②万… ③严… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 181451 号

策划编辑	胡 颖	责任编辑	张长虹	特约编辑	董达英	封面设计	赵 阳
版式设计	马敬茹	插图绘制	黄建英	责任校对	殷 然	责任印制	韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	天津新华二印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18. 25	版　　次	2012 年 9 月第 1 版
字　　数	320 千字	印　　次	2012 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	26. 90 元

物 料 号 35801－00

前　言

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，遵照大学数学教学改革的精神，结合编者多年的教学实践经验编写而成的。

在编写过程中，我们始终坚持如下特色：

1. 注重学科的基础。作为经济数学教材，我们在保持数学学科的科学性、系统性的同时，适当弱化或略去了一些基本性质和定理证明的繁琐推理，注重基本知识、基本技能、基本方法的训练以及实际应用能力的培养，力求做到深入浅出、通俗易懂、突出重点、循序渐进。

2. 注重学生学习的可持续发展和进一步深造的需要。例题和习题选用基础、适中、综合提高三类题目，对有一定难度的习题加注了*号。

本书可作为高等院校经济管理类专业微积分课程的教材和全国硕士研究生入学统一考试的教学参考书，也可供工科各专业参考使用。

本书由江西财经大学信息管理学院教师邹玉仁、万建香和严淑梅编著。邹玉仁编写第2章、第3章，万建香编写第1章、第5章，严淑梅编写第4章。

衷心感谢柳键教授，感谢他在百忙之中抽出宝贵的时间认真阅读原稿，并提出宝贵的意见。衷心感谢数学系全体老师为本书编写提供的意见和帮助。

编者一直从事数学教学工作，在教学中使用过不少教材。如同济大学数学系编写的《高等数学》(第五版)，中国人民大学朱来义主编的《微积分》(第三版)，江西财经大学自编的《微积分》和外文原版教材：《Thomas' Calculus》(George B. Thomas)(影印版)(高等教育出版社)，《Calculus》(James Stewart)(影印版)(高等教育出版社)。这些优秀教材对于编者的教学方法有着重要的影响，同时也是编写本书的参考书，在此向这些教材的作者表示衷心感谢。

由于水平有限，书中可能存在疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2012年3月

目　　录

第1章 函 数

学习目标

1. 掌握基本初等函数的性质与图像特点；
2. 理解初等函数的概念及其基本性质；
3. 掌握重要的分段函数的形式及其性质；
4. 熟练掌握函数的复合运算及反函数的求解；
5. 了解函数在经济领域的常见应用.

学习要点

区间和邻域；函数的概念；函数定义域的求法；函数表示法；函数的几何特性(函数的奇偶性、周期性、有界性)；基本初等函数；复合函数；反函数；初等函数；分段函数；经济函数介绍(需求函数、供给函数、市场均衡、成本函数、收益函数、利润函数、库存函数).

导言

出于社会实践和各门学科自身发展的需要，到了16世纪，物理学中对运动的研究成为自然科学的中心问题. 与之相适应，数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个新的时代，即变量数学的时代，作为在运动中变化的量(变量)及它们之间的依赖关系的反映，数学中产生了变量和函数的概念.

数学的一项重要任务，就是要找出反映各种实际问题中变量的变化规律，即其中所蕴涵的变量之间的函数关系. 函数是数学中最基本的概念之一，微积分研究函数的一些局部和整体的性态. 本章介绍函数的一般概念，函数的几种常见的表示方式，最基本的函数类——初等函数，函数的性质，以及经济学中几种常见的函数.

1.1　函数及其性质

在微积分中，用得最多的数集是区间和邻域，而函数则是定义在某个区间上，后面对函数的讨论则经常是在定义区间内的某个邻域内讨论该函数的性质. 下面将逐一对区间、邻域、函数及其性质展开讨论.

一、区间和邻域

1. 区间

设 a，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$.

（1）数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为以 a，b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

（2）数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a，b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

（3）数集 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$（或 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$）称为以 a，b 为端点的半开半闭区间，记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$，即

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},\quad [a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

以上的区间都是有限区间，$b-a$ 称为这些区间的长度.

除此之外，还有无限区间. 为了方便起见，引入两个记号“$+\infty$”（读作正无穷大）和“$-\infty$”（读作负无穷大）.

（4）$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$，$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$；

（5）$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；

（6）$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，即全体实数的集合.

2. 邻域

除了区间的概念外，为了阐述函数的局部性质，还常用到邻域的概念，它是由某点附近所有的点组成的一个集合.

设 a 是任一实数，即数轴上的一个点，以 a 为中心的任意一个开区间称为点 a 的一个邻域，记作 $U(a)$. 将 $U(a)$ 中去掉 a 所得的集合记作 $U_0(a)$，称为 a 的去心邻域.

对任一正数 δ，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 是 a 的一个邻域，如图(1－1(a))，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\};$$

类似地，将 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉的数集称为 a 的空心邻域，记作 $U_0(a,\delta)$，（如图(1－1(b))，即

$$U_0(a,\delta) = (a-\delta,a) \cup (a,a+\delta).$$

图 1－1

为说明函数在点的某一侧附近的情况，还要用到左、右邻域的概念. 开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

二、函数的概念

函数，是微积分也是数学当中最基本的概念之一.

在同一个自然现象或者技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系着并且遵循一定的变化规律.

例 1－1　在力学中，质量为 m，速度为 v 的物体所具有的动能

$$E = \frac{1}{2}mv^2.$$

在电学中，强度为 I 的电流通过电阻为 R 的导体时，单位时间内所产生的热量

$$Q = \frac{1}{2}RI^2.$$

此外，在几何中半径为 r 的圆的面积 $S=\pi r^2$.

这些式子虽然具体的背景不同，但在数学中，这些式子都有一个相同的抽象表达式

$$y = kx^2.$$

这种关系给出了一个对应法则，当其中一个变量在某一变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的值与之对应，这种两个变量之间的对应规则称为函数关系. 数学的一个特点就是它的高度的抽象性，随之也就使数学具有了应用的广泛性.

下面给出函数的一般定义.

定义 1－1　已知变量 x 与变量 y，若变量 x 在某非空集合 D 内任取一个确定的值时，变量 y 按照一定的对应规则有唯一确定的值与 x 的值相对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

函数 f 可以表示为 f：$D\to Z$. 通常简单地表示为

$$y = f(x) \quad (x \in D).$$

x 称为自变量，它的取值范围 D 称为该函数的定义域. y 称为因变量，它的取值范围称为函数的值域，用 Z 表示，"f"称为对应法则.

函数的对应法则 f 和定义域 D 是构成函数的两个基本要素，在给出一个函数时，必须同时给出定义域和对应法则，两者缺一不可，否则就不能构成函数. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则称这两个函数是相同的函数，否则它们就是不同的函数.

例 1-2　判断下列各组函数是否为相同函数：

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$；　　(2) $y=\lg x^3$ 与 $y=3\lg x$；

(3) $y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　　(4) $y=\sin x$ 与 $s=\sin t$.

解　(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 是相同的函数，因为前、后两者的定义域都为 $(-\infty, +\infty)$，两个函数的对应法则也相同，都是 $y=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(2) $y=\lg x^3$ 与 $y=3\lg x$ 是两个相同的函数，因为前、后两者的定义域都为 $(0, +\infty)$，且当 x 给定时，前后两者的 y 值相同，即对应法则相同.

(3) $y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是两个不同的函数，因为当 $x<0$ 时，前者对应规则为 $y=x$，后者的对应法则为 $y=-x$，两者的对应法则并非完全相同.

(4) $y=\sin x$ 与 $s=\sin t$ 是相同的函数，因为两者的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$，且对应法则相同.

1. 函数定义域的求法

根据需要使函数表达式有意义，即

(1) 分式的分母不为零；

(2) 负数不能开偶次方；

(3) 对数的底是非 1 的正数，真数必须大于零；

(4) 对于 $y=\tan x$，$y=\sec x$，$x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$；对于 $y=\cot x$，$y=\csc x$，$x \neq k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$；

(5) 对于反正弦函数 $y=\arcsin x$ 和反余弦函数 $y=\arccos x$，$|x| \leqslant 1$.

按以上要求分别求出自变量 x 的取值范围；若以上几种情况同时出现在同一表达式中，则先分别求出每组自变量的取值范围，再取这些取值范围的交集即为函数的自然定义域，简称定义域.

例 1-3　求函数 $y=\sqrt{x^2+x-2}+\sin\sqrt{x}$ 的定义域.

解　由题意知

$$\begin{cases}x^2+x-2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -2,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

两者求交集得 $x\geqslant 1$，即定义域 $D=[1,\ +\infty)$.

例 1－4　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}+\tan x$ 的定义域.

解　由题意知

$$\begin{cases}3-x>0,\\ \lg(3-x)\neq 0,\\ 49-x^2\geqslant 0,\\ x\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x<3,\\ x\neq 2,\\ -7\leqslant x\leqslant 7,\\ x\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

公共部分为 $-7\leqslant x<2$ 或 $2<x<3$，且 $x\neq\dfrac{-3\pi}{2},\ \dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}$，即定义域为

$$D=\left[-7,\ -\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},2\right)\cup(2,3).$$

2. 函数值

当自变量 x 取某一值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值 $f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f(x)\big|_{x=x_0}=f(x_0)$.

例 1－5　设 $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

解　因为 $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$，将 $f(x)$ 中 x 用 $f(x)$ 代入可得

$$f[f(x)]=\frac{1}{2f(x)+1}=\frac{1}{2\dfrac{1}{2x+1}+1}=\frac{2x+1}{2x+3}.$$

将 $f(x)$ 中的 x 用 $f[f(x)]$ 代入可得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{2f[f(x)]+1}=\frac{1}{2\dfrac{2x+1}{2x+3}+1}=\frac{2x+3}{6x+5}.$$

例 1－6　已知$f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{x-1}{x-2}$，求$f(x)$.

解　令$t=\dfrac{1}{1-x}$，反解得：$x=1-\dfrac{1}{t}$，将其代入已知条件得

$$f(t)=\frac{1-\dfrac{1}{t}+1}{1-\dfrac{1}{t}-2}=\frac{1}{1+t},$$

即

$$f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

3. 函数表示法

常用函数表示法有以下三种：

（1）列表法　将一系列自变量的值与对应的函数值列成表，表示自变量与因变量的对应关系，这种表示函数的方法称为函数的列表法.

（2）图示法　用坐标系中的图形表示函数的方法称为函数的图示法. 图示法的优点是形象、直观，但是，用图示法表示的函数也不便于作理论研究.

（3）公式法　用数学公式表示函数的方法称为函数的公式法. 由于公式法便于对函数作理论分析，所以在微积分中，表示函数主要用公式法，同时也用列表法和图示法作为辅助.

在应用公式法表示函数时，函数的表达式主要有两种：显函数和隐函数. 隐函数将在第 3 章介绍. 函数表达式$y=f(x)$称为函数的显式或显函数. 因为这时变量的关系非常明显，因变量y在等号的左边，自变量x和所有运算符号在等号的右边，并且在函数定义域内任给一个x值，只需经过关于x的数学运算，便可得到对应的y值.

这里，介绍两个不太常见的函数，尽管也存在解析式，但表达式较为特殊. 它们对于数学本身的发展意义重大，而且在工程方面的应用较为广泛.

如定义在 R 上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

又如定义在[0，1]上的黎曼(Riemann)函数

$$D(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}(p,q\text{ 为正整数},\dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}),\\ 0, & \text{当 } x=0,1\text{ 和无理数}.\end{cases}$$

三、函数的一些几何特性

1. 函数的奇偶性

定义 1-2　设函数$f(x)$的定义域D是关于原点对称的区间.

1）如果对于任意$x\in D$，都有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；

2）如果对于任意$x\in D$，都有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于y轴对称，如$y=x^2$(图 1-2)，奇函数的图形关于原点对称，如$y=x^3$(图 1-3).

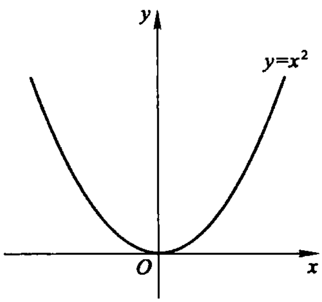

图 1-2

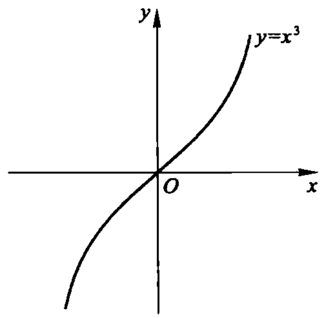

图 1-3

奇函数和偶函数仅仅是函数中的一类特殊的函数. 多数情形下，函数并不具有奇偶性，但是任意一个定义在$(-a,\ +a)$上的函数$f(x)$都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和. 事实上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

则读者容易验证，$f_1(x)$是偶函数，$f_2(x)$是奇函数，并且

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

例 1-7　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$；　　(2) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$；　　(4) $f(x)=\sin x+x^2$.

解　(1) 因为$f(-x)=\ln\left(\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}\right)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数.

（2）因为

$$f(-x)=\ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\ln\frac{1-x}{1+x}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x),$$

所以$f(x)$为奇函数.

（3）因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg\left[\sqrt{1+(-x)^2}-(-x)\right]=\lg(\sqrt{1+x^2}+x)\\&=\lg\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\lg(\sqrt{1+x^2}-x)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以$f(x)$为奇函数.

（4）因为$f(-x)=-\sin x+x^2$，既不等于$f(x)=\sin x+x^2$，也不等于$-f(x)=-\sin x-x^2$，所以$f(x)$为非奇非偶函数.

2. 函数的周期性

定义1-3　如果存在正数T，使得函数$f(x)$对定义域内任意x，恒有$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，T称为函数的周期. 如果这样的正数有多个，则T取其中最小的，此时T为最小正周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

$y=\sin x$，$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$都是以π为周期的周期函数.

例1-8　设函数$f(x)$为偶函数，$f(x-2)$为奇函数，证明$f(x)$为周期函数，并求其周期.

证明　因为$f(x-2)$为奇函数，所以$f(-x-2)=-f(x-2)$.

因为$f(x)$为偶函数，所以$f(-x-2)=f[-(x+2)]=f(x+2)$. 从而有

$$-f(x-2)=f(x+2)$$

令$x-2=t$，即$x=t+2$，将其代入得

$$f(t+4)=-f(t),$$

于是

$$f(t+8)=f[(t+4)+4]=-f(t+4)=-[-f(t)]=f(t),$$

即$f(x+8)=f(x)$. 故$f(x)$为周期函数，且周期为$T=8$.

3. 函数的有界性

定义1-4　设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正常数M，使得对(a,b)内的一切x，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在(a,b)内有界，否则称为无界.

4. 函数的单调性

定义 1-5 函数 $f(x)$ 对区间 (a, b) 的任意两点 x_1 和 x_2 当 $x_1 < x_2$ 时，

1）如果 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 单调增加，(a, b) 称作 $f(x)$ 的单调增加区间；

2）如果 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 单调减少，(a, b) 称作 $f(x)$ 的单调减少区间.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数，单调增加区间与单调减少区间统称为单调区间.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向上升（图 1-4）；单调减少函数的图形沿 x 轴正向下降（图 1-5）.

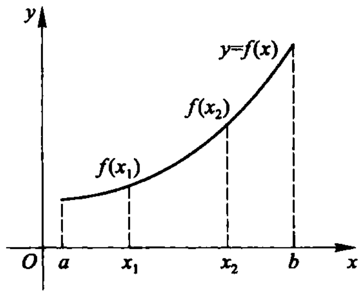

图 1-4

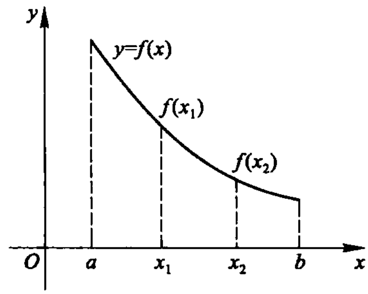

图 1-5

例 1-9 函数值在整个定义域都是单调增加（减少）的，才能称其为单调函数，否则就不是单调函数. 例如，函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 是单调减少的，在 $(0, +\infty)$ 是单调增加的，于是它在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

四、反函数

定义 1-6 设函数 $y=f(x)$，$y \in Z$，如果 Z 中每一个 y 值，都可以从 $y=f(x)$ 唯一确定一个 x 的值，那么以 y 为自变量、x 为因变量的函数就称作 $y=f(x)$，$x \in D$，$y \in Z$ 的反函数，记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in Z, \quad x \in D.$$

相应地，$y=f(x)$ 称作直接函数，显而易见，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

习惯上以 x 表示自变量，以 y 表示因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数常写作 $y=f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图

形关于 $y=x$ 对称(图 1-6).

注意：函数 f 有反函数，意味着其定义域 D 与值域 $f(D)$ 之间具有一一对应关系，因此单调函数必有反函数，且递增(减)函数的反函数也必定是递增(减)的.

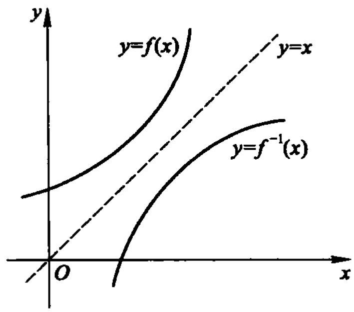

图 1-6

定理 1-1(反函数存在定理)　函数 $y=f(x)$ 在区间内存在反函数的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在该区间内一一对应.

定理 1-2　若函数 $y=f(x)$ 在区间内单调，则函数 $y=f(x)$ 在该区间内存在反函数.

例 1-10　求函数 $f(x)=\ln x$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$，即 $y=\ln x\,(x>0)$.

由上式可解出 x，得

$$x = e^y \quad (y \in \mathbf{R}).$$

再改写得 $y=e^x\,(x\in\mathbf{R})$，因此，原有函数的反函数 $f^{-1}(x)$ 为

$$y = e^x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

例 1-11　求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -3\leqslant x<0, \\ x^2-9, & 0\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$，即

$$y = \begin{cases} x^2, & -3 \leqslant x < 0, \\ x^2 - 9, & 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

当 $-3\leqslant x<0$ 时，$0<y\leqslant 9$，从 $y=x^2$ 解出 x，得 $x=-\sqrt{y}$，$0<y\leqslant 9$.

当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，$-9\leqslant y\leqslant 0$，从 $y=x^2-9$ 解出 x，得 $x=\sqrt{y+9}$，$-9\leqslant y\leqslant 0$.

综上可得

$$x = \begin{cases} -\sqrt{y}, & 0 < y \leqslant 9, \\ \sqrt{y+9}, & -9 \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

改写成

$$y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 9, \\ \sqrt{x+9}, & -9 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

故原有函数的反函数 $f^{-1}(x)$ 为

$$y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 9, \\ \sqrt{x+9}, & -9 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

注意：函数

$$y=\begin{cases}x^2, & -3\leqslant x<0,\\ x^2-9, & 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

存在反函数(因为其在定义域内一一对应)，但并非单调.

五、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数共有六大类：常数函数、幂函数、指数函数、对角函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数 $y=c$ (c 为常数)

定义域是$(-\infty, +\infty)$，它的图形是平行于 x 轴而且在 y 轴上的截距为 c 的一条直线(图 1-7).

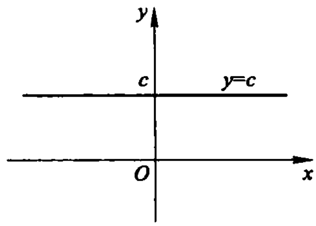

图 1-7

(2) 幂函数 $y=x^a$ (a 为常数)

定义域随 a 的值不同，但不论 a 为何值，$y=x^a$在$(0, +\infty)$总有定义，且图形通过点(1, 1)(图 1-8(a), (b))，如 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$，$y=x^{-1}$都是幂函数.

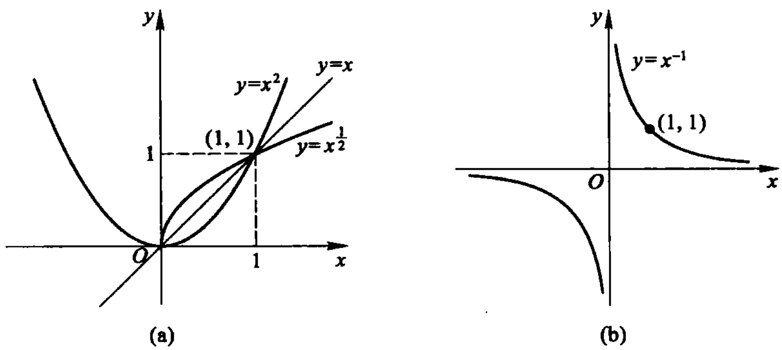

图 1-8

(3) 指数函数 $y=a^x$($a>0$, $a\neq1$)

定义域$(-\infty, +\infty)$，图形全在 x 轴上方且通过(0, 1)点. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少(图 1-9). 如 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=e^x$($e=2.718\ 28$)都是指数函数.