GAOKAO FUXI CONGSHU

SHUXUE

XITIJIEDA

高考复习丛书

数学

习题解答

湖北人民出版社

高考复习丛书

数学习题解答

湖北省教育学院教学教材研究室编

湖北人民出版社

高考复习丛书
数学习题解答
湖北省教育学院教学教材研究室编
*
湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行
武汉市江汉印刷厂印刷
787×1092毫米32开本 15.5印张 356,000字
1981年1月第1版 1981年1月第1次印刷
印数 1—156,900
统一书号：7106·1571 定价：1.07元

说　明

本书系高考复习丛书《数学》一书的习题解答，供教师辅导学生参考。

许多数学习题有多种解法，由于时间短促，一般都只给出了一种，且不一定是最好的。

对其中可能存在的一些缺点和错误，请同志们批评指正。

本书由我室主编，参加编写工作的有王祖祥、朱泽俭、江仁俊、汪茂星、刘恒发、郑隆炘、周世俊、罗祖楠、张易琨、谈家栋、舒鹏飞、樊恺等同志，参加审查修改工作的有王祖祥、周世俊、张易琨、樊恺等同志。在编写过程中，得到武汉市教育学院、荆州、襄樊市、黄石市、宜昌市、恩施、郧阳、襄阳等地市教研室领导和本学科教研员的支持，在此一并致谢。

湖北省教育学院教学教材研究室

一九八〇年十一月

目　　录

第一编　代　　数

第二编　平面几何

第三编　空间图形

第四编　平面三角

第五编　平面解析几何

说明：高考复习丛书《数学》一书中的个别习题或习题答案，如与本书有异者，则以本书习题、答案为准。

第一编　代　　数

习　题　1—1

1.在复数范围内，设1的四次方根的集合为A，1的十二次方根的集合为B：（1）写出A的全部元素；（2）证明$b=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\in B$。

解：（1）设$a\in A$，则$a^4=1$，故得：

$$(a-1)(a+1)(a-i)(a+i)=0,$$

$$A=\{\pm1,\ \pm i\}。$$

（2）$\because b=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，

$$\therefore b^{12}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12}$$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi=1,$$

$$\therefore b=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\in\beta。$$

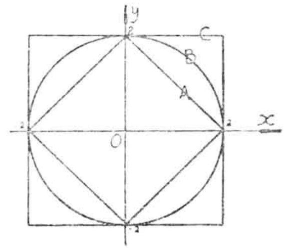
2.指出下列集合间的包含关系，并在直角坐标平面上作出图示：

$$A=\{(x,\ y)\,|\,|x|+|y|<2\},$$

$$B=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<4\},$$

$$C=\{(x,y)\,\big|\,|x|\leqslant 2,\ |y|\leqslant 2\}。$$

解：$A\subset B\subset C$，如下图所示：



圆内接正方形内的点集为A，圆内的点集为B，圆外切正方形和边界上的点集为C。

3．试证：{线段AB的中垂线上一切点}$=\{P\,|\,P$是平面上的点，且$|PA|=|PB|\}$。

（证法与例2类似，这里从略）

4．试证：$A\cap\overline{A}=\phi$；$A\cup\phi=A$；$A\cup\overline{A}=I$。

证：设$x\in A\cap\overline{A}\Rightarrow x\in A$且$x\in\overline{A}\Rightarrow x\in A$且$x\overline{\in}A$，矛盾。因此$A\cap\overline{A}$中没有任何元。故据空集定义知$A\cap\overline{A}=\phi$。

由于空集中没有任何元，因而$A\cup\phi$中的元与A中的元完全一样，故据集的相等定义知$A\cup\phi=A$。

由全集定义，$A\cup\overline{A}\subseteq I$．反之，设$x\in I$，则当$x\in A$时，$x\in A\cup\overline{A}$；当$x\overline{\in}A$时，$x\in\overline{A}$，亦有$x\in A\cup\overline{A}$，因此总有$I\subseteq A\cup\overline{A}$．证毕。

5．取全集为坐标平面上的点集，若

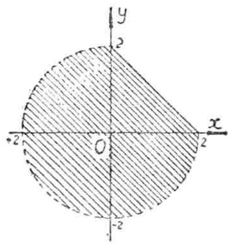
$A=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<4\}$，

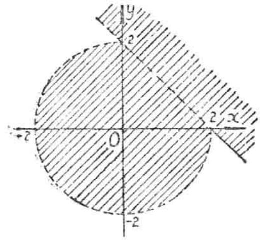
$B=\{(x,\ y)\,|\,x+y>2\}$，

试用图象表示集合：（1）$A\cup B$；（2）$A\cap\overline{B}$。

解：（1）$A\cup B$如下面的左图中阴影部分所示；

（2）$A\cap\overline{B}$如右图中的阴影部分所示。





6．设$A=\{x\mid x=4k,\ k\in J\}$，$B=\{x\mid x=6k,\ k\in J\}$，求$A\cap B$。

解：$\because$4与6的最小公倍数为12，

$\therefore A\cap B=\{x\mid x=12k,\ k\in J\}$。

7．设$A=\{$30的所有质因数$\}$，$B=\{$42的所有质因数$\}$，$C=\{$30与42的最小公倍数的所有质因数$\}$，$D=\{$30与42的最大公约数的所有质因数$\}$：（1）求出A、B、C、D；（2）$A\cup B$与C的关系怎样？（3）$A\cap B$与D的关系怎样？

解：（1）$A=\{2,\ 3,\ 5\}$，$B=\{2,\ 3,\ 7\}$，$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$D=\{2,\ 3\}$；

（2）$A\cup B=C$；

（3）$A\cap B=D$。

8．设全集$I=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$A=\{a\mid a=3x,\ x\in I\}$，$B=\{b\mid b=3x-1,\ x\in I\}$，$C=\{c\mid c=3x-2,\ x\in I\}$，求$A\cup B$；$A\cap B$；$\overline{A}$；$A\cup B\cup C$；$\overline{B\cup C}$。

解：$\because A=\{3,\ 6,\ 9\}$，$B=\{2,\ 5,\ 8\}$，$C=\{1,\ 4,\ 7\}$，

$\therefore A\cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$；$A\cap B=\phi$；

$\overline{A}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$；

$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}=I$；

$\overline{B \cup C} = \overline{\{1,2,4,5,7,8\}} = \{3, 6, 9\} = A$。

9. 设不等式 $f(x)>0$ 的解集为 A，$g(x)>0$ 的解集为 B，则不等式组 $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases}$ 的解集为 $C = A \cap B$。

证：$x_0 \in C \Longleftrightarrow f(x_0)>0$ 且 $g(x_0)>0 \Longleftrightarrow x_0 \in A$ 且 $x_0 \in B \Longleftrightarrow x_0 \in A \cap B$。证毕。

10. 设方程 $f(x)=0$ 的解集是 A，$g(x)=0$ 的解集是 B，且 $f(x)$、$g(x)$ 在 $A \cup B$ 上均有意义，则方程 $f(x) \cdot g(x)=0$ 的解集是 $A \cup B$。

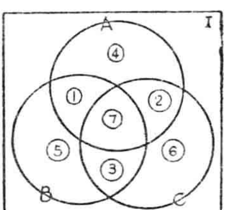
证：方程 $f(x) \cdot g(x)=0$ 的解集以 C 记元，则有：

$x_0 \in C \Longleftrightarrow f(x_0) \cdot g(x_0)=0 \Longleftrightarrow f(x_0)=0$ 或 $g(x_0)=0 \Longleftrightarrow x_0 \in A$ 或 $x_0 \in B \Longleftrightarrow x_0 \in A \cup B$。

证毕。

11. 对50种食物是否含有维生素甲、乙、丙进行调查，结果是：含甲的30种，含乙的45种，含丙的27种；同时含甲、乙的29种，含甲、丙的18种，含乙、丙的25种；同时含甲、乙、丙的18种。问仅含维生素甲的有多少种？甲、乙、丙都不含的有多少种？

解：设 A、B 和 C 分别表示含甲、乙和丙的食物集合，I 表全集，如下图所示。由题设条件知：



$n(I)=50$；

$n(A)=30$，$n(B)=45$，$n(c)=27$；

$n(A \cap B)=29$，$n(A \cap C)=18$，$n(B \cap C)=25$；

$n(A \cap B \cap C)=n(⑦)=18$。

因此，有：

$n(①) = n(A \cap B) - n(⑦) = 29 - 18 = 11,$

$n(②) = n(A \cap C) - n(⑦) = 18 - 18 = 0$。

故仅含维生素甲的食物种数为

$$n(④) = n(A) - n(①) - n(②) - n(⑦) = 30 - 11 - 0 - 18 = 1;$$

甲、乙、丙都不含的食物种数为

$$\begin{aligned} & n(I) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(I) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) \\ &\quad + n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \\ &= 50 - 30 - 45 - 27 + 29 + 18 + 25 - 18 \\ &= 104 - 102 = 2。\end{aligned}$$

〔附注〕 也可根据$n(A \cup B \cup C) = n(①) + n(②) + \cdots + n(⑦)$进行计算。

12．在100名学生中，音乐爱好者53人，数学爱好者72人，求音乐与数学都爱好的可能取的人数的最小值与最大值。

解：设音乐爱好者的集合 为A，数学爱好者的集合为B，则$n(A) = 53$，$n(B) = 72$。

因为$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leqslant 100$，故得：

$$53 + 72 - n(A \cap B) \leqslant 100,\ n(A \cap B) \geqslant 25。$$

又因$n(A \cap B) \leqslant 53$，$n(A \cap B) \leqslant 72$，所以

$$25 \leqslant n(A \cap B) \leqslant 53。$$

由此可知：所求的最小值为25，最大值为53。

13．一个矩形，它的周长只能是100米，设其一边之长为x米，面积为y平方米：(1)试写出函数关系$y = f(x)$；(2)求最大值和相应的自变量的值；(3)写出定义域的集合A和值域的集合B；(4)作出略图；(5)从集A到集B的对应关系

$x \longrightarrow y$是不是单值对应？一一对应？

解：（1）由题给条件知

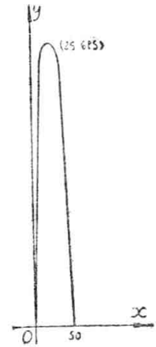
$$f(x)=\frac{100-2x}{2}\cdot x=50x-x^2;$$

（2）由$y=50x-x^2=-(x-25)^2+625$知：当$x=25$时，函数y有最大值625；

（3）$A=\{x|0<x<50\}$；

$B=\{y|0<y\leqslant 625\}$；

（4）略图如右所示；



（5）是单值对应，不是一一对应。

14．写出从{不亮，亮}到{0，1}的所有的一一对应。

解：因为两个集合各有两个元，所以它们之间的一一对应有且只有以下两种：

$$f_1=\begin{pmatrix}\text{不亮}, & \text{亮}\\ \downarrow & \downarrow\\ 0\ , & 1\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}\text{不亮}, & \text{亮}\\ \downarrow & \downarrow\\ 1\ , & 0\end{pmatrix}.$$

15．分别作出从自然数集到正奇数集、正偶数集、整数集的一个一一对应关系。

解：所求的一一对应依次为：

$$f=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1, & 3, & 5, & 7, & \cdots\end{pmatrix},$$

$$g=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \cdots\end{pmatrix},$$

$$h=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \cdots\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & -4, & \cdots\end{pmatrix}.$$

16. 证明单值对应f：$R \to R$，$x \to y = 2x + 3$是一一对应；并求出f的逆对应。

证：任取两相异的实数x_1、$x_2 \in R$，则

$$y_1 = 2x_1 + 3,\quad y_2 = 2x_2 + 3。$$

因而$y_1 - y_2 = 2x_1 + 3 - (2x_2 + 3) = 2(x_1 - x_2) \neq 0$，即$y_1$与$y_2$相异。

又设$y_3 \in R$，且令$y_3 = 2x_3 + 3$，则$x_3 = \frac{1}{2}(y_3 - 3) \in R$。这就是说，对于$R$中任一元$y_3$都有$R$中唯一的元$x_3$为其原象。

故据定义知，单值对应f是一一对应。

此外，由$y = 2x + 3$解出x用y表示，即得f的逆对应：

$$f^{-1}: R \to R,\quad y \to x = \frac{1}{2}(y - 3)。$$

习　题　1—2.1

1. 若x、y均为实数，且$(2x - y + 1)^2 + \sqrt{x + 3y - 3} = 0$，试求$x$、$y$的值。

解：∵两个非负数的和等于0，故必有

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 3y - 3 = 0. \end{cases} \quad 解之得 \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

2. 证明$\sqrt{3}$不是有理数。

证：用反证法：假设$\sqrt{3}$是有理数，则$\sqrt{3} = \frac{q}{p}$，其中p，q是互质的两个自然数。∴ $3 = \frac{q^2}{p^2}$，$q^2 = 3p^2$，即q可被3整除。令$q_1 = 3q_1$，有$9q_1^2 = 3p^2$。∴$p^2 = 3q_1^2$，即p可被3整除。但

这与p、q互质相矛盾，故$\sqrt{3}$不是有理数。

3. 求适合下面关系式的实数x的取值范围：

$$|5x-2|+|5x+1|=3.$$

解：令$5x-2=0$，$5x+1=0$，分别得$x=\frac{2}{5}$，$x=-\frac{1}{5}$。

（1）当$x<-\frac{1}{5}$，$-(5x-2)-(5x+1)=3$，

$$x=-\frac{1}{5}，无解。$$

（2）当$-\frac{1}{5}\leqslant x<\frac{2}{5}$，$-(5x-2)+(5x+1)=3$，

为恒等式。说明在此区间的任何x值均适合。

（3）当$x\geqslant\frac{2}{5}$，$(5x-2)+(5x+1)=3$，

$$x=\frac{2}{5}.$$

故适合条件的x的取值范围是$-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{2}{5}$。

4. 已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$|a+b|$和$a+b$的值。

解：$\because$ $|a|=2$，$|b|=5$。

$\therefore$ $a=\pm2$，$b=\pm5$。

$$\therefore a+b=\begin{cases}2+5=7;\\2-5=-3;\\-2+5=3;\\-2-5=-7.\end{cases}$$

$$|a+b|=3或7.$$

5. 有一个六位数，首位数字是1，如果把它移到该数的末

尾，所得的新数是原数的3倍，求这个六位数。

解：设这个六位数是$\overline{1abcde}$。依题意得

$$\overline{abcde1} = 3 \times \overline{1abcde}.$$

即 $10 \times \overline{abcde} + 1 = 3 \times (100000 + \overline{abcde})$。

$7 \times \overline{abcde} = 299999$。　　$\therefore \overline{abcde} = 42857$。

因此，这个六位数是142857。

6. 由数字0，1，2，3可以组成几个数字不重复，又能被11整除的四位数？

解：根据被11整除的数的特征知，只能使1，2同在偶(或奇)数位上。1，2，3分别在首位时，各有两种排法，故能被11整除的四位数有6个。

7. 一个自然数N的各位数字之和是3的倍数，则此数能被3整除。

证：设$N = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$

$$= (a_1 + a_2 \cdots + a_n) + (a_1 \cdot \underbrace{99\cdots9}_{n-1个} + a_2 \cdot \underbrace{99\cdots9}_{n-2个} + \cdots + a_{n-1} \cdot 9)$$

上式中，第一个括号里是N的各位数字之和，已知它可被3整除；第二个括号里的各项均含因子9，故可被3整除。因此N可被3整除。

8. 求方程$4x^2 - 4xy - 3y^2 = 5$的整数解。

解：$\because$ $4x^2 - 4xy - 3y^2 = (2x - 3y)(2x + y)$，

而 $5 = 1 \times 5 = (-1) \times (-5)$，

故求$4x^2 - 4xy - 3y^2 = 5$的整数解等价于求下列各方程组的整数解：

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x + y = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-3y=-1,\\2x+y=-5;\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-3y=-5,\\2x+y=-1。\end{cases}$$

解之得$\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1,\\y=-1;\end{cases}$

$$\begin{cases}x=-2,\\y=-1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1,\\y=1。\end{cases}$$

9.证明：对于任何整数n，$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$都是整数，且被3除余2。

证：∵ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

而n与$n+1$中必有一偶数，∴ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$ 必为一整数。

要证$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$被3除余2，只需证$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1+1$能被3整除即可。

∵ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n+n^3-n}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

而$n(n+1)(n+2)$与$(n-1)n(n+1)$均为三连续整数之积，故必能被6整除。所以$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$与$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$均能被3整除。$\therefore n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$能被3整除，

$\therefore \quad n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$被3除余2。

10。用数学归纳法证明$5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$可以被19整除，$n$是自然数。

证： 当$n=1$时，$5^3+3^3\cdot 2^0=152=19\times 8$，结论成立。

假设当$n=k$时，$5^{2k+1}+3^{k+2}\cdot 2^{k-1}$可被19整除。

那么 $5^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}\cdot 2^{(k+1)-1}$

$$=5^{2k+3}+3^{k+3}\cdot 2^k=5^2\cdot 5^{2k+1}+3\cdot 3^{k+2}\cdot 2\cdot 2^{k-1}$$

$$=(19+6)\cdot 5^{2k+1}+6\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{k-1}$$

$$=19\cdot 5^{2k+1}+6(5^{2k+1}+3^{k+2}\cdot 2^{k-1})$$

也能被19整除。因此，对于一切自然数，结论成立。

11。用二项式定理证明：

(1) $99^{10}-1$能被1000整除；

(2) $2^{55}+1$能被33整除。

证： (1) $99^{10}-1=(100-1)^{10}-1$

$$=100^{10}-C_{10}^1\cdot 100^9+\cdots-C_{10}^9\cdot 100+1-1$$

$$=100^{10}-C_{10}^1\cdot 100^9+\cdots-1000$$，可被1000整除。

(2) $2^{55}+1=(2^5)^{11}+1=32^{11}+1$

$$=(33-1)^{11}+1$$

$$=33^{11}-C_{11}^1\cdot 33^{10}+\cdots+C_{11}^{10}\cdot 33$$，可被33整除。