

北京邮电大学数学系◎编

GaoDengShuXue

高等数学

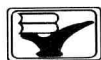
(上册)



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等数学(上册)

北京邮电大学数学系 编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 提 要

本书根据高等数学课程教学基本要求,结合“把数学建模思想融入到数学课程中”的基本思想及作者多年的教学实践编写而成。

本书在内容取材上兼顾到与高中新课标数学课程的衔接,注重数学思想和方法,增加了 Mathematica 数学软件的介绍。在例题和习题中尽可能地反映数学建模的方法。本书分上、下两册,上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程,书末附有几种常见曲线、积分表、习题答案与提示等。

本书可作为高等院校理工科非数学专业的高等数学教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/北京邮电大学数学系编.--北京:北京邮电大学出版社,2012.7
ISBN 978-7-5635-2906-3

I. ①高… II. ①北… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 016477 号

书 名: 高等数学(上册)
作 者: 北京邮电大学数学系
责任编辑: 赵玉山 张国申
出版发行: 北京邮电大学出版社
社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京源海印刷有限责任公司
开 本: 787 mm×960 mm 1/16
印 张: 19.25
字 数: 415 千字
印 数: 1—3 000 册
版 次: 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2906-3

定 价: 39.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前 言

“高等数学”是高等工科院校最重要的基础课程之一,它最主要的任务除了使学生具备学习后续数学课程所需要的基本数学知识外,还有提高学生应用数学工具解决实际问题的能力。目前,北京市乃至全国各高校都在积极参与“把数学建模的方法和思想融入到数学课程中”的课题研究,我们在此方面也做了大量的工作,学校给予了极大的支持。

由于高中新课标的实行,如何将“高等数学”教学和高中数学内容较好地衔接起来也是各高校重点考虑的内容。基于以上考虑,我们编写的这套《高等数学》教材具有以下特点:

1. 注重数学建模思想,减少理论性太强的内容;
2. 结合高中内容,增加了极坐标等内容,减弱了导数、极限的简单计算;
3. 选配应用性的例题与习题,注重与后续课程的衔接;
4. 增加了“数学实验”内容,介绍数学软件的应用,使学生对函数的图像、近似计算等在直观上有初步了解,帮助理解一些概念和性质。

参加本书编写的有丁金扣(第一、第二章)、马利文(第三、第四、第五章)、李鹤(第六、第七章)、刘宝生(第八、第九、第十、第十一章)。在本书的编写过程中,得到了北京邮电大学数学系老师的无私帮助并提出了宝贵意见。北京邮电大学教务处对本书的编写给予了大力支持,在此我们表示衷心地谢意。

编者
2012年7月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	2
一、函数的概念	2
二、函数的初等性态	4
三、函数的运算	6
四、初等函数	7
习题 1-1	9
第二节 数列的极限	10
一、数列极限的定义	10
二、数列极限的性质	13
习题 1-2	15
第三节 函数的极限	16
一、自变量趋于有限值时函数的极限	16
二、自变量趋于无穷大时函数的极限	20
习题 1-3	21
第四节 无穷小量与无穷大量	22
一、无穷小量的概念	22
二、无穷小量的性质	26
习题 1-4	27
第五节 极限运算法则	27
一、极限的四则运算	27
二、复合函数的极限运算法则	30
习题 1-5	31

第六节 极限存在准则和两个重要极限	32
一、极限存在准则	32
二、两个重要极限	34
三、柯西(Cauchy)审敛原理	37
习题 1-6	38
第七节 无穷小的比较	39
习题 1-7	42
第八节 函数的连续性	42
一、函数的连续性	43
二、函数的间断点	44
三、连续函数的性质	45
习题 1-8	47
第九节 闭区间上连续函数的性质	49
一、最大值、最小值定理	49
二、介值定理	49
三、一致连续性	50
习题 1-9	52
总习题一	52
第二章 导数与微分	55
第一节 导数的概念	55
一、导数的定义	55
二、导数的几何意义	58
三、函数的可导性与连续性	59
习题 2-1	61
第二节 求导法则	62
一、导数的四则运算	62
二、反函数的求导法则	64
三、复合函数的求导法则	66
习题 2-2	70
第三节 高阶导数	72
习题 2-3	76
第四节 隐函数及参数方程所表示的函数求导法	77
一、隐函数求导法则	77

二、由参数方程所确定的函数求导法	79
* 三、相关变化率	81
习题 2-4	82
第五节 函数的微分	83
一、微分的概念	83
二、微分的运算法则	85
三、微分的几何意义	87
四、微分在近似计算中的应用	88
习题 2-5	89
总习题二	90
第三章 微分中值定理与导数的应用	93
第一节 微分中值定理	93
一、费马定理与罗尔定理	93
二、拉格朗日中值定理与柯西中值定理	95
习题 3-1	100
第二节 泰勒公式	101
一、带有佩亚诺型余项的泰勒公式	101
二、带有拉格朗日型余项的泰勒公式	104
习题 3-2	108
第三节 不定式	108
一、 $\frac{0}{0}$ 型不定式的极限	109
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的极限	111
三、其他类型不定式的极限	113
习题 3-3	115
第四节 函数的单调性与极值	115
一、函数的单调性	116
二、极值	118
三、最值	120
习题 3-4	122
第五节 函数的凸凹性与函数图像描绘	123
一、函数的凸凹性与拐点	123
二、曲线的渐近线	126

三、函数作图	128
习题 3-5	130
总习题三	130
第四章 不定积分	133
第一节 不定积分的概念与性质	133
一、原函数与不定积分的概念	133
二、基本积分表	134
三、不定积分的性质	135
习题 4-1	136
第二节 换元积分法与分部积分法	137
一、换元积分法	137
二、分部积分法	143
习题 4-2	148
第三节 有理函数与一些特殊函数的不定积分	149
一、有理函数的不定积分	149
二、三角有理函数的不定积分	152
三、某些无理根式的不定积分	153
习题 4-3	155
总习题四	156
第五章 定积分及其应用	158
第一节 定积分的概念与性质	158
一、定积分的概念	158
二、定积分的性质	161
* 三、可积的必要条件与可积函数类	166
习题 5-1	168
第二节 微积分基本定理、基本公式及定积分的计算	169
一、微积分基本定理与基本公式	169
二、定积分的换元法与分部积分法	174
习题 5-2	178
第三节 反常积分	179
一、无穷限反常积分	180
二、无界函数的反常积分	185

习题 5-3	189
第四节 定积分的应用	190
一、定积分的元素法	190
二、定积分在几何上的应用	191
三、定积分在物理上的应用	199
习题 5-4	200
总习题五	201
第六章 微分方程	203
第一节 微分方程的基本概念	203
一、引例	203
二、基本定义	204
习题 6-1	206
第二节 可分离变量的微分方程	207
习题 6-2	210
第三节 齐次方程	211
一、齐次方程	211
二、可化为齐次方程的方程	212
习题 6-3	214
第四节 一阶线性微分方程	215
一、一阶线性微分方程	215
二、可化为一阶线性微分方程的类型	217
习题 6-4	219
第五节 可降阶的高阶微分方程	220
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	220
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	221
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	223
习题 6-5	225
第六节 高阶线性微分方程及其解的结构	225
一、 n 阶线性微分方程及微分算子形式	225
二、函数组的线性相关性	226
三、 n 阶齐次线性微分方程通解的结构	227
四、 n 阶非齐次线性微分方程通解的结构	227
五、刘维尔公式	228

六、常数变易法	229
习题 6-6	231
第七节 常系数齐次线性微分方程	232
一、二阶常系数线性微分方程实例	232
二、二阶常系数齐次线性方程通解的求法	234
三、 n 阶常系数齐次线性方程通解的求法	236
习题 6-7	237
第八节 常系数非齐次线性微分方程	237
一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ (λ 可以是复数, $P_m(x)$ 是 m 次多项式)	237
二、 $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ 或 $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ (其中 α, β 为实数)	239
习题 6-8	241
第九节 欧拉方程	242
习题 6-9	244
第十节 微分方程补充知识	244
一、常系数线性微分方程组解法	244
二、微分方程的其他解法及研究方法	245
总习题六	245
附录 I 几种常用的曲线	248
附录 II 积分表	251
部分习题答案与提示	261
习题 1-1	261
习题 1-2	261
习题 1-3	262
习题 1-4	262
习题 1-5	262
习题 1-6	263
习题 1-7	264
习题 1-8	264
习题 1-9	265
总习题一	265
习题 2-1	266

习题 2-2	266
习题 2-3	268
习题 2-4	269
习题 2-5	269
总习题二	270
习题 3-1	271
习题 3-2	272
习题 3-3	273
习题 3-4	273
习题 3-5	274
总习题三	274
习题 4-1	276
习题 4-2	277
习题 4-3	279
总习题四	280
习题 5-1	282
习题 5-2	282
习题 5-3	283
习题 5-4	284
总习题五	284
习题 6-1	287
习题 6-2	288
习题 6-3	289
习题 6-4	289
习题 6-5	290
习题 6-6	290
习题 6-7	291
习题 6-8	292
习题 6-9	293
总习题六	293

第一章 函数与极限

预备知识

1. 常用的数学符号

- (1) “ \exists ”表示“存在”；
- (2) “ \forall ”表示“任意”；
- (3) “ \in ”表示“属于”；
- (4) “ \notin ”表示“不属于”；
- (5) “ $A \Rightarrow B$ ”表示“如果命题 A 成立, 则命题 B 成立”, 或称“ A 是 B 的充分条件”；
- (6) “ $A \Leftarrow B$ ”表示“如果命题 B 成立, 则命题 A 成立”, 或称“ A 是 B 的必要条件”；
- (7) “ $A \Leftrightarrow B$ ”表示“ A 是 B 的充分必要条件”, 或称“ A 与 B 等价”；
- (8) $\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 即 n 个数 $u_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 求和；
- (9) $\prod_{i=1}^n u_i = u_1 u_2 \cdots u_n$, 即 n 个数 $u_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 求积。

2. 区间和邻域

高等数学中常用的数集是区间. 它包括以下几种:

- (1) $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;
- (2) $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;
- (3) $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$, $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$;
- (4) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$, $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$;
- (5) $(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \text{ 为任意实数}\}$.

邻域也是集合的一种形式, 数轴 (x 轴) 上点 x_0 的 $\delta (\delta > 0)$ 邻域定义为 $U(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$; 点 x_0 的 δ 去心邻域定义为 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$. 其中, x_0 称为邻域中心, δ 称为邻域半径, 如图 1-1 所示.

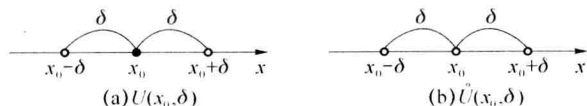


图 1-1

3. 常用的不等式

(1) 绝对值不等式: $-|a| \leq a \leq |a|$;

(2) 三角不等式: $|a+b| \leq |a| + |b|$, $|a-b| \geq ||a| - |b||$;

(3) 平均值不等式: 设 $a_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则有 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 当

$n=2$ 时, 有 $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$

(4) 柯西-施瓦兹 (Cauchy-Schwartz) 不等式: 设 $a_i \geq 0, b_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

4. 极坐标表示

中学数学讲到了平面直角坐标系, 在该坐标系中, 平面上任意一点 P 可用直角坐标 (x, y) 唯一表示; 反之, 任一有序数对 (x, y) 可以唯一地确定平面上的一点, 也就是平面上的一点可由两个参数唯一确定. 记点 P 到坐标原点的距离为 ρ , 线段 OP 与 x 轴正向夹角为 θ , 则有

$$\rho = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

如图 1-2 所示, 平面上点 P 与有序数组 $(\rho, \theta) (\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ 一一对应, 称 (ρ, θ) 为点 P 的极坐标.

显然, $\rho = a$ 表示的是半径为 a 的圆: $x^2 + y^2 = a^2$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

表示以原点为始点的沿 y 轴正轴方向的射线. 直角坐标与极坐标之间的转换关系为:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

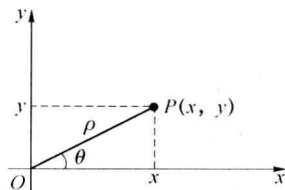


图 1-2

第一节 函 数

一、函数的概念

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按

照一定法则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$;当 x 取遍 D 的每个数值时,对应的函数值全体组成的数集 $R = \{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以改用其他字母,如 φ, g, F 等. 这时,函数就记为 $y=\varphi(x), y=g(x), y=F(x)$ 等.

在实际问题中,函数的定义域根据问题的实际意义而确定. 在数学研究中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达函数. 这时约定:函数的定义域就是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数. 如函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$; 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时对应的函数值总是只有一个,这种函数称为单值函数,否则称为多值函数.

本书凡没有特别说明,本书中的函数总是指单值函数.

函数的表示方法主要有三种形式:解析法(用公式表示)、表格法、图形法. 图形法是表现函数特性最直观的方法,会继续讨论. 用直角坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) \mid y=f(x), x \in D\}$$

表示函数 $y=f(x), x \in D$ 的图形(见图 1-3).

下面举例说明.

例 1 函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R = [0, +\infty)$, 图形如图 1-4 所示.

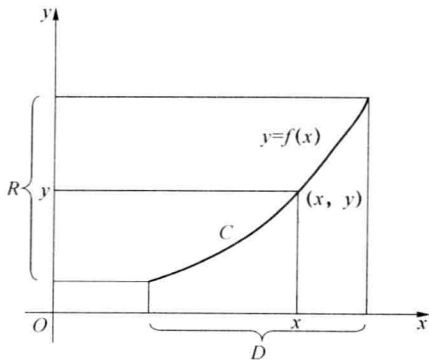


图 1-3

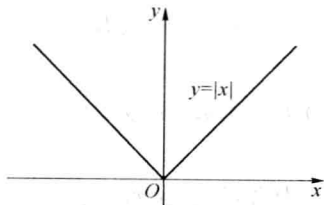


图 1-4

例2 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数. 这种分区间表示的函数称为分段函数. 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R = \{-1, 0, 1\}$, 图形如图 1-5 所示. 对于任何实数 x , 关系式 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ 成立.

例3 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数记为 $[x]$. 函数 $y = [x]$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R = \mathbf{Z}$ 为所有整数, 图形如图 1-6 所示. 这个函数又称为取整函数.

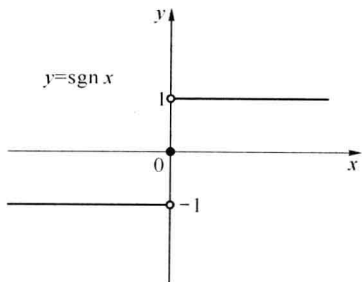


图 1-5

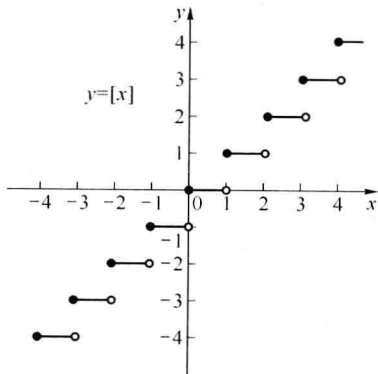


图 1-6

例4 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x + \Delta x) - f(x)$.

解
$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

二、函数的初等性态

1. 奇偶性

设 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D$$

则称 $f(x)$ 为偶函数, 函数图像关于 y 轴对称; 如果

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D$$

则称 $f(x)$ 为奇函数, 函数图像关于坐标原点中心对称.

例如, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的函数 $f(x) = \sin x$ 是奇函数, $g(x) = \cos x$ 是偶函数, 而函数 $h(x) = \sin x + \cos x$ 既非奇函数又非偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在 $D = (-\infty, +\infty)$ 上有定义, 若 $\exists T > 0$, 使得对 $\forall x \in D$ 有

$$f(x+T) = f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 满足上述关系的最小整数 T 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期. 通常说的周期指最小正周期(如果存在).

例如, 函数 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ 都是周期函数, $2\pi, 4\pi$ 等都是它们的周期, 2π 是其最小正周期.

3. 单调性

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2))$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增(或单调递减); 如果等号不成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调递增(或严格单调递减), 如图 1-7 所示. 单调递增的函数和单调递减的函数统称为单调函数.

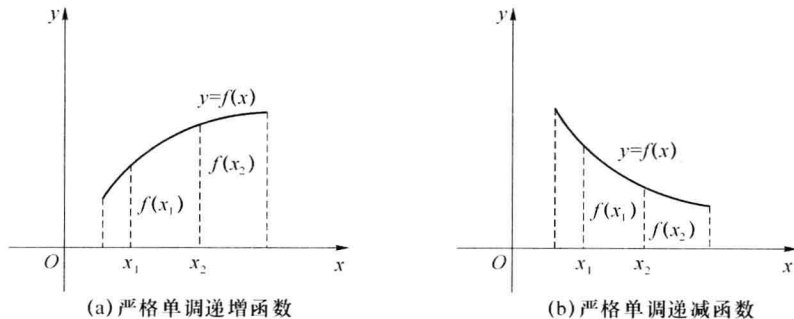


图 1-7

例如, $f(x) = [x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 但不是严格单调递增; $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上严格单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增. 此时, 称 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 分段单调.

4. 有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $A \subset D$. 如果 $\exists M > 0$ (M 为常数), 使得对 $\forall x \in A$,

$$|f(x)| \leq M$$

总成立, 则称 $f(x)$ 在 A 上有界, 或称 $f(x)$ 是 A 上的有界函数. 若对 $\forall M > 0$, 总 $\exists x_0 \in A \subset D$, 使得 $|f(x_0)| > M$, 则称 $f(x)$ 在 A 上无界.

例如, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为存在常数 $M = 1$, 使得对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $|f(x)| \leq 1$.

对某个函数 $f(x)$, 定义域为 D , 可能出现下面情况: 它在子集 $A \subset D$ 上有界, 而在另一子集 $B \subset D$ 上无界. 例如, $y = \frac{1}{x}$ 在定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上无界, 但对 $\forall \delta > 0$, 它在子集 $(-\infty, \delta]$ 或 $[\delta, +\infty)$ 上有界.

设 $f(x)$ 的定义域为 $D, A \subset D$, 如果存在常数 M , 使得对 $\forall x \in A$, 都有 $f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 A 上有上界 M ; 若存在常数 m , 使得对 $\forall x \in A$, 都有 $f(x) \geq m$, 则称 $f(x)$ 在 A 上有下界 m .

函数 $f(x)$ 在 A 上既有上界又有下界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 A 上有界.

三、函数的运算

函数之间的加、减、乘、除运算称为函数的四则运算, 除此之外, 还可以对函数进行复合运算、反函数运算, 由此可以产生更多的函数.

1. 复合函数

定义 2 设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 值域为 R_f ; 另一函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_φ , 值域为 R_φ . 如果 $R_\varphi \subset D_f$, 对 $\forall x \in D_\varphi$ 都有唯一的 $u \in R_\varphi \subset D_f$, 从而有唯一的 $y \in R_f$ 与 x 相对应, 这样就定义了一个由 D_φ 到 R_f 的函数, 记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

称此函数是由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, u 称为中间变量.

例 5 设 $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \ln x$, 求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

解 (1) 因为 $D_f = (-\infty, +\infty), R_\varphi = (-\infty, +\infty)$, 满足函数复合的条件 $R_\varphi \subset D_f$, 所以复合函数为

$$f[\varphi(x)] = \sin \ln x$$

定义域为 $D_\varphi = (0, +\infty)$.

(2) 因为 $D_\varphi = (0, +\infty), R_f = [-1, 1]$, 不满足复合条件 $R_f \subset D_\varphi$, 但此时有 $D_\varphi \cap R_f = (0, +\infty) \cap [-1, 1] = (0, 1]$, 因此复合函数 $\varphi[f(x)] = \ln \sin x$ 的定义域只能是开区间 $(2n\pi, (2n+1)\pi) (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

注意: 并非任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如, $f(u) = \arcsin u$ 与 $u = x^2 + 2$ 不能复合成一个复合函数, 因为 $R_\varphi \cap D_f = \emptyset$.

求两个函数的复合函数称为函数的复合运算.

例 6 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 1 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, g(x) = e^x, \text{ 求复合函数 } f[g(x)], g[f(x)].$$

解 函数 $f(x), g(x)$ 符合函数复合条件, 所以有

$$f[g(x)] = \begin{cases} g(x), & g(x) > 1 \\ \frac{1}{g(x)}, & 0 < g(x) \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ e^{-x}, & -\infty < x \leq 0 \end{cases}, g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ \frac{1}{e^x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$