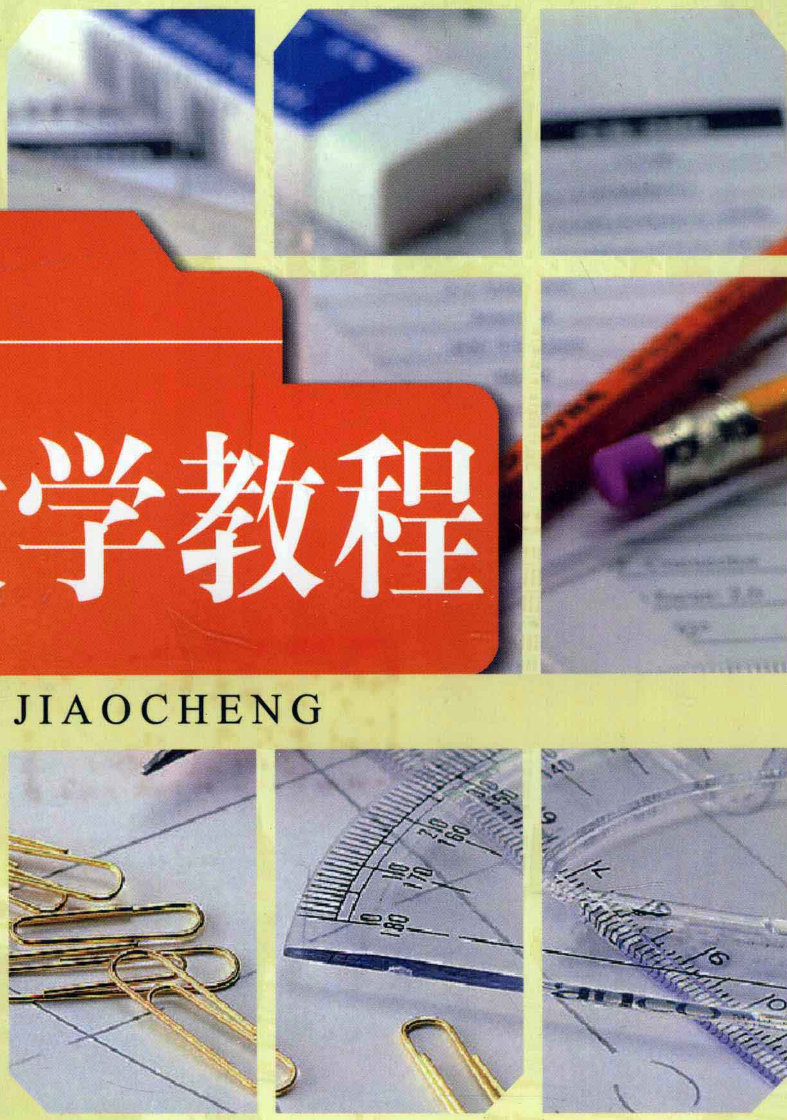
高等教育“十二五”规划教材

马元生　李花妮　主　编

# 管理数学教程

GUANLI SHUXUE JIAOCHENG



科学出版社

高等教育"十二五"规划教材

# 管理数学教程

马元生　李花妮　主编
张明平　李玉青　路　畅　副主编

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本着教材为学生而写，为教师所用的宗旨，将教学方法与知识内容有机地结合在一起，对许多概念、定理的引入和对内容的处理体现了启发式教学方法，反映了解决问题的思维过程。实践了教材本身就具有教的功能，发挥教的作用，便于学生自学.对于教师施教，方便顺手，无需做大幅度的处理加工是本书的特色.

本书介绍了线性代数、线性规划及概率论与数理统计的基本知识和线性代数的应用.可作为普通高校、成教、高职经济、贸易、金融、管理类专业的教学用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

管理数学教程/马元生，李花妮主编.—北京：科学出版社，2011
(高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-031483-3

Ⅰ.①管… Ⅱ.①马…②李… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 110316 号

责任编辑：王 彦 / 责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www sciencep com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年7月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011年7月第一次印刷 印张：21
印数：1—3 000 字数：485 000

**定价：36.00元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138978 8208

# 前　言

一门课程的教材不乏其多，每本教材都反映了作者的教材理念，作者怎么理解教材，他就怎么写教材，一般说来，作者对自己的作品是满意的. 但是作为读者就不一样了. 记得2005年冬(当时笔者已有45年教龄)看到一本关于认识论、方法论方面的教材，读了3天，未翻过3页，读不懂，比读论文还难，这才引起了笔者的反思. 教材为谁写? 应该怎么写教材? 于是笔者顿悟出教材应当是为学生而写，为教师所用. 因为学生要从中学到知识，作者要在写法上符合教育教学规律，要帮助学生经过努力能够不太困难地学到知识，同时对于概念、理论又要阐述到位，不失水准. 对于教师使用教材，要让其用着方便顺手，不需要在许多地方再大动手术，处理加工. 因此笔者认为教材应是教学方法与知识巧妙地有机结合，教材本身就应当具有教的功能，发挥教的作用. 眼下这本书，就是笔者这种认识的实践，不论是教师还是学生，只要认同上述的认知，相信本书对学生是良师，对教师则是益友.

本书内容包含了线性代数和概率统计的基本知识，后者的例题和习题已直接与经济管理相联系，为了让读者了解线性代数的应用，笔者从 David C. Lay 写的《线性代数及其应用》一书中选取了20个例子，形成一个附录供参阅，另外还介绍了线性规划的初步知识及操作.

本书由马元生教授(西安工业大学，西安思源学院)、李花妮担任主编. 张明平、李玉青、路畅担任副主编. 本书编写分工如下:李花妮编写第一、二、三、七章，张明平编写第四、五、六、八章，李玉青编写第九至第十一章，路畅编写第十二至第十四章。

由于笔者水平所限，书中错误在所难免. 恳请同仁们批评指正.

# 目　　录

## 第一篇　线性代数

## 第二篇 概率论与数理统计

# 第一篇　线 性 代 数

# 第一章　行　列　式

## §1.1　二阶、三阶行列式

对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1\text{-}1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1\text{-}2) \end{cases}$$

可以用消元法求解. 可由

$$a_{22}(1-1) + (-a_{12}) \cdot (1-2)$$

消去 $x_2$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1-3}$$

可由

$$(-a_{21}) \cdot (1-1) + a_{11} \cdot (1-2)$$

消去 $x_1$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{1-4}$$

式(1-3)及式(1-4)中有 4 处为两个数的乘积与两个数乘积的差，为了找出方程组的解与方程组的系数及常数项之间的关系，即要求得解的公式，引入符号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1-5}$$

称作二阶行列式，当式(1-3)及式(1-4)中 $x_1, x_2$ 的系数构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，可解出

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

于是我们得到结论：二元一次方程组当其系数行列式不等于零时有唯一解，且可用行列式表示. $x_1, x_2$ 表示式中的分母是方程组的系数行列式，而分子分别是将系数行列式的第一列，第二列换为方程组的常数列所得到的行列式. 如果以符号 $D, D_1, D_2$ 记相应的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则有

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

**例 1.1.1** 求$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=3 \end{cases}$的解.

**解**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{3-6}{-1}=3$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{3-2}{-1}=-1$$

对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

我们用消元法解之,并引入三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

会得到与二元一次方程组类似的结论. 即当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时有唯一解,且

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中 $D_1, D_2, D_3$ 是分别将系数行列式 $D$ 中的第一、二、三列换为方程组的常数列所得到的行列式.

我们看到当二元、三元一次方程组的系数行列式不等于零时,用二阶、三阶行列式可以分别表示方程组的解. 也就是求得了二元、三元一次方程组的公式解. 那么对于含 $n$ 个未知量,$n$ 个方程的方程组是否有公式解呢? 为此在下一节引入 $n$ 阶行列式并介绍它的性质和计算方法,为寻求一般的 $n$ 元线性方程组的公式解作准备.

## §1.2 $n$阶行列式的定义

为了定义 $n$ 阶行列式,我们先研究一下三阶行列式与二阶行列式有什么关系.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

由上式我们看到一个三阶行列式可以化为三个二阶行列式乘以系数后的代数和.我们分析一下其中每个二阶行列式与它前面的系数之间的关系.容易发现其前面的系数的位置不在二阶行列式的元素所在的行、列之内,如第一项.

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

系数 $a_{11}$ 位于原系数行列式的第一行第一列,而 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中的元素为系数行列式中第二、三行,第二、三列的元素,其他两项也是如此.我们引入行列式的元素 $a_{ij}$ 的余子式的概念.

划去三阶行列式的第 $i$ 行,第 $j$ 列,剩下的元素位置不变构成的行列式 $M_{ij}$ 称为 $a_{ij}$ 的余子式($i=1,2,3;j=1,2,3$).

**例 1.2.1** 写出行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 各元素的余子式.

**解** $M_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$,

$M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$,

$M_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$, $M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, $M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

利用余子式的概念,式(1-6)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \tag{1-7}$$

为进一步规范化,可以将式(1-7)右端各项用加号连接,即

$$\begin{aligned} & a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \end{aligned}$$

我们再引入概念：

称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为三阶行列式元素$a_{ij}$的代数余子式，将它记为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\qquad (i=1,2,3;j=1,2,3)$$

则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1-8}$$

我们称式(1-8)为行列式按第一行的展开式，同理会有按第二行、第三行的展开式. 一般有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\qquad (i=1,2,3) \tag{1-9}$$

我们注意到式(1-8)的左端是三阶行列式，而右端中的$A_{i1}$，$A_{i2}$，$A_{i3}$是二阶行列式冠以相应的正、负号. 按式(1-8)可以用二阶行列式来计算三阶行列式，或者说可以用二阶行列式来定义三阶行列式. 仿此我们可以用三阶行列式来定义四阶行列式. 用四阶行列式来定义五阶行列式……由此我们给出$n$阶行列式的定义如下

**定义 1.2.1**

称 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \tag{1-10}$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

为一个$n$阶行列式($n\geqslant 2$).

其中$A_{i1}$，$A_{i2}$，$\cdots$，$A_{in}$分别为$D$的第$i$行元素$a_{i1}$，$a_{i2}$，$\cdots$，$a_{in}$的代数余子式(与三阶情形相仿).

**例 1.2.2** 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**解** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第三行展开}}1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left[1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$+\left[1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$=[-(1-3)-(2-1)]+[(1-3)-(1-2)]$$

$$=(2-1)+(-2+1)=1-1=0$$

我们规定，由元素 $a_{11}$ 构成的一阶行列式等于其自身，$|a_{11}|=a_{11}$. 那么当 $n=2$ 时，按式(1-10)有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}+a_{12}(-1)^{1+2}a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

与式(1-5)是一致的.

**例 1.2.3** 解方程 $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

**解** $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=x^2-3x=x(x-3)=0$

$$x_1=0,\quad x_2=3$$

**例 1.2.4** $a$、$b$ 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

**解** $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$

$$=0+a^2+b^2=0$$

所以 $a=b=0$ 时原行列式等于零.

**例 1.2.5** 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn}a_{n-1n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-2} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2n-2} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

例 1.2.5 中的行列式称作上三角形行列式，它等于其主对角线(行列式中从左上角到右下角的对角线)上的元素的连乘积.

二阶行列式展开式中的两项皆是不同行、不同列的两个元素的乘积. 三阶行列式按(1-9)式右端第一项 $a_{i1}A_{i1}$，元素 $a_{i1}$ 不在 $A_{i1}$ 元素所在的行中，也不在 $A_{i1}$ 元素所在的列

中. 而 $A_{i1}$ 是二阶行列式冠以符号 $(-1)^{i+1}$，所以 $a_{i1}A_{i1}$ 展开后的项是原三阶行列式的位于不同行、不同列三个元素的乘积. 项 $a_{i2}A_{i2}$、$a_{i3}A_{i3}$ 展开后也是如此. 仿此可知，$n$ 阶行列式经 $n-1$ 次降阶后是一个代数和，其各项是取自原行列式不同行、不同列的 $n$ 个元素的连乘积，项前的符号则依 $n-1$ 次降阶而定. 如果行列式中的元素都是已知数，那么行列式最终是一个数，即行列式有数值意义，它是按某种特定规则计算得到的数值. 同时由式(1-10)也可看出，按定义计算较高阶的行列式是很麻烦的，因此有必要讨论行列式的性质，利用性质简化行列式的计算.

## §1.3 行列式的性质

我们以二阶行列式为例不加证明地叙述行列式的性质.

**性质 1.3.1** 行列式的行和列互换后，行列式的值不变(亦称作行列式经转置其值不变).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

性质 1.3.1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的. 因此凡是有关行的性质和结论，对于列也同样成立. 所以对下三角形行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似式(1-10)有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-11}$$

式(1-11)应理解为行列式按第 $j$ 列展开，即行列式等于第 $j$ 列各元素与其对应的代数余子式乘积的和.

**例 1.3.1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

**解** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第三列展开}} 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5$

**性质 1.3.2**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**例 1.3.2** 计算$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$的值.

**解** $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$

或$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-2) = 0$

性质 2 可理解为数 $k$ 乘以行列式,等于用 $k$ 乘行列式的某一行中的各元素.或行列式中某行有公因子可以提到行列式的外边.

**性质 1.3.3** 互换行列式的两行,则行列式变号.

**例 1.3.3** 计算$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$的值.

**解** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$ $\quad\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

**推论 1** 行列式中有两行相同,则行列式等于零.

**推论 2** 行列式中有两行成比例,则行列式等于零.

**性质 1.3.4**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**例 1.3.4** 计算$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$的值.

**解** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$

或$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2+1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (2-3) = -1$

**性质 1.3.5** 将行列式某行的 $k$ 倍加到另一行，行列式的值不变.

**例 1.3.5** 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$的值.

**解** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2$

或$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3+(-3)\cdot 1 & 4+(-3)\cdot 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2$

**推论 3** 行列式中若有零行，则行列式等于零.

**例 1.3.6** 已知

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

求$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$的值.

**解** 按性质 5 可有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

上述行列式的性质对于行列式的列也同样成立.

行列式的计算，主要是利用行列式的性质将其化为三角形行列式，或使其中的某行（或列）出现较多的零，然后再按此行（列）展开. 因此在计算过程中要对行列式的行或列进行一些处理. 我们用 $r_i$ 表示行列式的第 $i$ 行. 用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换行列式的第 $i$ 行和第 $j$ 行. $kr_j$ 表示用数 $k(k\neq 0)$ 乘以第 $j$ 行的各元素. 用 $r_i+kr_j$ 表示将第 $j$ 行的 $k$ 倍加到第 $i$ 行. 类似符号 $c_j, c_j\leftrightarrow c_i, c_j+kc_i$ 表示列及对列相应的处理.

**例 1.3.7** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\text{的值.}$$

**解** $D\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=24$

**例 1.3.8** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$