不等式

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社

不　　等　　式

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社
一九五九年·上海

不　　等　　式

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 090 号
上海市印刷五厂印刷　新华书店上海发行所总經售
*
开本：787×1092 1/32　印張：3 1/4　字数：73,000
1958 年 2 月新知識出版社第 1 版第 6 次印刷（122,001—144,000 本）
1959 年 10 月新 1 版　1959 年 11 月第 2 次印刷
印数：7,001—17,000 本

統一书号：7150·685
定　价：（九）0.30 元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，幷根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高、初中数学各科包括代数、几何、算術、三角教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的．同时，也可供高、初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容．我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流．

这本"不等式"的小册子，是根据中学数学教学大綱修訂草案中的"不等式"編寫的．它首先闡明不等概念及不等式性質；繼而闡明同値不等式的意义及其原理；再分别各种情形來講解不等式，在解法里尽量配合圖象和表格，幷用几种重要的不等式的証明來做推証不等式的工具；最后在極限概念及不等概念基礎上綜合性叙述方程根的討論．

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，經編輯組討論确定編寫提綱．然后由代数組同志分别担任提供材料、寫稿、校訂、修正等工作．但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正．

中國数学会上海分会中学数学研究委員会　1956年8月

目　　錄

一 不等式的意义及其性質

如 a,b 是实数且 $a-b=$ 正数，则称 a 大于 b，記为 $a>b$。例如 $5-3=2$ 是正数，$\therefore 5>3$. 又如 $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 是正数，$\therefore 5\sqrt{2}>3\sqrt{2}$。同样如 a,b 是实数且 $a-b=$ 負数，则称 a 小于 b；記为 $a<b$。例如 $(-5)-(-2)=-3$ 是負数，$\therefore -5<-2$。又如 $(-5\sqrt{2})-(-3\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ 是負数，$\therefore -5\sqrt{2}<-3\sqrt{2}$。反过來說，如 $a>b$，則差 $a-b$ 是正数；如 $a<b$，則差 $a-b$ 是負数。明了了上面所講的不等概念，我們便可以敍述不等式的意义：**兩数或兩代数式之間用不等号 $>$ 或 $<$ 連接起來所組成的式子，叫做不等式。不等式被不等号分为兩部分，即左边和右边。** 由于虛数間沒有大小的規定，所以不等式里面的数，里面文字所代表的数，都要限定代表实数。

我們还可以从不等概念里面推想到：如 a,b 是实数，且 $a-b=0$，則 $a=b$。反过來說，如 $a=b$ 則 $a-b=0$。因而我們归結到**兩个实数 a,b 中第一个数是大于、等于或小于第二个数是决定于差 $a-b$ 是正的、0 还是負的。而且这三种关系必定有一种唯一地存在。**

关于不等式的性質綜合得出下列几条：

1. 如 $a>b$，則 $b<a$.（如 $a<b$ 則 $b>a$）

例如 $5>3$，則 $3<5$. 又如 $-5<-4$，則 $-4>-5$.

这个性質叫做不等式的对逆性質。**即当不等式的左右边对調时，原來的不等号反向。**

2. 如 $a>b$，$b>c$，則 $a>c$.（如 $a<b$，$b<c$ 則 $a<c$）

例如　　　$7>5, 5>3$，　则　$7>3$.

又如　$-8<-7, -7<-4$，　则　$-8<-4$.

这个性質叫做不等式的傳遞性質.

在这里要認清楚如 $a_1>b, a_2>b$（或 $a_1<b, a_2<b$），則 a_1 与 a_2 的大小是不能断定的。例如

$$7>4, 6>4, \quad 而 \quad 7>6; 5>4, 6>4, \quad 而 \quad 5<6.$$

又如　$-6<3, -7<3$　而　$-6>-7$; $-6<3, -5<3$

而　　　　$-6<-5$.

3. 如 $a>b$，則 $a+c>b+c$.（如 $a<b$ 則 $a+c<b+c$）

例如　　　　$7>5$,

$\because$　　$7+(-9)=-2$，$5+(-9)=-4$.

$$(-2)-(-4)=-2+4=2>0,$$

$\therefore$　　　$7+(-9)>5+(-9)$.

又如　　　　$-2<3$,

$\because$　　$-2+5=3$，$3+5=8$；$3-8=-5<0$,

$\therefore$　　　$-2+5<3+5$.

这个性質叫做加法的單調性質。表示不等式兩边可以加上相等的部分。我們論証如下：

$\because a>b$，則 $a-b>0$，又 $\because c-c=0$，且正数加上零仍是正数，所以

$$(a+b)+(c-c)>0,$$

卽　　　　$(a+c)-(b+c)>0$,

$\therefore$　　　$a+c>b+c$.

4. 如 $a>b$，則在 $m>0$ 时，$am>bm$；在 $m<0$ 时，$am<bm$.（如 $a<b$，則在 $m>0$ 时，$am<bm$；在 $m<0$ 时，$am>bm$）

例如　　　　$-7>-9$.

(1)　　$(-7)\times 3=-21$，$(-9)\times 3=-27$;

$\because \quad (-21)-(-27)=-21+27=6>0,$

$\therefore \quad (-7)\times 3>(-9)\times 3.$

(2) $\quad (-7)(-3)=21,\ (-9)(-3)=27;$

$\because \quad 21-27=-6<0,$

$\therefore \quad (-7)(-3)<(-9)(-3).$

又如 $\quad -3<4.$

$$(-3)(-2)=6,\ 4(-2)=-8;$$

$\because \quad 6-(-8)=6+8=14>0,$

$\therefore \quad (-3)(-2)>4(-2).$

这个性質表示当不等式的兩边乘以一个正数时，不等号不变。而当乘以一个負数时，不等号反向。我們論証如下。

$\because \quad a>b,$ 則 $a-b>0.$

(1) $m>0$，由于正数与正数相乘積是正数，則 $m(a-b)>0.$

即 $\quad ma-mb>0,$

$\therefore \quad ma>mb.$

(2) $m<0$，由于負数与正数相乘積是負数，則 $m(a-b)<0.$

即 $\quad ma-mb<0,$

$\therefore \quad ma<mb.$

这里我們还可以推想到如 $m=0$，則 $am=0$，$bm=0$，而 $am=bm$；便变成等式了。

又如 $m=-1$ 得：如 $a>b$，則 $-a<-b$；如 $a<b$，則 $-a>-b$。**即当不等式的兩边变号时，不等号反向。**

例一 如 $a>b$，則 a^2 与 b^2 的大小关系如何？

【解】 $\because \quad a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

由 $\quad a>b$ 得 $a-b>0.$

兩边同乘以 $a+b$，有下列三种情况。

(1)如 $\quad a+b>0,$ 則 $(a+b)(a-b)>0.$

即　　　　$a^2-b^2>0$,　而　$a^2>b^2$.

例如　$4>2$ 而 $16>4$（此时 $a+b=4+2=6>0$）.

(2)如　$a+b<0$,　則　$(a+b)(a-b)<0$,

即　　　　$a^2-b^2<0$,　而　$a^2<b^2$.

例如 $-2>-3$ 而 $4<9$(此时 $a+b=-2-3=-5<0$).

(3)如　$a+b=0$,　則　$(a+b)(a-b)=0$.

即　　　　$a^2-b^2=0$,　而　$a^2=b^2$.

例如　$2>-2$ 而 $4=4$(此时 $a+b=2-2=0$).

一般的錯誤,認为旣然 $a-b>0$,則 $a+b$ 也应当大于 0。所以 $a^2-b^2>0$,而 $a^2>b^2$.

例二　如 $a^3<-6$,則 a^4 与 $-6a$ 哪一个大?

【解】　$\because$　$a^3<-6$,則 a^3 是負数。因而 a 必是負数。

所以　　　　$a^4>-6a$.

5. 如 $a>b$, $c>d$, 則 $a+c>b+d$.（如 $a<b$, $c<d$, 則 $a+c<b+d$）

例如　　　　$6>-4$, $5>2$;

$$6+5=11,\quad -4+2=-2,$$

且　　　　$11-(-2)=11+2=13>0$,

$\therefore$　　　　$6+5>-4+2$.

又如　　　　$5<7$, $-3<-2$;

$$5+(-3)=2,\quad 7+(-2)=5,$$

且　　　　$2-5=-3<0$,

$\therefore$　　　　$5+(-3)<7+(-2)$.

这个性質表示兩个同向不等式（形式为 $a>b$ 及 $c>d$ 或形式为 $a<b$ 及 $c<d$ 的兩个不等式叫做同向不等式）相加仍得一同向不等式,我們論証如下:

因为　　　　$a>b$　及　$c>d$,

则 $$a-b>0,\ c-d>0.$$

由于正数与正数之和是正数，则

$$(a-b)+(c-d)>0,$$

即 $$(a+c)-(b+d)>0,$$

$$\therefore\quad a+c>b+d.$$

通过数学归納法我們可以推得如 $a_1>b_1, a_2>b_2, \cdots, a_n>b_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots+b_n$.

又因当 $a>b$ 及 $c<d$ 时，

由于 $-c>-d$，所以 $a+(-c)>b+(-d)$，

即 $$a-c>b-d.$$

例如 $6>-4$，$3<5$，则 $6-3>(-4)-5$.

明顯地表示两个異向不等式（形式为 $a>b$ 及 $c<d$ 或形式为 $a<b$ 及 $c>d$ 的两个不等式）相减得一与被减式同向的不等式。

我們目前自然要問：(1)两个異向不等式能不能相加呢？(2)两个同向不等式能不能相减呢？請看下面两个例題。

例一 $5>3$，$7<8$，而 $5+7>3+8$；

$5>3$，$7<9$，而 $5+7=3+9$；

$5>3$，$7<10$，而 $5+7<3+10$.

所以两个異向不等式的和不能断定其大小。

例二 $14>8$，$11>6$，而 $14-11>8-6$；

$14>8$，$11>5$，而 $14-11=8-5$；

$14>8$，$11>4$，而 $14-11<8-4$.

所以两个同向不等式的差不能断定其大小。

从上面我們归納得出：**两个同向不等式可以相加（得一同向不等式）而不能相减；两个異向不等式可以相减（得一与被减式同向不等式）而不能相加。**

6. 如 $a>b, c>d$ 且 a, b, c, d 都是正数，则 $ac>bd$。(如 $a<b$, $c<d$ 且 a, b, c, d 都是正数，则 $ac<bd$)

例如 $7>5,\ 4>3;\ 7\times4=28,\ 5\times3=15;$

且 $28-15=13>0,$

$\therefore$ $7\times4>3\times5.$

又如 $6<8,\ 2<3;\ 6\times2=12,\ 8\times3=24;$

且 $12-24=-12<0,$

$\therefore$ $6\times2<8\times3.$

这个性質表示两个两边都是正数的同向不等式相乘，仍得一同向不等式。我們論証如下：

$\because$ $c>0$, 且 $a>b$; $\therefore$ $ac>bc$. (性質 4)

又 $\because$ $b>0$, 且 $c>d$; $\therefore$ $bc>bd$. (性質 4)

$\therefore$ $ac>bd$. (性質 2)

同样，$\because$ $d>0$, 且 $a>b$; $\therefore$ $ad>bd$. (性質 4)

又 $\because$ $a>0$, 且 $c>d$; $\therefore$ $ac>ad$. (性質 4)

$\therefore$ $ac>bd$. (性質 2)

从証明的过程中我們曉得只要 b, c 或 a, d 是正数，这結果便可成立。例如

$$7>5,\ 3>-6,\quad 而\quad 7\times3>5\times(-6).$$

又如不合上面的条件，这結果便不成立。例如

$$-3>-4,\ -3>-5,\quad 而\quad (-3)(-3)<(-4)(-5).$$

又如 $3>-2,\ 2>-3,$ 而 $3\times2=(-2)(-3)$.

通过下面的錯誤例子，可以巩固上面的概念。

由对数的性質得 $\lg\frac{1}{4}>\lg\frac{1}{5}$, 又因 $2>1$,

则 $2\times\lg\frac{1}{4}>1\times\lg\frac{1}{5},\ \lg\left(\frac{1}{4}\right)^2>\lg\frac{1}{5},$

$$\lg\frac{1}{16}>\lg\frac{1}{5},$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{16}>\frac{1}{5}.$$

这种錯誤構成的原因，是由于 $\lg\frac{1}{4}$，$\lg\frac{1}{5}$ 都是負数而造成的錯誤。

通过数学归納法我們可以推得如 $a_1>b_1$，$a_2>b_2$，$\cdots a_n>b_n$ 且各数都是正数，則 $a_1a_2\cdots a_n>b_1b_2\cdots b_n$（由于如 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 必定是正数，所以事实上只要假定 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 都是正数便可以了）.

又如 $a>b, c>d$; a, b, c, d 都是負数，則 $-a<-b$，$-c<-d$，而 $-a$，$-b$，$-c$，$-d$ 都是正数，故得 $ac<bd$.

例如 $\qquad -3>-5;\quad -6>-7;$

而 $\qquad (-3)(-6)<(-5)(-7).$

即兩边都是負数的同向不等式相乘，可先变成兩边都是正数的不等式來处理.

如 a, b 兩数同号，且 $a>b$.

因为 $$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}.$$

由假設 $\quad ab>0,\ a-b>0,\quad$ 則 $\quad \dfrac{b-a}{ab}<0.$

即 $\quad \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}<0,\quad$ 而 $\quad \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}.$

例如 $\quad 5>3\quad$ 而 $\quad \dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{3},$

又如 $\quad -3>-5,\quad$ 而 $\quad -\dfrac{1}{3}<-\dfrac{1}{5}.$

要注意这性質当 a, b 兩数異号是不成立的. 例如

$$5>-2, \quad 而 \quad \frac{1}{5}>-\frac{1}{2}.$$

根据上面的性質我們曉得如 $a>b$, $c<d$; a, b, c, d 都是正数，則得 $a>b$, $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$, 而 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. 例如

$$21>16, \ 3<4, \quad 而 \quad \frac{21}{3}>\frac{16}{4}.$$

明顯地表示兩个兩边都是正数的異向不等式相除，得一与被除式同向的不等式。

又兩个兩边都是負数的異向不等式相除，可先变成兩边都是正数的不等式來处理。

例如 $\quad -24>-30, \ -4<-3;$

即 $\quad 24<30, \ 4>3;$

而 $\quad \frac{24}{4}<\frac{30}{3}.$

我們目前自然要問：(1)兩个兩边都是正数的異向不等式能不能相乘呢？(2)兩个兩边都是正数的同向不等式能不能相除呢？請看下面兩个例題。

例一 $\quad 8>4, \ 2<3, \quad 而 \quad 8\times 2>4\times 3;$

$8>4, \ 2<4, \quad 而 \quad 8\times 2=4\times 4;$

$8>4, \ 2<5, \quad 而 \quad 8\times 2<4\times 5.$

所以兩个兩边都是正数的異向不等式的積，不能断定其大小。

例二 $\quad 24>12, \ 6>4, \quad 而 \quad \frac{24}{6}>\frac{12}{4};$

$24>12, \ 6>3, \quad 而 \quad \frac{24}{6}=\frac{12}{3};$

$24>12, \ 6>2, \quad 而 \quad \frac{24}{6}<\frac{12}{2}.$

所以兩个兩边都是正数的同向不等式的商，不能断定其大小。

从上面我們归納得出**兩个兩边都是正数的同向不等式可以相乘（得一同向不等式）而不能相除；兩个兩边都是正数的異向不等式可以相除（得一与被除式同向不等式）而不能相乘。**

7. 如 $a>b$，且 a, b 都是正数，则 $a^n>b^n$；n 是自然数。（如 $a<b$，且 a, b 都是正数，则 $a^n<b^n$；n 是自然数）

例如　　$5>3$，　而　$5^3>3^3$；

又如　　$2<3$，　而　$2^5<3^5$.

这个性質表示**兩边都是正数的不等式，如果兩边 n 次方其冪值成同向不等式。**我們用数学归納法論証如下．

(1) $\because\quad a>b,\ a>0,\quad\therefore\quad a^2>ab.$　　（性質 4）

又 $\because\quad b>0,\quad\therefore\quad ab>b^2,$　　（性質 4）

$\therefore\quad a^2>b^2.$　　（性質 2）

(2) $\because\quad a>b,\ a^2>0,\quad\therefore\quad a^3>a^2b.$　　（性質 4）

$\because\quad a>b,\ b^2>0,\quad\therefore\quad ab^2>b^3,$　　（性質 4）

$\because\quad a>b,\ ab>0,\quad\therefore\quad a^2b>ab^2,$　　（性質 4）

$\therefore\quad a^3>b^3.$　　（性質 2）

設 $n=k$ 时，$a^n>b^n$ 正确，即 $a^k>b^k$。

$\because\quad b>0$，　所以　$a^{k+1}b>ab^{k+1}$.　　（性質 4）

$\because\quad a>b,\ a^{k+1}>0,\ b^{k+1}>0.$

所以　$a^{k+2}>a^{k+1}b,\ ab^{k+1}>b^{k+2}$。　　（性質 4）

$\therefore\quad a^{k+2}>b^{k+2}.$　　（性質 2）

即如果 $n=k$ 时 $a^n>b^n$ 正确，则 $n=k+2$ 时 $a^n>b^n$ 也正确。由(1)知当 $n=2$ 时，$a^n>b^n$ 正确，所以知 $n=4$ 时，$a^n>b^n$ 也正确。由此可推知 n 是任何偶数时 $a^n>b^n$ 正确。由(2)知当 $n=3$ 时，$a^n>b^n$ 正确，所以知 $n=5$ 时，$a^n>b^n$ 也正确。由此可推知

n 是任何奇数时 $a^n>b^n$ 正确，所以 n 等于任何自然数时 $a^n>b^n$ 正确。

又如两边都是負数的不等式 $-a>-b$，且两边 n 次方。

由于 $-a>-b$，则 $a<b$，$a^n<b^n$，$-a^n>-b^n$。

(1) n 是偶数。因为 $(-a)^n=a^n$，$(-b)^n=b^n$

所以 $(-a)^n<(-b)^n$.

(2) n 是奇数。因为 $(-a)^n=-a^n$，$(-b)^n=-b^n$.

所以 $(-a)^n>(-b)^n$.

即两边都是負数的不等式，偶次乘方得異向不等式，奇次乘方得同向不等式。

要注意**两边含正負数的不等式其冪的大小不能断定。**

例如 $5>-3$，而 $5^2>(-3)^2$，

$5>-6$，而 $5^2<(-6)^2$.

8. 两边都是正数的不等式 $a>b$（或 $a<b$），两边开 n 次方根其算術根成同向不等式。

例如 $125>8$，$\sqrt[3]{125}=5$，$\sqrt[3]{8}=2$，而 $5>2$.

又如 $256<625$，$\sqrt[4]{256}=4$，$\sqrt[4]{625}=5$，而 $4<5$.

又两边都是負数的不等式 $-a>-b$（或 $-a<-b$），两边开奇次方根，其算術根成同向不等式。

例如 $-125<-27$，$\sqrt[3]{-125}=-5$，$\sqrt[3]{-27}=-3$，

而 $-5<-3$.

但要注意**两边开方，如果沒有算術根的限制，其結果的大小不能断定。**例如

$25>16$，两边开平方，而 $5>4$，$-5<-4$.

二 解不等式

解不等式 $f(x)>\phi(x)$ 的意义是：**求出未知数 x 的所有允許数値來，对于这些値函数 $f(x)$ 的値大于函数 $\phi(x)$ 的値。（未知数的允許値集合假設是給定了的）**

同样，解不等式組

$$
(1)\begin{cases} f_1(x, y, \cdots)>\phi_1(x, y, \cdots) \\ f_2(x, y, \cdots)>\phi_2(x, y, \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(x, y, \cdots)>\phi_k(x, y, \cdots) \end{cases}
$$

的意义是：**求出未知数一切可能的允許値組，对于这些値組不等式組(I)成立。**因而我們体会到解不等式（或不等式組）的問題和解方程（或解方程組）問題是一样的。

关于方程里面的同値概念也可以推到不等式里面去。**即如兩个不等式含有同一未知数，且能滿足于其中一个不等式未知数的所有数値也必滿足于他一个不等式时，这样的兩个不等式，叫做同値不等式。**

关于方程里面的同値定理，推到不等式里面也仍然成立。

定理 1. **如果向不等式的兩边加上同一个对于未知数的一切允許値都有意义的式子，那末得到与原式同値的不等式。**

【証】 設不等式 $\qquad f(x)>\phi(x).\qquad$ (1)

兩边同加 $\psi(x)$ 得不等式

$$f(x)+\psi(x)>\phi(x)+\psi(x) \tag{2}$$

如 $x=a$ 適合(1)即 $f(a)>\phi(a)$。且如 $\psi(a)$ 有意义，

按不等式的性質得，$f(a)+\psi(a)>\phi(a)+\psi(a)$.

表明 $x=a$ 也適合(2)，卽凡適合(1)且使 $\psi(x)$ 有意义的值必適合(2)。

反过來說，如 $x=b$ 適合(2)

卽 $$f(b)+\psi(b)>\phi(b)+\psi(b).$$

按不等式的性質得，

$$f(b)+\psi(b)-\psi(b)>\phi(b)+\psi(b)-\psi(b),$$

$$\therefore \quad f(b)>\phi(b).$$

表明 $x=b$ 也適合(1)，卽凡適合(2)且使 $\psi(x)$ 有意义的值必適合(1)，所以这兩不等式同値。

如所加的式子是一个常数，这定理仍然成立。又因为減去 $\psi(x)$ 等于加上 $-\psi(x)$，所以不等式兩边同減去 $\psi(x)$ 也得到与原不等式同値的不等式。

要注意一种很特殊的情況。

例如　不等式　$3x-2-\dfrac{1}{x-5}>2x+1-\dfrac{1}{x-5}$.　(1)

兩边同加$\dfrac{1}{x-5}$，得不等式　$3x-2>2x+1$.　(2)

很明顯地不等式(1) $x=5$ 是不允許的。但把 $x=5$ 代入(2)，左边 $=15-2=13$，右边 $=10+1=11$。左边>右边，卽 $x=5$ 適合(2)，而不適合(1)，所以它們不同値。

又由此定理可得出兩个重要推論：

(1)**不等式內的任意一項，可由不等式的一边移到另一边，但須改变該項的符号。**卽不等式和等式一样在改变符号的原則下是可以移項的；(2)**不等式兩边有相同的項时，可以对消**（如果上面所講的特殊情況發生，对消后要注意是否產生不同値情況）。

定理 2. **如果不等式的兩边乘以同一个对于未知数的一切**