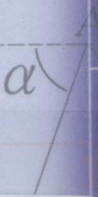




# 數學的發現趣談

*Mathematical Discovery*

蔡聰明 著

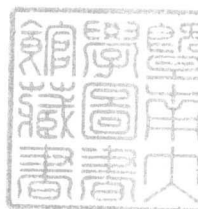
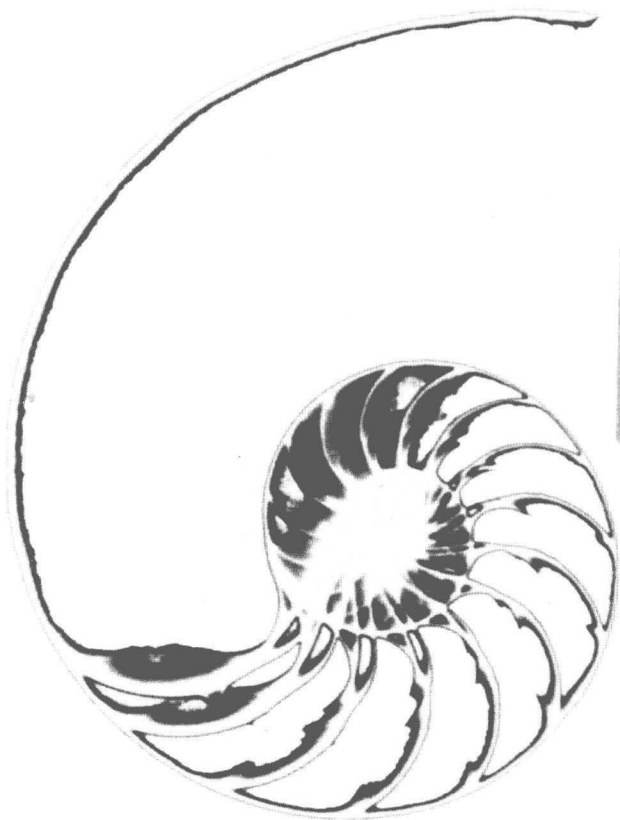


$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi$$

01-47  
20118

# 數學的發現趣談

蔡聰明 著



國家圖書館出版品預行編目資料

數學的發現趣談 / 蔡聰明著. -- 初版六刷. --

臺北市: 三民, 2007

面; 公分

ISBN 957-14-3128-1 (平裝)

1. 數學—通俗作品

310

88018159

## ◎ 數學的發現趣談

著作人 蔡聰明  
發行人 劉振強  
著作財產權人 三民書局股份有限公司  
臺北市復興北路386號  
發行所 三民書局股份有限公司  
地址 / 臺北市復興北路386號  
電話 / (02)25006600  
郵撥 / 0009998-5  
印刷所 三民書局股份有限公司  
門市部 復北店 / 臺北市復興北路386號  
重南店 / 臺北市重慶南路一段61號  
初版一刷 2000年2月  
初版六刷 2007年6月  
編號 S 312870  
基本定價 伍 元  
行政院新聞局登記證局版臺業字第〇二〇〇號

有著作權·不准侵害

ISBN 957-14-3128-1 (平裝)

# 楊序

我與 Zeitung（讀做「蔡通」）師弟之間，極其相得；認識他，可說是我（到此為止的）後半生的一件好運！

我們討論過很多，大學或中學裡一些數學問題的思路，當然這些都歸結到數學教育的問題。我們同處一辦公室已逾廿年，這樣子經常的討論，使得我常忘掉我正在說的意見是否源自 Zeitung。

單就寫數學的教科書來說，我們也有長久的合作經驗。最早的两部書，是（五專）《工專數學》的一到四冊，以及《普通數學教程》，現在兩者都已經絕版了。不過，我還是會偶爾聽到不甚熟悉的朋友，稱讚其中之一，那給我很大的快慰！我確信：兩者都是佳作，因為那是 Zeitung 的手筆。

我認為 Zeitung 文章寫得很好，也許不如我的朋友林正弘（台大哲學系教授），但是比我好是不成問題的。他的長處有兩點。其一，「脾氣好」、清楚、又很親切！（這是很有趣的：其實我的脾氣比他好！但是，在寫文章時，我就不耐煩了，他却恰好顛倒。）其二，他是「知之者」、「好之者」、「樂之者」，寫文章時，自己陶醉其中，讀者必然體會，甚或感染得到。

長久以來，我經常把找我做的工作，推他去做，我覺得有些不好意思：因為這通常是錢極少（或竟是做義工），而工作又煩。我唯一的心安理得乃是：「我知道的人當中，他最適合。」就在這樣的精神下，他在《數學傳播》與《科學月刊》都大量參與，熱心於數學的普及工作。

今天晚上我要去基隆社區大學第一次授課。幾週前，在閒聊中，我提到這件事，我說很需要適當的教材，「差不多是中學生程

度的，以數學方法論為主要著眼點。」他笑著說：「現在我正想把這些年來所寫的一些小文章集結成書，也許適合老師的意思呢！」那我就趕快催三民書局吧！

我不必用力推介書中文詞的清晰流暢，深入淺出；當讀者讀完本書，你一定和我一樣地要催促下一冊，再下一冊的問世。當然我們的理由不必一樣，你是純享受，我呢，是授課時，給學生的課本或最佳參考讀物！

楊維哲

1999年12月21日

於台大數學系

# 自序

本書收集我八年多以來所寫的，刊登於《數學傳播》與《科學月刊》的一些數學通識文章，稍經增刪，適合中學生閱讀。

數學家波利亞 (G. Pólya) 對於數學教育所寫的許多書與文章，皆精彩絕倫，是我最喜愛研讀的。他強調：先猜測再檢驗 (guess and test) 以及教學要教人思考 (teach to think)。再加上科學哲學家波柏 (K. Popper) 的否證論 (falsification theory) 與知識的演化論等美妙的觀點。這些都是我寫文章與教學所奉行的指導原則。

何謂好的文章？有人說，首先作者必須對自己所寫的東西要有感動，然後又有熱情與技巧將這份感動傳達給讀者。這恰是我的夢想，本書雖不能至，但心嚮往之。

科學哲學家萊茵巴赫 (H. Reichenbach) 將科學的求知活動分成前後兩個階段：發現的過程 (the context of discovery) 與驗證的過程 (the context of justification)。應用到數學來，數學的求知活動是由問題出發，先有探索的發現過程，然後才有邏輯證明與整理成嚴謹的知識系統，兩個階段兼備才算完美。然而，一般數學教科書、教學、或文章，往往只展示冰冷且抽象的後半段，而忽略掉最精彩且最能啓迪思想的前半段。因此，阿倍爾 (Abel) 批評高斯 (Gauss) 說，他就像一頭狡猾的狐狸，在沙漠上，一面走一面用尾巴抹掉足跡。這是造成許多學生不喜歡數學，甚至討厭數學的主因。

為了彌補這個不足，我從中學數學選取一些有趣的論題，寫成本書，但是在處理上，我特別著重在前半段的思路過程，強調數學方法論，並且注重歷史發展與人文背景，期望能夠提供給中學生另類的選擇。

數學是人類不斷地叩問自然，跟自然對話而產生出來的。數學家追求邏輯上可能的模式 (pattern)，尋找數與形可能的規律，這是一種驚心動魄的觀念探險之旅 (the exciting adventures of ideas)。數學家樂在其中，流連忘返。

從古到今，人類的文明經歷過三波的發展：第一波是農業革命，第二波是工業革命，以及第三波是目前正在進行的資訊革命與分子生物學革命。對於後兩波，數學扮演了很重要的角色，例如牛頓與萊布尼茲創立微積分，幫忙促動了十七世紀的科學革命，接著是十八世紀的啓蒙運動，以及十九世紀的工業革命。誠如伽利略所說的「自然之書 (the Book of Nature) 是用數學語言寫成的，不懂數學就讀不懂這本偉大的書」。懷海德 (A. N. Whitehead) 也說得好：「數學是了解模式與分析模式之間的關係最有力的技術。…如果人類的文明繼續進展，今後兩千年人類思想的新奇事物都將盡是數學理解的天下。」因此，期盼中學生都把數學學好！

未來第三波的資訊文明，需要會思考，會提問題，具有創意，敢於作出開創性的決策，並且具有地球村宏觀視野的公民。如何培育這樣的公民？在社會文化和思想上，也許必須經歷一次「新的文藝復興運動」的洗禮；在教育上，必須讓知識重新注入「創造性」的活水，而不再以大量的死知識作「填鴨式」的傳承；這樣才能達到脫胎換骨的境地，進一步開創出 21 世紀更燦爛的新文明。

三民書局一向都只出版大學與專科學校的數學教科書，不曾出版過如本書的數學通識文集，本書是第一次的嘗試。因此，我衷心感謝且欣賞劉振強先生的魄力，還有他的風趣！

其次，本書在寫作的過程中，接到許多讀者與朋友的鼓勵和幫忙，讓我內心溫暖。特別地，我要感謝：台大的陳榮銳教授，彰師大的張靜譽教授，科學月刊的主編吳松春先生與張孟媛小姐，數學

傳播編輯呂素齡小姐，一女中的阮貞德與蘇麗敏兩位老師、楊謹榕同學，臺南市聖功女中的蕭健忠老師，師大附中的莫迪達同學，新竹女中的蔡卓凌、何宜軒、王雨荷三位同學，以及台大數學營的可畏後生們，還有吾師楊維哲教授與吾兒弘霖的長期討論，三民書局編輯部的細心、高效率和頂真的精神。這些都直接或間接地促成了本書的形成。在這個世界上，沒有人是孤島！正如沒有知識是孤立的！然而，我深知本書的缺失與疏漏在所難免，尚祈讀者不吝批評指正。

最後，我要感謝吾妻陳月華，在漫長的歲月中，她所給予的容忍與支持。此中有真意，但我言有盡而意無窮，本書就獻給她。

## 蔡聰明

1999年12月31日

千禧年前夕於臺大數學系

### 後記

一本數學書這麼快就需要再付印，這是作者始料所未及的。感謝讀者對本書的回應與指正。趁再此之際，將本書作一番訂正。

2000年6月22日



# 數學的發現趣談

## 目次

楊序 / I

自序 / III

- 1 · 數學解惑四則 / 001
- 2 · 魔方陣問題 / 016
- 3 · 對國中學生解題的觀察 / 027
- 4 · 無言的證明 / 045
- 5 · 一線定乾坤 / 051
- 6 · 一題多解的妙趣 / 057
- 7 · 從畢氏定理到餘弦定律 / 071
- 8 · 餘弦定律的追尋 / 081
- 9 · 畢氏定理的故事 / 097
- 10 · 溫布頓網球賽共比賽幾局？ / 107

- 11 · 談Heron公式 / 117
- 12 · 古埃及的四邊形面積公式 / 133
- 13 · 四邊形的面積公式 / 145
- 14 · 談Pick公式 / 165
- 15 · 輾轉相除法、  
黃金分割與費氏數列 / 179
- 16 · 零多項式的次數 / 207
- 17 · 1是不是質數？ / 215
- 18 · 圓的分割 / 227
- 19 · 談分析與綜合法 / 241
- 20 · 蜜蜂與數學 / 259
- 21 · 光與影的對話 / 281
- 22 · 好玩的獨人棋 / 299
- 23 · 向阿基米得致敬 / 313
- 參考資料與索引 / 325

參考資料 / 326

索引 / 332

## 1 · 數學解惑四則



數學是理性文明的結晶，是一門講道理的學問。不論是教與學，都應展現從問題出發的思索、討論、說理之過程。不過，在目前的教育體制下，這些過程往往是缺乏或不足的。許多學生學習數學很快就被迫走上「背記」之途，弄壞求知的胃口，實在令人痛心。

在小學數學裡，我們可以發現這樣的問題：

零不能做為：(i)被除數，(ii)除數，(iii)被乘數。

許多同學雖然都答對了，但是進一步追問「為什麼」時，得到的回答卻是：「不知道，老師只告訴我們除數不能為零。」根據調查，這種採用「背記」而不求理解的學習態度，在小學已相當普遍，實在令人憂心忡忡。

背記的後遺症會持續擴大且加重。筆者曾經教過一位數學很優秀的大一學生，她回憶中小學的數學經驗說：「從小，家長只要求數學成績好看即可，卻不重視孩子的學習興趣與方法。資質稍佳者，自然可在國小與國中應付自如。但到了高中，在質與量上突然加重許多，以致一下子不能完全吸收。在無額外精力用來花時間思考的狀況下，只好勉強背記，徒學了一些解題雜技，但在訓練獨立思考上毫無建樹，如此本末倒置，唯聯考是從的學習，怎能培養數學功力呢？這就像一群徒子徒孫，只和師父學了一些招式，而不知修習內功；十年下來，不過中看不中用罷了。更有甚者，連完整的系統概念都沒有，分不清拳法與劍招，每每談起數學，同學們總不勝唏噓，嗚…嗚…」數學對許多學子而言，是內心的夢魘。

從「零不能當除數」就開始背記，分明是痛苦學習的開端，走入歧途的第一步，反應出數學教育弊病的冰山一角。

小學數學主要是學習數的四則運算（ $+$   $-$   $\times$   $\div$ ）、簡易幾何圖形的性質，以及四則的應用，例如和差問題、雞兔同籠問題等等。在四則運算中，較困擾學生的是分數、比例與負數的概念，以及下列四個問題：

### 1. 為什麼零不能當除數？

2. 為什麼要先算乘除後算加減？
3. 作分數的除法時，為什麼要將除數的分子與分母互換，然後再改成乘法演算？
4. 為什麼負負得正？

本節我們就來解說這四個問題。

### ■ 零不能當除數 ■

1, 2, 3, … 是每個人最早熟悉的數，叫做**自然數**。對它們施展加法與乘法都不會跑出自然數之外，好像是齊天大聖落入如來佛的手掌心一樣。但是對於減法與除法就不同了，動不動就跑出界外；例如： $2 - 3 = -1$ ，負數出現； $9 \div 4 = 2\frac{1}{4}$ ，分數出現。等到有一天，零又蹦出來，更增添了許多有趣的事情，例如： $3 + 0 = 3$ ， $7 + 0 = 7$ ， $3 - 0 = 3$ ， $7 - 0 = 7$ ，即任何數加零或減零皆維持不變，「加之不增，減之無傷」。這表現零的客氣、隨和，不動人一根汗毛的一面。但是對於乘法，零就很專橫霸道、自我為中心，像黑洞吸吞一切。例如： $3 \times 0 = 0$ ， $7 \times 0 = 0$ ，任何數只要被零一乘都同化為零。因此，零簡直是集「專橫與隨和」於一身。再看除法，零惹來了麻煩與困惑： $6 \div 0 = ?$

要解決這個問題，我們從根本出發：除法的意義是什麼？ $6 \div 3 = 2$ ，可以解釋為 6 顆糖平分給 3 個人，每個人得到 2 顆。同理， $6 \div 0 = ?$  的意思就是要問：6 顆糖平分給 0 個人，每個人得到幾顆？這樣似乎就遇到困難，有疑惑了。

讓我們從更寬廣的觀點來觀察四則運算。四則運算並非是孤立的，它們之間有密切關係，加法與減法，乘法與除法，必須合在一起來了解，例如：

$$3 + \boxed{4} = 7 \longleftrightarrow 7 - \boxed{4} = 3$$

$$2 \times \boxed{3} = 6 \longleftrightarrow 6 \div \boxed{3} = 2$$

加4再減4就是還原，乘以3再除以3也是還原。因此，加與減，乘與除是互逆的運算；如果一個是開門，另一個就是關門。它們是一體的兩面，互相制約的。

有了這種博大的觀點，回頭觀察

$$6 \div 0 = \boxed{?} \quad (1)$$

改用乘法來看就是要問

$$\boxed{?} \times 0 = 6 \quad (2)$$

顯然找不到一個數可滿足(2)式，因為任何數乘以0都等於0，不會等於6。在(2)式中，填入 $\boxed{?}$ 任何數都不成立，都會得到矛盾。相應地，(1)式中的 $\boxed{?}$ 就找不到答案。基於這個理由，我們說零不能當除數。這是「事有必至，理有必然」的結論。

但是 $0 \div 0$ 呢？這更詭譎。根據上述道理，用乘法來看(3)式得就是

$$\boxed{?} \times 0 = 0 \quad (3)$$

我們立即看出，任何數都可以填入(3)式中的 $\boxed{?}$ 。因此，我們說任何數都可以是(3)式的答案，從而說： $0 \div 0$ 是「不定數」或「任何數」。因此，0似乎又可以當除數。不過，這僅限於分子也是0的情形。對於中小學生而言，我們還是說「零不能當除數」，這樣比較簡明扼要。

在微積分中，利用極限的觀念，我們可以賦予 $\frac{0}{0} = +\infty$ 或 $-\infty$ （正、負無窮大），並且對於 $\frac{0}{0}$ （或 $0^0$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ ）之不定形，作更深入的討論。不過，這些內容並不適於介紹給中小學生。

總而言之，零像一個小精靈，既頑皮搗蛋，又和藹可親，其性格複雜多變化。



## 練習題

1. 指出下列論證的錯誤所在？

假設  $a = b$ ，兩邊同乘以  $a$  得  $a^2 = ab$ ，兩邊同減去  $b^2$  得

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

分解因式： $(a + b)(a - b) = b(a - b)$

兩邊同除以  $(a - b)$  得  $a + b = b$

今因為  $a = b$ ，所以  $2b = b$

兩邊同除以  $b$  得  $2 = 1$ ，矛盾。 □

### ■ 先算乘除後算加減 ■

在小學算術裡，碰到四則運算混合的算式，例如： $6 \times 7 + 5 - 4 \times 9 \div 3 = ?$  老師或課本都會規定：先算乘除後算加減。許多學生為了應付考試，不假思索就背記下來（可能是懶惰或沒有時間或不會思考）。考試是考了 100 分，滿足了家長的虛榮心，但這代表真懂嗎？顯然答案是否定的。我們設想有另一位同學，很會思考且通理，考試不小心算錯，只得 85 分。這 85 分會比 100 分差嗎？絕不！一般而言，「背記」與「真懂」在卷面上常不易分辨，通常得利用口試加以區別。因此我們要警覺到：分數並不代表一切！

其實，背記而得高分的同學，不但不應高興，反而須嚴格加以糾正。因為背記會平白喪失跟數學靈犀交會與鍛鍊思考的絕佳機會。背記的壞習慣一旦養成，就表示懶惰思考的養成以及求知胃口的敗壞，將來在求學路上必大大不利，到了高中一定會背不完兜著走，視數學

乃至求知為畏途。

## 一、四則混合運算

照理說，四則運算都只是兩個數之間的運算，三個數以上的運算就沒有意義，除非加括號使其變成兩個兩個地運算，例如  $(3+2)+5=5+5=10$  或  $3+(2+5)=3+7=10$ 。我們發現不論是那兩個數先合在一起算，結果都相同，這個結論很奇妙也很重要，特別稱之為加法結合律。因此，三數連加可以省略括號，直接寫成  $3+2+5=10$ ，而不致產生混淆，乘法亦然。但是四則運算混合在一起時，如上述的例子，就不明確了。它可以有各式各樣的算法，而不同的算法可能得到不同的答案。這是引起困擾之源。

### 1. 從左算到右：

$$\begin{aligned} 42+5-4\times 9\div 3 &= 47-4\times 9\div 3 \\ &= 43\times 9\div 3 = 387\div 3 = 129 \end{aligned}$$

### 2. 先算加減後算乘除：

$$\begin{aligned} 6\times 12-4\times 9\div 3 &= 6\times 8\times 9\div 3 \\ &= 48\times 9\div 3 = 432\div 3 = 144 \end{aligned}$$

### 3. 先算乘除後算加減：

$$42+5-36\div 3 = 42+5-12 = 47-12 = 35$$

### 4. 加上括號：

$$\begin{aligned} 6\times \{7+[(5-4)\times 9]\}\div 3 &= 6\times \{7+[1\times 9]\}\div 3 \\ &= 6\times \{7+9\}\div 3 = 6\times 16\div 3 = 32 \end{aligned}$$

$$[6\times (7+5)] - [(4\times 9)\div 3] = 72 - 12 = 60$$



當然還有其他不同加括號的方法，讀者可以自己嘗試。在這麼多種答案中，那一個才是正確的呢？事實上，這不是正確與否的問題，而是規約問題。目前我們只能說，在一個規約下，就得到一個明確的答案。

到底是採用那一種規約較方便、好用與合理呢？這就必須作進一步的考察與比較，從比較中作選擇。古人說得好：「知所異同，方覓全貌。」有的規約無所謂優劣，例如我國規定靠馬路右邊走，但是日本與英國卻規定靠左邊走，你能說那一種較好嗎？「玫瑰當初如果不叫做玫瑰還是一樣芬芳」，不是嗎？道德規範、校規、法律等等都是一種規約。訂規約時，首重不能違背人性與自然律，例如我們不能規定山上的落石不准掉下來（違背自由落體定律）；又如古人的「寡婦餓死事小，失節事大」，由於不合人性，也不易實行。打球與下棋的比賽規則，必須做到公平，這是人盡皆知的事。

## 二、計算先後順序的規約

我們的目標是：如何將四則混合運算所產生的多個不同答案，消除到只剩唯一的答案？

顯然解決之道有二：其一是加括號。通常一個涉及四則運算的算術應用題，已提供我們何者先算，何者次算，何者後算等等，因此自然有了括號，此時算得的答案當然唯一，不會曖昧不明；其二是作規約。對於一般沒有加括號的四則混合運算，書本或老師提出的規定是，先算乘除後算加減。

為什麼要這樣規定呢？根據什麼道理？

從反面來觀察，往往是一個好主意。如果不作規約會如何？這樣會無法無天、天下大亂，因此不好。剩下的是，加減與乘除何者先算的問題。如果規定先算加減後算乘除會怎樣呢？