

中学数学复习资料

(上 册)

淮阴县文教局翻印

一九七九年十二月

目 录

代 数

一、实数与代数式	(1)
(一) 实数	(1)
(二) 代数式	(3)
二、方程与方程组	(20)
(一) 方程的基本知识	(20)
(二) 方程	(22)
(三) 方程组	(31)
(四) 列方程 (组) 解应用题	(37)
三、不等式	(50)
(一) 不等式的概念和基本性质	(50)
(二) 不等式和不等式组的解法	(51)
四、函数	(63)
(一) 初等函数的分类表	(63)
(二) 函数的基本概念	(63)
(三) 函数关系的表示法	(63)
(四) 函数的一些重要性质	(64)
(五) 有理整函数	(66)
(六) 有理分函数	(72)
五、指数与对数	(80)

(一) 指数的概念和运算法则	(80)
(二) 对数的概念	(81)
(三) 指数函数与对数函数	(82)
(四) 积、商、幂、方根的对数和对数的换底公式	(84)
(五) 常用对数	(84)
(六) 简单的指数方程和对数方程	(88)
六、数列	(96)
(一) 数列的概念和数列的通项公式	(96)
(二) 等差数列与等比数列	(96)

几 何

一、定理的证明	(116)
(一) 定理的组成	(116)
(二) 定理的证明	(116)
二、相交线与平行线	(120)
(一) 线段、射线、直线	(120)
(二) 相交线	(121)
(三) 平行线	(123)
(四) 成比例线段	(124)
三、多边形	(129)
(一) 三角形	(129)
(二) 四边形	(144)
(三) 多边形	(147)
四、圆	(156)
(一) 圆的基本性质	(156)
(二) 关于圆的比例线段	(156)
(三) 圆心角、圆周角和弦切角定理	(157)

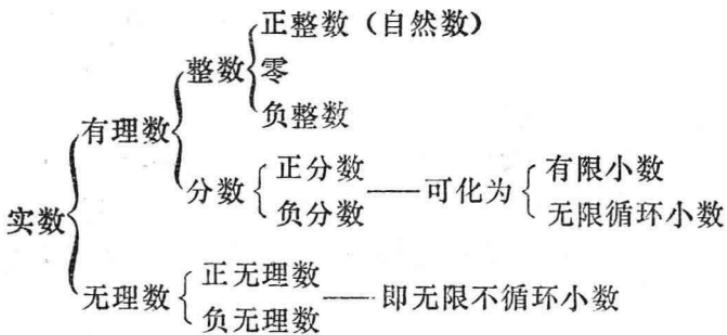
(四) 判定四边形内接于圆的定理	(157)
(五) 圆的切线	(157)
(六) 两圆的位置关系	(158)
(七) 弧长与面积的计算公式	(158)
五、基本轨迹和作图题	(170)
• (一) 四种命题间的关系	(170)
• (二) 基本轨迹	(171)
• (三) 作图题	(172)
六、直线与平面	(175)
(一) 平面	(175)
(二) 直线与直线的位置关系	(175)
(三) 直线与平面的位置关系	(177)
(四) 平面与平面的位置关系	(179)
七、简单几何体	(189)
(一) 多面体	(189)
(二) 旋转体	(191)
(三) 简单几何体的侧面积与体积的计算公式	(193)

代 数

一、实数与代数式

(一) 实数

1. 实数的系统表



形如 $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$, p 、 q 是整数) 的数叫做有理数。无限不

循环小数叫做无理数。有理数、无理数统称为实数。

2. 实数的运算定律

(1) 交换律 $a + b = b + a;$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c);$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

$$(3) \text{ 分配律} \quad a(b+c) = ab + ac.$$

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，次算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括号里的数。

3. 数轴 规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴。

实数集合与数轴上的点的集合具有“一一对应”的关系，这就是：每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。

4. 实数的绝对值 实数 a 的绝对值是非负数：

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}) ; \\ 0 & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}) ; \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}) . \end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义，是数 a 在数轴上的对应点到原点的距离。

5. 实数大小的比较

(1) 按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较大小，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数。

(2) 用求差法比较两个实数的大小，即若 $a - b > 0$ ，则 $a > b$ ；若 $a - b = 0$ ，则 $a = b$ ；若 $a - b < 0$ ，则 $a < b$ 。

例 1 计算： $\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - (-5.5) \times \frac{6}{11} + (-2)^3$
 $\div [1 - (0.5)^{-2}]$.

解 原式 $= \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{11}{2}\right) \times \frac{6}{11} - 8 \div \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]$
 $= \frac{4}{3} + 3 - 8 \div (1 - 4)$

$$= \frac{4}{3} + 3 + \frac{8}{3} = 7.$$

例 2 把下列各数按从小到大的顺序用不等号连结起来：

$$|-5|, -3, |\frac{2}{3}|, 0, \sqrt{5}, -\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|.$$

$$\text{解 } \because |-5| = 5, \quad |\frac{2}{3}| \approx 0.67, \quad \sqrt{5} \approx 2.24,$$

$$-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.71,$$

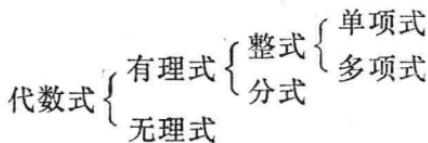
$$\therefore -3 < -\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 0 < |\frac{2}{3}| < \sqrt{5} < |-5|.$$

(二) 代数式

1. 代数式

(1) 代数式的定义 用代数运算符号把数字和字母连结起来的式子，叫做代数式。

(2) 代数式的分类表



(3) 代数式的值 用数值代替代数式里的字母，计算得出的结果，叫做代数式的值。

2. 有理式

(1) 有理式的定义 一个代数式如果只含有加、减、乘、除和乘方等五种运算，这样的代数式叫做有理代数式，简称有理式。

(2) 整式

①整式的定义 一个代数式如果不含有除法运算，或虽有除法运算，但除数不含字母，这样的代数式叫做有理整式，简称整式。

整式按照它是由几个单项式的代数和组成的，可以分为单项式、二项式、三项式等等。项数在二项以上的统称为多项式。

②整式的四则运算(法则略)

在进行乘除法、乘方运算时，经常用到下面正整数指数幂的运算法则以及乘法公式：

正整数指数幂运算法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n);$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

乘法公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^2 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

例 1 计算代数式 $2x^3 - 5x^2 + 3x - 8$ 的值：

(1) 当 $x = -1$ 时； (2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时。

解 (1) 当 $x = -1$ 时，

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 &= 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) - 8 \\ &= -2 - 5 - 3 - 8 = -18; \end{aligned}$$

(2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}
 2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 8 \\
 &= 2\left(\frac{1}{8}\right) - 5\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 8 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - 8 = -7\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

例 2 试用语言叙述下列各式所确定的实数 a 、 b (或 a 、 b 、 c) 之间的关系或值的范围:

- (1) $a^2 = b^2$;
- (2) $a + b = 0$;
- (3) $ab = 1$;
- (4) $ab = -1$;
- (5) $ab = 0$;
- (6) $ab \neq 0$;
- (7) $(a - b)^2 = 0$;
- (8) $a^2 + b^2 = 0$;
- (9) $a^2 + b^2 > 0$;
- (10) $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$;
- (11) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \neq 0$.

- 解**
- (1) a 、 b 的绝对值相等;
 - (2) a 、 b 互为相反数;
 - (3) a 、 b 互为倒数;
 - (4) a 、 b 互为负倒数;
 - (5) a 、 b 中至少有一个为零;
 - (6) a 、 b 均不为零;
 - (7) a 、 b 相等;
 - (8) a 、 b 均为零;
 - (9) a 、 b 不全为零;
 - (10) a 、 b 、 c 中至少有两个相等;
 - (11) a 、 b 、 c 不全相等.

例 3 计算:

- (1) $(x - 1)(x - 2) - 3x(x + 3) + 2[(x + 2)(x + 1) - 3]$;
- (2) $(-3a^2b^3)^3 + (3ab^2)^2$.

解 (1)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= x^2 - 2x - x + 2 - 3x^2 - 9x + 2(x^2 + x + 2x + 2 - 3) \\
 &= -2x^2 - 12x + 2 + 2x^2 + 6x - 2 \\
 &= -6x;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 原式} &= -27a^6b^9 \div 9a^2b^4 \\&= -3a^4b^5.\end{aligned}$$

例 4 计算：

$$(1) (3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2) - (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2);$$

$$(2) (x + 2y)^3(x - 2y)^3 - (2x + y)^3(2x - y)^3.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } (1) \text{ 原式} &= (3a)^3 - (2b)^3 - (3a)^3 - (2b)^3 \\&= -16b^3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 原式} &= (x^2 - 4y^2)^3 - (4x^2 - y^2)^3 \\&= x^6 - 12x^4y^2 + 48x^2y^4 - 64y^6 - 64x^6 \\&\quad + 48x^4y^2 - 12x^2y^4 + y^6 \\&= -63x^6 + 36x^4y^2 + 36x^2y^4 - 63y^6.\end{aligned}$$

③因式分解 把一个多项式用几个因式的积来表示，叫做多项式的因式分解。

一个多项式能不能分解因式，要根据在什么数范围内进行因式分解来决定。在指定的数的范围内分解因式时，一定要分解到不能再分解为止。在分解因式之后，如有相同因式，要写成幂的形式，并且各个因式要化简。

因式分解通常用到下列基本方法：

I 提取公因式法

例 5 分解 $-8a^3b + 12a^2b - 20ab^2$ 的因式。

解 原式 = $-4ab(2a^2 - 3a + 5b)$.

II 分组分解法

例 6 分解因式： $10a^2 + 21xy - 14ax - 15ay$.

解 原式 = $5a(2a - 3y) - 7x(2a - 3y)$
 $= (2a - 3y)(5a - 7x)$.

II 应用乘法公式法

例 7 分解因式: $8(x+y)^3 - 27(x-y)^3$.

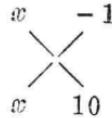
解 原式 = $[2(x+y) - 3(x-y)][4(x+y)^2 + 2(x+y)$
 $\cdot 3(x-y) + 9(x-y)^2]$
 $= (2x+2y-3x+3y)(4x^2+8xy+4y^2+6x^2$
 $- 6y^2+9x^2-18xy+9y^2)$
 $= (5y-x)(19x^2-10xy+7y^2).$

例 8 分解因式: $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$.

解 原式 = $x^4-2x^2y^2+y^4-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$
 $= (x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-(2yz)^2$
 $= [(x^2-y^2)-z^2]^2-(2yz)^2$
 $= (x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)$
 $= [x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]$
 $= (x-y-z)(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$

IV 应用十字相乘法

例 9 分解 $x^2+9x-10$ 的因式.



解 原式 = $(x-1)(x+10)$.

例 10 分解因式:

$$2x^2-9xy+10y^2.$$



解 原式 = $(x-2y)(2x-5y)$.



V 应用配方法

例 11 在实数范围内分解因式: $2x^2-6x+1$.

解 原式 = $2\left(x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$

$$= 2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{7}{4} \right] \\
 &= 2 \left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \\
 &= 2 \left(x - \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

从上例可以看出，如果二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的两根为 x_1, x_2 ，那么这个二次三项式可以分解为

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

例 12 分解因式： $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3$.

解法 1 原式 = $4x^2 - 4(y+1)x - (3y^2 - 10y + 3)$.

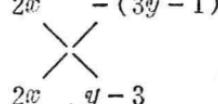
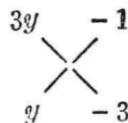
$$\begin{aligned}
 x &= \frac{4(y+1) \pm \sqrt{16(y+1)^2 + 4 \cdot 4 \cdot (3y^2 - 10y + 3)}}{2 \times 4} \\
 &= \frac{4y + 4 \pm 8(y-1)}{8},
 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{3y-1}{2}, \quad x_2 = \frac{3-y}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \quad &4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3 \\
 &= 4 \left(x - \frac{3y-1}{2} \right) \left(x - \frac{3-y}{2} \right) \\
 &= (2x - 3y + 1)(2x + y - 3).
 \end{aligned}$$

解法 2 原式

$$\begin{aligned}
 &= 4x^2 - 4(y+1)x - (3y^2 - 10y + 3) \\
 &= 4x^2 - 4(y+1)x - (3y-1)(y-3) \quad 2x \quad -(3y-1) \\
 &= (2x - 3y + 1)(2x + y - 3). \quad 2x \quad y - 3
 \end{aligned}$$



例 13 分别在有理数和实数范围内分解因式：

$$x^4 - 11x^2 + 18.$$

解 原式 = $(x^2 - 2)(x^2 - 9)$
= $(x^2 - 2)(x + 3)(x - 3)$ (在有理数范围内)
= $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 3)(x - 3)$.
(在实数范围内)

(3) 分式

①分式的定义 除式中含有字母的有理式叫做有理分式，简称分式。分式中字母的允许值是使分母的值不为零的那些数值。

②分式的基本性质

$$\frac{b}{a} = \frac{bm}{am}, \quad (m \neq 0)$$

③约分、通分和分式的四则运算 (略)

④繁分式的化简 繁分式实际上是分式除法的另一种写法，所以可利用除法法则和分式的基本性质来化简它。

例 14 化简：

$$\left[\frac{(a+b)^2 + 2b^2}{a^3 - b^3} - \frac{1}{a-b} + \frac{a+b}{a^2 + ab + b^2} \right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\div \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right).$$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left[\frac{a^2 + 2ab + b^2 + 2b^2}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} - \frac{a^2 + ab + b^2}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a-b)a + b}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \right] \cdot \frac{a-b}{ab} \div \frac{b^2 - a^2}{ab} \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{a-b}{ab} \cdot \frac{ab}{b^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2} \circ$$

例 15 化简：

$$\left[-\frac{p^2 q^3}{3(p+q)} \right]^4 \cdot \left(\frac{p^2 - q^2}{p^2 q^2} \right)^3 \div \left[\frac{q^2(q-p)}{9} \right]^3 \circ$$

解 原式 = $\frac{p^8 q^{12}}{81(p+q)^4} \cdot \frac{(p+q)^3(p-q)^3}{p^6 q^6}$

$$\circ \left[-\frac{9^3}{q^6(p-q)^3} \right]$$

$$= -\frac{9p^2}{p+q} \circ$$

例 16 已知 $x = \sqrt{2} - 1$, 试求 $\frac{1}{1 - \frac{1-x}{\frac{1}{x}-x}}$ 的值。

解 原式 = $\frac{1}{1 - \frac{x(1-x)}{1-x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{1+x}{1+x-x}$
 $= 1+x.$

当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时, 原式 = $1 + (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}.$

3. 二次根式

(1) 根式和无理式的定义 当 $a \geq 0$ 时, 式子 \sqrt{a} 叫做二次根式。含有根式的代数式叫做无理代数式, 简称无理式。无理式中字母的允许值是使无理式有实数值的那些数值。

(2) 平方根与算术平方根 如果一个数的平方等于 a ($a \geq 0$), 那么这个数就叫做 a 的平方根。正数 a 的平方根是两个相反的数, 它的正的平方根叫做算术根, 用 \sqrt{a} 表示,

另一个负的平方根用 $-\sqrt{a}$ 表示。零的平方根仍是零（它的算术根也是零）。

(3) 根式的性质

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0).$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a \geq 0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

(4) 最简根式与同类根式

①符合下列条件的二次根式叫做最简二次根式：

I 被开方式的每一个因式的指数都小于2；

II 被开方式不含有分母。

把一个根式化为最简根式的步骤一般是：

I 移因式于根号外；

II 化去根号内的分母。

②同类根式 两个或者两个以上的二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方式相同，就叫做同类根式。

(5) 根式的运算

①加减法 先化为最简根式，然后合并同类项。

②乘除法 应用二次根式的性质进行运算。

(6) 分母有理化 一般有下面的情况：

$$\textcircled{1} \quad \frac{A}{\sqrt{b}} = \frac{A\sqrt{b}}{b};$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

例 17 化简: $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + |x-5|$.

解 若 $x < -3$, 则原式 $= -(x-2) - (x+3) - (x-5)$
 $= 4 - 3x$;

若 $-3 \leq x < 2$, 则

原式 $= -(x-2) + (x+3) - (x-5)$
 $= 10 - x$;

若 $2 \leq x < 5$, 则原式 $= (x-2) + (x+3) - (x-5)$
 $= x + 6$;

若 $x \geq 5$, 则原式 $= (x-2) + (x+3) + (x-5)$
 $= 3x - 4$.

例 18 计算:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{-8} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}}$$

解 原式 $= \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)$
 $- \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{2} + 1)^2}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}$
 $= \frac{3}{2}\sqrt{2} + 1 - \sqrt[3]{2 - 1}$
 $= \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

例 19 化简:

$$-\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x - y}$$

解 原式

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \\
&\quad + \frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y} \\
&= \frac{\sqrt{x^3} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} - \sqrt{y^3} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \\
&\quad + \frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}} \\
&= \frac{3x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&= \frac{3x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} + 3\sqrt{y}(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}} \\
&= \frac{3x\sqrt{x} + 3y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} = 3.
\end{aligned}$$

例 20 已知 $b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2} = 1$, 且 $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, 求证: $a^2 + b^2 = 1$.

证法 1 由已知得 $b\sqrt{1-a^2} = 1 - a\sqrt{1-b^2}$,
两边平方得 $b^2(1-a^2) = 1 - 2a\sqrt{1-b^2} + a^2(1-b^2)$,

整理得 $1 - b^2 - 2a\sqrt{1-b^2} + a^2 = 0$,

$$(\sqrt{1-b^2} - a)^2 = 0,$$

$$\sqrt{1-b^2} = a,$$

两边平方得 $1 - b^2 = a^2$,

$$\therefore a^2 + b^2 = 1.$$

证法 2 令 $a = \sin\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$,

$$b = \sin\beta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right),$$