中学数学复习资料

（上 册）

淮阴县文教局翻印

一九七九年十二月

目　　录

代　　数

几　　何

代　数

一、实数与代数式

（一）实数

1.实数的系统表

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
      - ——可化为
        - 有限小数
        - 无限循环小数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数
    - ——即无限不循环小数

形如$\frac{p}{q}$（$q\neq0$，p、q 是整数）的数叫做有理数.无限不循环小数叫做无理数。有理数、无理数统称为实数。

2.实数的运算定律

（1）交换律　　$a+b=b+a$；

$a\cdot b=b\cdot a$。

（2）结合律　　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。

（3）分配律　　$a(b+c)=ab+ac$。

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，次算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括号里的数。

3.数轴　规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴。

实数集合与数轴上的点的集合具有"一一对应"的关系，这就是：每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。

4.实数的绝对值　实数 a 的绝对值是非负数：

$$|a|=\begin{cases} a\ (\text{当 } a>0 \text{ 时})\ ; \\ 0\ (\text{当 } a=0 \text{ 时})\ ; \\ -a\ (\text{当 } a<0 \text{ 时})\ . \end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义，是数 a 在数轴上的对应点到原点的距离。

5.实数大小的比较

（1）按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较大小，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数。

（2）用求差法比较两个实数的大小，即若 $a-b>0$，则 $a>b$；若 $a-b=0$，则 $a=b$；若 $a-b<0$，则 $a<b$。

例 1　计算：$\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-(-5.5)\times\frac{6}{11}+(-2)^3$
$\div[1-(0.5)^{-2}]$。

解　$$原式=\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{11}{2}\right)\times\frac{6}{11}-8\div\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]$$

$$=\frac{4}{3}+3-8\div(1-4)$$

$$=\frac{4}{3}+3+\frac{8}{3}=7.$$

例 2 把下列各数按从小到大的顺序用不等号连结起来：

$$|-5|,\ -3,\ \left|\frac{2}{3}\right|,\ 0,\ \sqrt{5},\ -\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|.$$

解 $\because$ $|-5|=5$， $\left|\frac{2}{3}\right|\approx 0.67$，$\sqrt{5}\approx 2.24$，

$$-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\approx -0.71,$$

$$\therefore\quad -3<-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<0<\left|\frac{2}{3}\right|<\sqrt{5}<|-5|.$$

（二）代数式

1.代数式

（1）代数式的定义 用代数运算符号把数字和字母连结起来的式子，叫做代数式.

（2）代数式的分类表

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

（3）代数式的值 用数值代替代数式里的字母，计算得出的结果，叫做代数式的值.

2.有理式

（1）有理式的定义 一个代数式如果只含有加、减、乘、除和乘方等五种运算，这样的代数式叫做有理代数式，简称有理式.

（2）整式

①整式的定义　一个代数式如果不含有除法运算，或虽有除法运算，但除数不含字母，这样的代数式叫做有理整式，简称整式．

整式按照它是由几个单项式的代数和组成的，可以分为单项式、二项式、三项式等等．项数在二项以上的统称为多项式．

②整式的四则运算（法则略）

在进行乘除法、乘方运算时，经常用到下面正整数指数幂的运算法则以及乘法公式：

正整数指数幂运算法则：

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0,\ m > n)$；

$(a^m)^n = a^{mn}$；　$(ab)^n = a^n b^n$；

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$．

乘法公式：

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$；

$(a \pm b)^3 = a^2 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$；

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$．

例 1　计算代数式 $2x^3 - 5x^2 + 3x - 8$ 的值：

(1) 当 $x = -1$ 时；　(2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时．

解　(1) 当 $x = -1$ 时，

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) - 8$$
$$= -2 - 5 - 3 - 8 = -18;$$

(2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时，

$$2x^3-5x^2+3x-8=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)-8$$

$$=2\left(\frac{1}{8}\right)-5\left(\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)-8$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}-8=-7\frac{1}{2}.$$

例 2 试用语言叙述下列各式所确定的实数 a、b（或 a、b、c）之间的关系或值的范围：

(1) $a^2=b^2$；　(2) $a+b=0$；　(3) $ab=1$；

(4) $ab=-1$；　(5) $ab=0$；　(6) $ab\neq0$；

(7) $(a-b)^2=0$；　(8) $a^2+b^2=0$；　(9) $a^2+b^2>0$；

(10) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$；

(11) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$.

解 (1) a、b 的绝对值相等； (2) a、b 互为相反数；

(3) a、b 互为倒数；　(4) a、b 互为负倒数；

(5) a、b 中至少有一个为零；

(6) a、b 均不为零；　(7) a、b 相等；

(8) a、b 均为零；　(9) a、b 不全为零；

(10) a、b、c 中至少有两个相等；

(11) a、b、c 不全相等.

例 3 计算：

(1) $(x-1)(x-2)-3x(x+3)+2[(x+2)(x+1)-3]$；

(2) $(-3a^2b^3)^3\div(3ab^2)^2$.

解 (1)

原式 $=x^2-2x-x+2-3x^2-9x+2(x^2+x+2x+2-3)$

$=-2x^2-12x+2+2x^2+6x-2$

$=-6x$；

(2) 原式 $= -27a^6b^9 \div 9a^2b^4$

$= -3a^4b^5$。

例 4 计算：

(1) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)-(3a+2b)$
$(9a^2-6ab+4b^2)$；

(2) $(x+2y)^3(x-2y)^3-(2x+y)^3(2x-y)^3$。

解 (1) 原式 $=(3a)^3-(2b)^3-(3a)^3-(2b)^3$

$=-16b^3$；

(2) 原式 $=(x^2-4y^2)^3-(4x^2-y^2)^3$

$=x^6-12x^4y^2+48x^2y^4-64y^6-64x^6$
$+48x^4y^2-12x^2y^4+y^6$

$=-63x^6+36x^4y^2+36x^2y^4-63y^6$。

③因式分解 把一个多项式用几个因式的积来表示，叫做多项式的因式分解。

一个多项式能不能分解因式，要根据在什么数范围内进行因式分解来决定。在指定的数的范围内分解因式时，一定要分解到不能再分解为止．在分解因式之后，如有相同因式，要写成幂的形式，并且各个因式要化简。

因式分解通常用到下列基本方法：

Ⅰ 提取公因式法

例 5 分解 $-8a^3b+12a^2b-20ab^2$ 的因式。

解 原式 $=-4ab(2a^2-3a+5b)$。

Ⅱ 分组分解法

例 6 分解因式：$10a^2+21xy-14ax-15ay$。

解 原式 $=5a(2a-3y)-7x(2a-3y)$

$=(2a-3y)(5a-7x)$。

Ⅲ　应用乘法公式法

例 7　分解因式：$8(x+y)^3-27(x-y)^3$。

解　原式$=[2(x+y)-3(x-y)][4(x+y)^2+2(x+y)\cdot 3(x-y)+9(x-y)^2]$

$$=(2x+2y-3x+3y)(4x^2+8xy+4y^2+6x^2-6y^2+9x^2-18xy+9y^2)$$

$$=(5y-x)(19x^2-10xy+7y^2).$$

例 8　分解因式：$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$.

解　原式$=x^4-2x^2y^2+y^4-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$

$$=(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-(2yz)^2$$

$$=[(x^2-y^2)-z^2]^2-(2yz)^2$$

$$=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)$$

$$=[x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]$$

$$=(x-y-z)(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Ⅳ　应用十字相乘法

例 9　分解 $x^2+9x-10$ 的因式。

$$\begin{array}{ccc} x & & -1 \\ & \times & \\ x & & 10 \end{array}$$

解　原式$=(x-1)(x+10)$。

例 10　分解因式：

$2x^2-9xy+10y^2$.

$$\begin{array}{ccc} x & & -2y \\ & \times & \\ 2x & & -5y \end{array}$$

解　原式$=(x-2y)(2x-5y)$。

Ⅴ　应用配方法

例 11　在实数范围内分解因式：$2x^2-6x+1$.

解　原式$=2\left(x^2-3x+\dfrac{1}{2}\right)$

$$=2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\right]$$

$$=2\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$=2\left(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right).$$

从上例可以看出，如果二次三项式 ax^2+bx+c 的两根为 x_1，x_2，那么这个二次三项式可以分解为

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

例 12 分解因式：$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$。

解法 1 原式 $=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$。

$$x=\frac{4(y+1)\pm\sqrt{16(y+1)^2+4\cdot4\cdot(3y^2-10y+3)}}{2\times4}$$

$$=\frac{4y+4\pm8(y-1)}{8},$$

$$x_1=\frac{3y-1}{2},\qquad x_2=\frac{3-y}{2}.$$

$\therefore\quad 4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

$$=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left(x-\frac{3-y}{2}\right)$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

解法 2 原式

$$\begin{array}{ccc} 3y & & -1 \\ & \times & \\ y & & -3 \end{array}$$

$$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$$

$$=4x^2-4(y+1)x-(3y-1)(y-3)$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & -(3y-1) \\ & \times & \\ 2x & & y-3 \end{array}$$

例 13 分别在有理数和实数范围内分解因式：

x^4-11x^2+18。

解 原式 $=(x^2-2)(x^2-9)$

$=(x^2-2)(x+3)(x-3)$ （在有理数范围内）

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)(x-3)$。

（在实数范围内）

（3）分式

①分式的定义 除式中含有字母的有理式叫做有理分式，简称分式. 分式中字母的允许值是使分母的值不为零的那些数值.

②分式的基本性质

$$\frac{b}{a}=\frac{bm}{am}. \quad (m\neq 0)$$

③约分、通分和分式的四则运算（略）

④繁分式的化简 繁分式实际上是分式除法的另一种写法，所以可利用除法法则和分式的基本性质来化简它.

例 14 化简：

$$\left[\frac{(a+b)^2+2b^2}{a^3-b^3}-\frac{1}{a-b}+\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\div\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right).$$

解

$$原式=\left[\frac{a^2+2ab+b^2+2b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}-\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{(a-b)a+b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right]\cdot\frac{a-b}{ab}\div\frac{b^2-a^2}{ab}$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a-b}{ab}\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}。$$

例 15 化简：

$$\left[-\frac{p^2q^3}{3(p+q)}\right]^4\cdot\left(\frac{p^2-q^2}{p^2q^2}\right)^3\div\left[\frac{q^2(q-p)}{9}\right]^3.$$

解 原式 $=\frac{p^8q^{12}}{81(p+q)^4}\cdot\frac{(p+q)^3(p-q)^3}{p^6q^6}$

$$\cdot\left[-\frac{9^3}{q^6(p-q)^3}\right]$$

$$=-\frac{9p^2}{p+q}.$$

例 16 已知 $x=\sqrt{2}-1$，试求 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1-x}{\dfrac{1}{x}-x}}$ 的值.

解 原式 $=\dfrac{1}{1-\dfrac{x(1-x)}{1-x^2}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{1+x}{1+x-x}$

$=1+x$。

当 $x=\sqrt{2}-1$ 时，原式 $=1+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}$.

3.二次根式

(1) 根式和无理式的定义　当 $a\geqslant0$ 时，式子 $\sqrt{a}$ 叫做二次根式. 含有根式的代数式叫做无理代数式，简称无理式. 无理式中字母的允许值是使无理式有实数值的那些数值.

(2) 平方根与算术平方根　如果一个数的平方等于 a ($a\geqslant0$)，那么这个数就叫做 a 的平方根. 正数 a 的平方根是两个相反的数，它的正的平方根叫做算术根，用 $\sqrt{a}$ 表示，

另一个负的平方根用 $-\sqrt{a}$ 表示。零的平方根仍是零（它的算术根也是零）。

（3）根式的性质

$(\sqrt{a})^2=a \quad (a\geqslant 0)$。

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & （当 a\geqslant 0 时）；\\ -a & （当 a<0 时）。\end{cases}$$

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$。

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a\geqslant 0,\ b>0)。$$

（4）最简根式与同类根式

①符合下列条件的二次根式叫做最简二次根式：

Ⅰ　被开方式的每一个因式的指数都小于 2；

Ⅱ　被开方式不含有分母。

把一个根式化为最简根式的步骤一般是：

Ⅰ　移因式于根号外；

Ⅱ　化去根号内的分母。

②同类根式　两个或者两个以上的二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方式相同，就叫做同类根式。

（5）根式的运算

①加减法　先化为最简根式，然后合并同类项。

②乘除法　应用二次根式的性质进行运算。

（6）分母有理化　一般有下面的情况：

①　$$\frac{A}{\sqrt{b}}=\frac{A\sqrt{b}}{b}；$$

②　$$\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}。$$

例 17 化简：$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}+|x-5|$。

解 若 $x<-3$，则原式 $=-(x-2)-(x+3)-(x-5)$

$$=4-3x;$$

若 $-3\leqslant x<2$，则

原式 $=-(x-2)+(x+3)-(x-5)$

$=10-x$；

若 $2\leqslant x<5$，则原式 $=(x-2)+(x+3)-(x-5)$

$$=x+6;$$

若 $x\geqslant 5$，则原式 $=(x-2)+(x+3)+(x-5)$

$$=3x-4.$$

例 18 计算：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{8}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}.$$

解 原式 $=\frac{1}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)$

$$-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}+1-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}+1-\sqrt[3]{2-1}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

例 19 化简：

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$$

解 原式

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$$

$$+\frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

$$=\frac{\sqrt{x^3}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-\sqrt{y^3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$$

$$+\frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}+3\sqrt{y}(x-\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}+3y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=3.$$

例 20 已知 $b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}=1$，且$|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，求证：$a^2+b^2=1$。

证法 1 由已知得 $b\sqrt{1-a^2}=1-a\sqrt{1-b^2}$，

两边平方得 $b^2(1-a^2)=1-2a\sqrt{1-b^2}+a^2(1-b^2)$，

整理得 $1-b^2-2a\sqrt{1-b^2}+a^2=0$，

$$(\sqrt{1-b^2}-a)^2=0,$$

$$\sqrt{1-b^2}=a,$$

两边平方得 $1-b^2=a^2$，

$\therefore$ $a^2+b^2=1$。

证法 2 令 $a=\sin\alpha\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

$$b=\sin\beta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$