连续体力学的重构核粒子法

LIANXUTI LIXUE DE CHONGGOU HELIZI FA

秦义校 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

连续体力学的
重构核粒子法

秦义校 著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

无网格方法是当今科学与工程计算方法的研究热点，本书介绍了将改进的重构核粒子法的边界节点无网格形函数和边界积分方程方法结合，而形成的连续体力学的重构核粒子边界无单元法及其与有限元的耦合方法；介绍了相应的断裂力学分析的重构核粒子边界无单元法。这些边界无网格法不仅具有无网格法的优点，同时具有降维的特性，从而能压缩求解规模。论述了将改进的重构核粒子法形函数和弹性力学基本方程及最小势能原理结合，而形成的平面问题动力学分析和空间轴对称力学问题的无网格方法。这些方法都用典型例子验证了自身的有效性。

本书可作为机械设计与理论、工程数值计算相关专业的高年级本科生、研究生和研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

连续体力学的重构核粒子法/秦义校著. —北京：国防工业出版社，2012.9

ISBN 978—7—118—08351—4

Ⅰ. ①连… Ⅱ. ①秦… Ⅲ. ①计算力学 Ⅳ. ①O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 223184 号

※

国防工業出版社 出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

北京市海淀区四季青印刷厂

新华书店经售

*

开本 880×1230 1/32 **印张** 6 **字数** 201 千字

2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—2000 册 **定价** 42.00 元

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

总　　序

2012年，太原科技大学将迎来60周年华诞。值此六秩荣庆之际，我校的专家学者推出了这套学术丛书，以此献礼，共襄盛举。

60年前，伴随着新中国的成立，伟业初创，百废待兴，以民族工业为先锋的社会主义现代化建设蓬勃兴起，太原科技大学应运而生。60年来，几代科大人始终心系民族振兴大业，胸怀制造强国梦想，潜心教书育人，勇担科技难题，积极服务社会，为国家装备制造行业发展壮大和社会主义现代化建设做出了积极贡献。四万余名优秀学子从这里奔赴国民经济建设的各个战场，涌现出一大批杰出的科学家、优秀的工程师和知名的企业家。作为新中国独立建设的两所“重型机械”院校之一，今天的太原科技大学已发展成为一所以工业为主，“重大技术装备”领域主流学科特色鲜明，多学科协调发展的教学研究型大学，成为国家重型机械工业高层次人才培养和高水平科技研发的重要基地之一。

太原科技大学一直拥有浓郁的科研和学术氛围，众位同仁在教学科研岗位上辛勤耕耘，硕果累累。这套丛书的编撰出版，定能让广大读者、校友和在校求学深造的莘莘学子共享我校科技百花园散发的诱人芬芳。

愿太原科技大学在新的征途上继往开来、再创辉煌。

谨以为序。

太原科技大学校长　郭勇义

2012年6月

前　言

边界积分方程的无网格方法是无网格方法的重要分支。以往的边界积分方程的无网格方法一般是将移动最小二乘法和边界积分方程方法相结合形成的。这类方法的优点是构造形函数不依赖网格，而且具有降维的特点。但是移动最小二乘法容易形成病态方程组而导致求解失效，并且往往给处理边界条件带来困难。将具有插值特性的重构核粒子法的边界节点无网格形函数和边界积分方程方法结合，提出了重构核粒子边界无单元法及其与有限元的耦合方法；基于扩展的重构核粒子法形函数，提出了断裂力学的重构核粒子边界无单元法。提出的重构核粒子边界无单元法，是解题规模小、节省时间、可直接施加边界条件的无网格方法。

本书研究了重构核粒子法的形函数的插值特性。在有限域上利用重构条件生成的重构核粒子法的形函数，当紧支域半径覆盖的节点数与基函数的单项式个数一致时，其满足点插值性质；插值型重构核粒子法的形函数，是通过简单函数引入插值特性，并利用增强函数构造重构条件，得到一个具有任意离散点插值特性的形函数。插值型重构核粒子法形函数能精确重构插值点多项式的真值、具有不低于核函数的高阶光滑性。给出了插值型重构核粒子法形函数的构造过程，推导了其导函数，对曲线和曲面的拟合验证了该方法的有效性，为建立高精度无网格方法提供了基础条件。采用具有点插值特性的重构核粒子法的形函数构造近似函数，克服了多数无网格方法处理本质边界条件的困难。

在改进的重构核粒子法基础上，结合势问题的边界积分方程方法，建立了势问题的重构核粒子边界无单元法，推导了相应的离散化公式，建立了边界节点未知量求解方程。提出的重构核粒子边界无单元法是一种直接列式法，具有精度高和求解效率高的优势。

基于插值型重构核粒子法和弹性力学的边界积分方程方法，提出

了弹性力学的重构核粒子边界无单元法。研究了其数值积分方案，推导了其离散化边界积分方程和边界节点未知量求解方程组，并给出了其离散化内点公式。

为求解具有区域特性的势问题和弹性力学问题，将势问题和弹性力学的重构核粒子边界无单元法与相应问题的有限元法耦合，提出了重构核粒子边界无单元法与有限元耦合的方法。该耦合方法的节点未知量与重构核粒子边界无单元法的节点未知量同样是节点待求真值，所以其同样可以直接施加边界条件。

现有的无网格方法在模拟断裂力学问题时，存在计算量大、精度低等问题。为了克服这些不足，引入扩展的重构核粒子法形函数构造具有裂纹尖端场特性的近似函数，建立了断裂力学的重构核粒子边界无单元法。该方法具有较好的稳定性。

采用提出的重构核粒子边界无单元法方法，对工程问题进行了分析研究，并和有限元分析结果进行了比较。

另外，将插值型重构核粒子法与弹性力学的最小势能原理相结合，提出了弹性力学平面问题的插值型重构核粒子法。其可直接施加边界条件，而且保证了较高的数值精度。

将重构核粒子法与弹性动力学的积分弱形式控制方程结合，时间域积分采用 Newmark 平均加速度法，建立了弹性动力学的重构核粒子法。

将重构核粒子法与弹性力学空间轴对称问题的控制方程耦合，建立了弹性力学空间轴对称问题的重构核粒子法。

通过对多个典型问题的数值模拟，表明所提方法具有运算规模较小、精度高和可直接施加边界条件等优点，是正确和有效的工程问题数值模拟方法。

由于作者水平有限，不妥与错误之处敬请读者指正。

作　者
2012 年 9 月

目　录

第1章　绪　　论

1.1　科学和工程中的数值方法

科学和工程中的问题一般可归结为偏微分方程的定解问题。这种定解问题在理论上可解或存在唯一确定的解，但由于这类问题的复杂性，一般难以求得其解析解。如在弹性力学问题的解析方法中，除平面问题的复变函数解法属于正演解法外，其余弹性力学问题都只能用逆解法或半逆解法，而逆解法和半逆解法的成功率都很低。解析法受困于分析对象不规则或约束与外力复杂的情况，不能满足工程计算的需要，于是各种数值方法应运而生。目前发展起来的数值方法有加权残数法、有限差分法、有限元法、边界元法和无网格方法等。随着计算机运算能力的不断增强，这些数值方法也在科学和工程领域得到飞速发展[1]。

作为数值方法而言，加权残数法是一种直接求解偏微分方程定解问题的近似解的方法[2]。加权残数法简单直观，计算量小，但其稳定性较差，精度难以控制。目前已很少直接用加权残数法来求解科学和工程问题。

有限差分法是将偏微分方程的定解问题按差分格式离散以获得数值解[3]。由于计算精度等原因，有限差分法目前在固体和结构力学领域也已很少应用。

20 世纪 50 年代初问世的有限元法把差分法的离散改造成更为灵活的有限单元离散，把加权残数法的试函数近似变换为插值函数近似，用与单元节点有关的插值函数来描述单元内部特性，以变分原理或加权残数法作为推导的依据，从而将整个区域的微分方程变换成与节点未知量有关的代数方程组，求解此代数方程组就可以得到离散模型的数值解。有限元法是一种从整体离散化为单元，再从单元分析到形成

整体分析的数值方法。有限元法简单直观、计算效率好，一般数值精度也较高，它有效地克服了有限差分法对网格形状的限制。有限元法可以充分利用计算机的计算能力，已经成为处理各种复杂工程问题的重要方法[4,5]。但是，有限元法须在整个求解域上进行离散，对于形状复杂的三维体，有限元的网格剖分仍然不是一件轻松的事情。对大变形和裂纹扩展等问题，还须反复进行网格重构。

边界元法[6,7]是继有限元法之后的一种别具特色的数值方法，它是将描述弹性力学问题的偏微分方程边值问题化为边界积分方程并吸收有限元法的离散化技术而发展起来的。边界元法具有半解析、降维、域内应力连续等优点，但边界元法也有其难以克服的缺点，如建立边界积分方程需要基本解、难以处理复杂问题的边界积分方程中的奇异积分、对裂纹扩展等问题也须进行网格重构等。

虽然有限元、边界元等方法是求解工程问题的强有力的数值方法，但它们也面临着许多诸如大变形的冲压成型、裂纹扩展等非常棘手的问题。用传统的数值方法如有限元法、边界元法等处理这些问题的困难，在于网格的存在妨碍了处理与原始网格线不一致的不连续性和大变形问题。这些基于网格的方法，在处理不连续性和大变形问题时，常用的是网格重构。然而，这样不仅计算费用昂贵，而且会使计算精度严重受损。

目前，正在发展的无网格方法由于采用基于点的近似，可以彻底或部分地消除网格，在处理不连续和大变形等问题时可以完全抛开网格重构[8,9]，显示出其特有的优点。无网格方法是目前科学和工程计算方法研究的热点之一，也是科学和工程算法发展的趋势。

1.2　无网格方法概述

无网格方法（meshless or meshfree method）基于点的近似构造试函数（trial function），不需要考虑节点与单元间的关联，是科学和工程计算的一种新的数值模拟方法[10]。

无网格方法构造形函数（试函数）的方法与有限元法等基于网格形成形函数的方法不同。无网格方法建立求解方程的方法可以和有限元

法一样。无网格方法处理边界条件的方法也有别于有限元法。

无网格方法形成形函数的方法包括：光滑粒子法（Smooth Particle Hydrodynamic method，SPH）[11]、重构核粒子法（Reproducing Kernel Particle Method，RKPM）[12]、移动最小二乘法（Moving Least-Square approximation method，MLS）[13]和单位分解法（The partition of unity method）[14]等。

无网格方法建立求解方程的方法有 Galerkin 法[15]、Petrov-Galerkin 法[16]、加权残数法[17]和配点法[18]等。

采用移动最小二乘法的无网格法形函数不具有插值特性，这类无网格方法处理边界条件的方法和有限元法也不同，通常采用拉格朗日乘子法[15,19]和罚函数法等[20]。另外，无网格方法处理边界条件也有一些简捷的方法，如通过利用无网格形函数的适应性，靠近边界的非边界点的形函数在边界点可以强迫其为 0，从而生成一个适应边界条件的形函数来满足本质边界条件[21]。

目前发展的无网格方法有十几种，分别是光滑粒子法[11,22]、重构核粒子法[12]、扩散单元法（Diffuse Element Method，DEM）[23]、无单元 Galerkin 方法（Element-Free Galerkin Method，EFG）[15]、Hp-clouds 无网格方法[24]、无网格局部 Petrov-Galerkin 方法（Meshless Local Petrov-Galerkin Method，MLPG）[16,25]、有限点法（The Finite Point Method，FPM）[18]、多尺度重构核粒子方法（Multi-scale Reproducing Kernel Particle Method，MRKPM）[26]、小波粒子方法（Wavelet Particle Method，WPM）[27]、径向基函数法（Radial Basis Functions，RBF）[28]、无网格有限元法（Meshless Finite Element Method，MFEM）[29]、移动粒子有限元法（Moving Particle Finite Element Method，MPFEM）[30]、复变量无网格方法[31,32]、自然单元法（Natural Element Method，NEM）[33]和边界积分方程的无网格方法（Boundary integral Equation Method，BIEM）[34-51]等。

边界积分方程的无网格方法是无网格方法发展的一个分支。其在分析域的边界布点代替边界元法在边界上剖分网格，通常以移动最小二乘法在边界构造无网格试函数，比边界元法依赖边界网格来构造试函数显得更加灵活方便，且无网格试函数一般具有高阶可导光滑性。

边界积分方程的无网格方法以控制方程的边界积分方程建立求解方程。边界积分方程的无网格方法的非直接解法在处理边界条件时与全域无网格方法相同,而其直接解法可直接施加边界条件。边界积分方程的无网格方法与全域无网格方法相比计算量显著减少,同时具有无网格方法的优点。

目前发展的边界积分方程的无网格方法有局部边界积分方程的无网格方法(Local Boundary Integral Equation Method,LBIEM)[34-41]、边界点法(Boundary Node Method,BNM)[42-46]、边界无单元法(Boundary Element-Free Method,BEFM)[47]、杂交边界点法(Hybrid Boundary Node Method,HBNM)[48]、边界点插值法(Boundary Point Interpolation Method,BRPIM)[49,50]和边界云团法(Boundary Cloud Method,BCM)[51]。

无网格方法作为数值方法的重要发展,在科学和工程计算中扮演着越来越重要的角色。无网格方法的解具有高阶连续性,力学分析时不必进行应力修匀等后处理工作,在材料泊松比较大时也不会有网格和体积闭锁(Mesh or Volumetric-locking)现象[52,53]。无网格方法的基函数可选择性强,对界面应力突变、大梯度、奇异性等问题有特殊处理方法。因为无网格方法构造形函数不依赖网格、不受网格剖分原则的限制,有很强的自适应能力。无网格方法既适合于解决一般的力学问题,更适合于解决诸如裂纹扩展等结构破坏过程仿真、金属冲压成型等大变形问题、梯度材料等新材料问题的性能分析、高速碰撞和爆破等瞬态动力问题,而这些问题的精确分析是科学和工程计算中迫切需要解决的难题。因此,对无网格方法进行理论和应用研究具有重要的理论意义和工程应用价值。

1.3 无网格方法的研究进展

最早的无网格方法是 1977 年 Lucy 等提出的光滑粒子法,并用于研究无边界的天体问题[11,22]。后来,Swegle[54]、Dyka[55]等提出了 SPH 方法不稳定的起因及稳定化方案,Jonhson 和 Beissel 等提出了一些改善应变计算的方法[56],Liu 等也提出了对核函数的修正方案[12]。

除了 SPH 方法采用的核重构方式形成无网格方法外，另一条构造无网格方法的途径是采用移动最小二乘法进行近似。它是通过互不相关的节点上的值插值得到一个函数，该函数光滑性好且导数连续[13]。

1992 年，Nayroles 等最早将移动最小二乘法用于 Galerkin 方法，并称为扩散单元法（Diffuse Element Method，DEM），分析了 Possion 方程和弹性问题[23]。从计算力学的角度看，此法已具有无网格特点。

1994 年，Belytschko 等对扩散单元法进行了改进，提出了 EFG 方法[15]。这些改进包括对形函数导数考虑得更全面、采用高阶高斯积分进行区域积分和引入拉格朗日乘子处理本质边界条件。这些改进提高了 DEM 的求解精度。与 SPH 方法相比，这类方法虽然计算费时，但其具有较好的协调性与稳定性。

Belytschko 等对 EFG 方法中的数值积分以及近似函数的计算方法进行了深入研究[57-59]，并成功地将该方法应用于求解动态裂纹扩展数值模拟[60-62]，给出了 EFG 的任意 Lagrangian-Eulerian 公式[63]，掀起了无网格方法的研究热潮。无单元 Galerkin 法是目前研究最为广泛的无网格方法。

Krysl 等将 EFG 方法用于板壳分析中[64]，Belytschko 等应用 EFG 方法求解静态和动态断裂力学问题[65]，Sukumar 等应用 EFG 方法求解了三维断裂力学问题[66]，Belytschko 等应用 EFG 方法求解混凝土的断裂问题[67]，Xu 等应用 EFG 方法求解弹塑性材料的裂纹扩展问题[68]，Kargarmovin 等应用 EFG 方法求解弹塑性力学问题[69]，Bouillard 等应用 EFG 方法求解 Helmholtz 问题[70]，Lee 等讨论了 EFG 中的裂纹分析技术[71]，Fleming 和 Belytschko 等提出了求解裂纹尖端场的扩展的 EFG 方法[53]。

为了避免使用背景网格积分，Beissel 等提出了节点积分方案[72]，Smolinski 等给出了 EFG 方法显式时间积分方案并用于求解扩散问题[73]。

Mukherjee 等对移动最小二乘法进行了改进，以便 EFG 方法处理边界条件[74]。Alves 利用扩展的单位分解有限元权函数讨论了 EFG 方法的边界条件的处理[75]。Kaljevic 利用插值型移动最小二乘法对 EFG 方法进行了改进[76]。Krysl 和 Belytschko 建立了 EFG 方法的形

函数库[77]。Liew 等将 EFG 方法应用于形状记忆合金的力学分析[78]。Krysl 和 Belytschko 讨论了 EFG 的解的收敛性的数学理论[79]。Gavete 等讨论了 EFG 的误差估计的数学理论[80]。

1995 年,Oden 和 Duarte 提出了 Hp-Clouds 无网格方法[24,81]。该方法利用移动最小二乘法建立单位分解函数,并由此构造近似函数,然后由 Galerkin 法建立求解方程。之后又讨论了其自适应方法[82]并将有限元形函数作为单位分解函数,提出了 Hp 云有限元法(New Clouds-Based Hp FEM)[83],这一方法需借助于有限元网格,破坏了部分"无网格"特性,但很容易进行 hp 和 hp 自适应分析。Babuska 等将单位分解法与有限元法相结合,提出了单位分解有限元法[84]和广义有限元法[85]。基于移动最小二乘法的无网格方法实质上是单位分解法的一个特例。

1995 年,Liu 分析了 SPH 方法用于有限域问题不满足一致性条件和在边界精度差的问题,利用函数的积分重构理论,基于 Galerkin 法提出重构核粒子方法[12],并将此方法推广应用到科学和工程数值计算的诸多领域,如将重构核粒子法用于有限元法的扩展,使扩展的有限元法具有更好处理大变形等问题的适应性[86]。Chen 将重构核粒子方法应用于非线性结构的大变形分析[87]。Li 和 Liu 提出了移动最小二乘重构核粒子方法[88,89]和重构核的分级单位分解方法[90,91]。Chen 等对重构核粒子方法进行了改进,并应用于不可压缩的有限弹性体分析[92]。Voth 等讨论了重构核粒子方法的离散误差[93]。Liew 也将重构核粒子方法应用于大变形分析[94]。Shangwu 等将重构核粒子方法应用于平面应变问题分析[95]。Chen 等讨论了重构核粒子方法的节点插值性质[96]。Han 等还讨论了重构核粒子方法的误差分析[97]。

1996 年,Liu 又利用小波分析的尺度伸缩平移、多分辨率等特点,提出了多尺度重构核粒子法[26]和小波粒子法[27],并实现了该方法的自适应分析。

1996 年,Onate 和 Idelsohn 等提出了有限点法[18]。这是一种无需积分背景网格的真正的无网格方法,其采用 MLS 构造形函数,主要用于流体空气动力学领域[98]。

1998 年,Atluri 和 Zhu 等提出无网格局部 Petrov-Galerkin 方

法[16,24]，其采用移动最小二乘法构造试函数，并且采用移动最小二乘法的权函数作为加权残数法的权函数；同时此方法在各节点的局部子域上建立积分方程，即积分可在局部子域上完成，不再需要任何形式的背景网格。在 MLPG 方法中，权函数与试函数取自不同的函数空间，而在 Galerkin 方法中，权函数取自试函数的基函数空间，故权函数和试函数取自同一函数空间。MLPG 的基本思路是由子域上的加权残数法推出一个局部 Petrov-Galerkin 积分方程，利用此方程，求解整体域上的弹性力学问题就可以变成求解规则的局部域上的积分方程。从理论上讲，只要所有子域的并集覆盖了整体域，则子域的并集也将分别满足整体域及其边界上的平衡方程和边界条件。然而，计算实例证实，即使局部子域的并集不完全覆盖整体域，也能得到较精确的结果。MLPG 法已应用于求解多种问题[99-101]。Shen 和 Atluri 还拓展了这一方法的理论和应用范围[102]。这一方法一般采用罚函数法或拉格朗日乘子法施加边界条件，导致计算量增加。

径向基函数法常常对一些特殊问题具有较高的精度[103]，在 Bubnov-Galerkin 法、最小二乘法或其他方法中均获得成功应用[28]。Franke 和 Wu 讨论了径向基函数法的数学理论[104,105]。Wang 和 Liu 讨论了径向基函数法的形状参数优化[106]和点插值径向基函数法[107]。Liew 等利用径向基函数法讨论了板的屈曲问题[108,109]。

无网格有限元法是 Idelsohn 等提出的[29]。该方法将无网格方法和基于网格的方法相结合，基于 Voronoi 图来形成形函数。该方法具有无网格方法和基于网格方法的优点，但同时也是介于无网格方法和基于网格方法之间的一种方法。

移动粒子有限元法是 Hao 和 Liu 等提出的[30]。该方法具有和有限元法相应的精度，不像无网格方法需要花大量时间计算形函数，不需要背景积分网格，而且边界条件容易引入。

边界积分方程的无网格方法是无网格方法发展的重要分支。其中，局部边界积分方程的无网格方法是全域配置节点的无网格方法；而边界点法和边界无单元法是分析域边界配置节点的无网格方法，具有降维特性。

Atluri 等提出局部边界积分方程的无网格方法[34-41]。该方法在引